بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم الهه فیض‌الهی** رشته **ریاضی‌محض** تحت عنوان: **«مطالعه ابررویه‌های همگن در فضای مختلط هذلولوی»** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر بهزاد نجفی	استادیار	
٥- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی رجایی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده 1: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده 2: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته است که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده 3: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده 4: در صورت عدم رعایت ماده 3، 50٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده 5: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده 4 را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده 6: اینجانب الهه فیض‌الهی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد

تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: الهه فیض‌الهی

تاریخ و امضا:

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده 1- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده 2- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده 3- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده 4- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده 5- این آیین‌نامه در 5 ماده و یک تبصره در تاریخ 87/4/1 در شورای پژوهشی و در تاریخ 87/4/23 در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ 87/7/15 شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب.......................................دانشجوی رشته............................... ورودی سال تحصیلی......................
مقطع .... دانشکده .... متعهد می شوم کلِیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.......................

تاریخ: ....

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد
ریاضی‌محض، گرایش هندسه

مطالعه ابررویه‌های همگن در فضای مختلط هذلولوی

نگارنده

الهه فیض‌الهی

استاد راهنما

دکتر عباس حیدری

استاد مشاور

دکتر سید محمد باقر کاشانی

اسفند ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه، ابررویه‌های همگن و مجموعه‌های کانونی‌شان در فضای هذلولوی مختلط بررسی می‌شود. به ویژه یک رده‌بندی از مجموعه‌های کانونی بر پایه دومین فرم اساسی ارائه شده و خمیدگی اصلی ابررویه‌های همگن با چندگانگی‌شان محاسبه می‌شود. این پایان‌نامه چهار بخش می‌باشد. در بخش اول پیش‌نیازهایی درباره $\mathbb{C}H^n$ و گروه طولپایی‌های آن بیان می‌شود. بخش دوم به شناساندن W_φ^{2n-k} می‌پردازد. در بخش سوم نخستین قضیه اصلی این پایان‌نامه با نام صلب بودن زیرخمینه W_φ^{2n-k} بیان می‌شود که مجموعه‌های کانونی ابررویه‌های همگن $\mathbb{C}H^n$ را بر پایه فرم اساسی دوم‌شان رده‌بندی می‌کند.
در بخش چهار خمیدگی‌های اصلی ابررویه‌های همگن $\mathbb{C}H^n$ و چندگانگی آنها شمارش می‌شود.
در این پایان‌نامه به بازکردن مرجع [۲] می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی

فضای هذلولوی مختلط، ابررویه حقیقی، خمیدگی اصلی ثابت، ابررویه خط‌کشی‌شده‌ی کمین

فهرست

بند ۱

پیش‌گفتار

ابررویه حقیقی M در خمینه کمابیش هرمیتی $\bar{M}$ ، $Hopf$ است اگر برگ‌بندی یک بعدی یک بعدی القا شده با توزیع $J(\nu M)$ بر M تماما ژئودزیک باشد. در سال ۱۹۸۹ $Berndt$ در [۶] ابررویه‌های $Hopf$ در $\mathbb{C}H^n$ را رده‌بندی کرد. هر ابررویه $Hopf$ یا یک فراکره در $\mathbb{C}H^n$ می‌باشد یا برای $k \in \{0, ..., n-1\}$ یک تیوب دور $\mathbb{R}H^k$ یا $\mathbb{C}H^k$ است. مدتها بر این باور بودند که هر ابررویه همگن در $\mathbb{C}H^n$ یک ابررویه $Hopf$ است تا اینکه $Lohnherr$ در سال ۱۹۹۸ یک مثال نقض ساخت: ابررویه حقیقی خط کشی‌شده W^{2n-1} در $\mathbb{C}H^n$ که با یک فرادایره در $\mathbb{R}H^2$ تعیین می‌شود $Hopf$ نیست [۲۲] . $Berndt$ و $Tamaru$ در [۹] ابررویه‌های همگن $\mathbb{C}H^n$ را رده‌بندی کرده‌اند.

قضیه : فرض کنید برای $n \geq 2$ ، M ابررویه حقیقی و همبند $\mathbb{C}H^n$ باشد. آنگاه M همگن است اگر و تنها اگر M با یکی از خمینه‌های پایین تمام‌ریخت همنهشت باشد

۱. برای یک $k \in \{0, ..., n-1\}$ ، تیوبی حول $\mathbb{C}H^k$ که در $\mathbb{C}H^n$ تماما ژئودزیک است،

۲. تیوبی حول $\mathbb{R}H^n$ که در $\mathbb{C}H^n$ تماما ژئودزیک است،

۳. یک فراکره در $\mathbb{C}H^n$ ،

۴. ابررویه حقیقی، کمین و خط‌کشی شده‌ی W^{2n-1} یا یکی از ابررویه‌های هم فاصله با W^{2n-1} ،

۵. تیوبی حول زیرخمینه کمین و خط‌کشی شده‌ی W_{φ}^{2n-k} که $k \in \{2, ..., n-1\}$ و $\varphi \in (0, \pi/2]$ و k زوج است هرگاه $\varphi \neq \pi/2$.

ساختار زیرخمینه W^{2n-k} در این پایان‌نامه بررسی می‌شود. νM رتبه k و زاویه کیلری ثابت φ دارد. ابررویه‌های نوع (۱) ، (۲) و (۳) ابررویه‌های $Hopf$ هستند و هندسه آنها شناخته شده است. $Berndt$ در [۵] ابررویه‌های نوع (۴) را بررسی کرده است. هدف این پایان‌نامه بررسی ابررویه‌های نوع (۵) و مجموعه‌های

کانونی آنها (W_{φ}^{2n-k}) می‌باشد. انگیزه این بررسی پرسش پایین می‌باشد.
آیا هر ابررویه حقیقی با خمیدگی اصلی ثابت در $\mathbb{C}H^n$ بخش بازی از یک ابررویه همگن است؟
$Cartan$ به نظیر این پرسش در $\mathbb{R}H^n$ پاسخ داده است [۱۱] . $Berndt$ در [۶] نشان داد پاسخ این پرسش برای ابررویه‌های $Hopf$ مثبت است. در [۸] برای ابررویه‌های حقیقی دلخواه در $\mathbb{C}H^2$ پاسخ مثبت به این پرسش داده شده است و برای $n > 3$ و $g \leq 2$ در [۲۴] و برای $g = 3$ در [۷] به این پرسش پاسخ داده شده است که g تعداد خمیدگی‌های اصلی می‌باشد.

بند ۲

پیش‌نیازها

۱.۲ خمینه‌های مختلط

تعریف ۱.۱.۲. M را یک فضای توپولوژیک هاسدورف و شمارای نوع دوم بگیرید. گویند M یک خمینه مختلط n- بعدی است هرگاه هر نقطه آن مانند x یک همسایگی U داشته باشد که با زیر مجموعه بازی از $\mathbb{C}^n$ همانسان باشد. اگر $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$ همانسانی باشد، آنگاه (U,ϕ) را یک نقشه‌ی M گویند. فرض کنید (U,ϕ) و (V,ψ) دو نقشه از خمینه‌ی مختلط M باشد. گویند این دو نقشه سازگار است هرگاه $U \cap V = \emptyset$ یا اگر $U \cap V \neq \emptyset$، $\phi \circ \psi^{-1}$ و $\psi \circ \phi^{-1}$ تمام‌ریخت باشند. منظور از یک ساختار مختلط بر M خانواده‌هایی از نقشه‌های M مانند $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ است که

۱. $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$

۲. هر دو نقشه‌ی M سازگار باشند

۳. $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ بیشین باشد

اگر M یک خمینه مختلط n- بعدی باشد می‌توان آن را به یک خمینه حقیقی $2n$- بعدی تبدیل کرد. در واقع هر نقشه‌ی (U,ϕ) از M با مولفه‌های مختلط $(z^1,...,z^n)$ یک نقشه‌ی حقیقی با مولفه‌های $(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)$ می‌باشد که در آن برای هر $1 \leq j \leq n$ ، $z^j = x^j + iy^j$. بنابراین هر خمینه مختلط زوج بعدی است.

تعریف ۲.۱.۲. منظور از یک ساختار کمابیش مختلط بر خمینه‌ی هموار M یک میدان تانسوری نوع $(1,1)$ بر M مانند J است که $J^2 = -Id$. خمینه M همراه با یک ساختار کمابیش مختلط را یک خمینه‌ی کمابیش مختلط نامند.

نکته ۳.۱.۲. فرض کنید (M, J) یک خمینه کمابیش مختلط باشد. برای هر $x \in M$ ،

$$J_x : T_xM \to T_xM$$

یک نگاشت خطی است که $J_x^2 = -Id$. همچنین برای هر $x \in M$ فضای برداری حقیقی T_xM با ضربی که در پایین می‌آید به یک فضای برداری مختلط تبدیل می‌شود. فرض کنید $v \in T_xM$ و $a + ib \in \mathbb{C}$

$$(a + ib)v := av + bJ_x(v).$$

گزاره ۴.۱.۲. هر خمینه مختلط به طور طبیعی یک ساختار کمابیش مختلط می‌پذیرد.

اثبات. فرض کنید $(U, (z^1, ..., z^n))$ یک نقشه‌ی دلخواه از خمینه مختلط M باشد.
آنگاه $(U, (x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n))$ نقشه‌ای از M به عنوان یک خمینه حقیقی است و $z^j = x^j + iy^j$
تانسور J را موضعی چنین تعریف کنید:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

و

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}$$

نشان می‌دهیم تعریف J مستقل از انتخاب نقشه‌ی $(U, (x, y))$ است. فرض کنید $(V, (w^1, ..., w^n))$ نقشه‌ی دیگری از M باشد که $U \cap V \neq \varnothing$ و $(V, (u^1, ..., u^n, v^1, ..., v^n))$ نقشه‌ی حقیقی متناظر با آن باشد.
J' را چنین تعریف کنید:

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}$$
$$J'\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^i}$$

چون w^i ها تمام‌ریخت هستند برای هر $i\ ,\ j$ ، $1 \leq i\ ,\ j \leq n$ ، داریم

$$\frac{\partial u^j}{\partial y^i} = -\frac{\partial v^j}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial u^j}{\partial x^i} = \frac{\partial v^j}{\partial y^i} \tag{۱.۲}$$

همچنین

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial v^j}\right)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial v^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial v^j}\right)$$

بنابراین از رابطه (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} J'\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= J'\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u^j}+\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial v^j}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial v^j}-\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial u^j}+\frac{\partial v^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial v^j}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \end{aligned}$$

به طور مشابه

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

آشکارا $J^2 = -Id$ ، پس J یک ساختار کمابیش مختلط بر M است. □

نمونه ۵.۱.۲. مختصات $(z^1, ..., z^n)$ را بر $\mathbb{C}^n$ و میدان‌های برداری پایین را بر $\mathbb{C}^n$ بگیرید

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

همچنین ۱-فرم‌های مختلط پایین را بر $\mathbb{C}^n$ تعریف کنید

$$dz^j = dx^j + idy^j \quad , \quad d\bar{z}^j = dx^j - idy^j$$

برای فرم‌های مختلط بر $\mathbb{C}^n$ مشتق بیرونی $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ با تعریف $d = \partial + \bar{\partial}$ می‌باشد که

$$\partial = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z^j} dz^j \quad , \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$$

شرط $d^2 = 0$ نتیجه می‌دهد

$$\partial^2 = 0 \quad , \quad \bar{\partial}^2 = 0 \quad , \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

برای هر $1 \leq j \leq n$ ساختار مختلط بر $\mathbb{C}^n$ چنین است:

$$J\frac{\partial}{\partial z^j} = i\frac{\partial}{\partial z^j} \quad , \quad J\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$$

فرض کنید M یک خمینه مختلط و $\{U_j\}$ یک پوشش باز M باشد و $(z_j^1, ..., z_j^n)$ یک مختصات بر U_j باشد. یک بردار مماس (تحلیلی) در $z \in M$ چنین است.

$$v = \sum_{\alpha=1}^{n} \zeta_j^\alpha \left(\partial/\partial z_j^\alpha\right)$$

T_zM یک فضای برداری مختلط است یعنی $T_zM \cong \mathbb{C}^n$. مجموعه $TM = \cup_{z\in M} T_zM$ کلاف مماس M نامیده می‌شود. $\bar{TM}$ کلاف مماس مزدوج M نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۲. [۲۵، صفحه‌ی ۸۳] نقشه موضعی (z_j^ν) بر خمینه مختلط M را در نظر گیرید. یک متریک هرمیتی بر M چنین تعریف می‌شود

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{j\alpha\bar{\beta}}(z) dz_j^\alpha d\bar{z}_j^\beta$$

که $g_{j\alpha\bar{\beta}}(z)$ یک برش هموار $T^* \bigotimes \bar{T}^*$ است .

۱. $\overline{g_{j\alpha\bar{\beta}}(z)} = g_{j\beta\bar{\alpha}}(z)$ (تقارن هرمیتی)

۲. $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{j\beta\bar{\alpha}}(z) \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta \geq 0$

و برابری درست است اگر و تنها اگر $\zeta = 0$ (مثبت معین بودن) .

قضیه ۷.۱.۲. [۲۵] هر خمینه مختلط یک متریک هرمیتی می‌پذیرد.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{U} = \{U_j\}$ یک پوشش موضعی باپایان M باشد. و U_j ها نقشه M باشند و $(z_j^1, ..., z_j^1)$ یک مختصات موضعی بر U_j باشد. بر هر U_j متریک اقلیدسی

$$\sum_{\lambda=1}^{n} dz_j^\lambda d\bar{z}_j^\lambda = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$$

را در نظر گیرید. فرض کنید $\{\rho_j\}$ پارش یکا بر $\mathcal{U}$ باشد پس

$$\overline{\{z \mid \rho_j(z) > 0\}} \subset U_j$$

تعریف کنید

$$ds^2 = \sum_j \rho_j(z) \left(\sum_{\lambda=1}^{n} dz_j^\lambda d\bar{z}_j^\lambda \right)$$

نشان می‌دهیم متریک تعریف شده یک متریک هرمیتی بر M است. بر U_k داریم:

$$ds^2 = \sum_{j,\lambda} \rho_j(z) \left(\frac{\partial z_j^\lambda}{\partial z_k^\alpha} dz_k^\alpha \ \overline{\frac{\partial z_j^\lambda}{\partial z_k^\beta}} d\bar{z}_k^\beta \right)$$

کافی است قرار دهیم

$$g_{k\alpha\bar{\beta}}(z) = \sum_{j,\lambda} \rho_j(z) \left(\frac{\partial z_j^\lambda}{\partial z_k^\alpha}\right) \left(\overline{\frac{\partial z_j^\lambda}{\partial z_k^\beta}}\right)$$

توجه کنید هرگاه $\zeta \neq 0$ ، داریم

$$\sum_{\alpha,\beta,\lambda} \left(\frac{\partial z_j^\lambda}{\partial z_k^\alpha}\right) \left(\overline{\frac{\partial z_j^\lambda}{\partial z_k^\beta}}\right) \zeta^\alpha \zeta^{\bar{\beta}} = |\sum_{\alpha,\lambda=1} \frac{\partial z_j^\lambda}{\partial z_k^\alpha} \zeta^\alpha|^2 > 0$$

بنابراین ds^2 مثبت معین است. □

تعریف ۸.۱.۲. (۱،۱)- فرم وابسته به ds^2 را چنین تعریف کنید:

$$\omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{j\alpha\bar{\beta}}(z) dz_j^\alpha \wedge d\bar{z}_j^\beta$$

که $i = \sqrt{-1}$. هرگاه $d\omega = 0$ ، متریک $ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{j\alpha\bar{\beta}}(z) dz_j^\alpha d\bar{z}_j^\beta$ را متریک کیلری ، ω را فرم کیلری و خمینه‌ی مختلط M خمینه کیلری نامیده می‌شود.

نکته ۹.۱.۲. ω یک فرم حقیقی است زیرا

$$\bar{\omega} = -i \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \overline{g_{j\alpha\bar{\beta}}} d\bar{z}_j^\alpha \wedge dz_j^\beta = i \sum_{\alpha,\beta=1} g_{j\beta\bar{\alpha}} dz_j^\beta \wedge dz_j^{\bar{\alpha}} = \omega$$

متریک کیلری پایین به متریک برگمن معروف است

$$g = \sum_{\alpha,\beta}^{n} g_{\alpha,\beta}(z) dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta$$

که

$$g_{\alpha,\beta} = \partial\bar{\partial} \log(1 - \sum_{\alpha=1}^{n} | z |^2)$$

$$\bar{\partial} \log(1 - \sum_{\alpha=1}^{n} | z |^2) = \frac{\sum z^\alpha d\bar{z}^\alpha}{1 - \sum | z^\alpha |^2}$$

و

$$\partial\bar{\partial} \log(1 - \sum_{\alpha=1}^{n} | z |^2) = \frac{\sum dz^\alpha d\bar{z}^\alpha}{1 - \sum | z |^2} - \frac{\sum \bar{z}^\beta dz^\beta \wedge \sum z^\alpha d\bar{z}^\alpha}{(1 - \sum | z |^2)^2}$$

قضیه بعد نشان می‌دهد که گوی واحد مختلط که مدلی از فضای مختلط هذلولوی است خمینه‌ای کیلری با خمیدگی برشی تمام‌ریخت -1 است.

قضیه ۱۰.۱.۲. [۲۰، صفحه‌ی ۱۶۹] برای هر $c < 0$

$$D^n = \left\{ (z^1, ..., z^n) \in \mathbb{C}^n \quad | \quad \sum z^\alpha \bar{z}^\alpha < 1 \right\}$$

یک متریک کیلری کامل با خمیدگی برشی تمام‌ریخت c می‌پذیرد. نسبت به مختصات موضعی $(z^1, ..., z^n)$ این متریک چنین تعریف می‌شود

$$ds^2 = \frac{4}{c} \frac{\left(1 - \sum z^\alpha \bar{z}^\alpha\right) \left(\sum dz^\alpha d\bar{z}^\alpha\right) - \left(\sum \bar{z}^\alpha dz^\alpha\right) \left(\sum z^\alpha d\bar{z}^\alpha\right)}{\left(1 - \sum z^\alpha \bar{z}^\alpha\right)^2}$$

۲.۲ توزیع و قضیه فروبینیوس

فرض کنید M یک خمینه ریمانی و $\mathcal{H}$ زیرکلاف برداری هموار TM باشد آنگاه $\mathcal{H}$ یک توزیع بر M نامیده می‌شود. گوییم توزیع $\mathcal{H}$ بر M انتگرال‌پذیر است هرگاه برای هر $p \in M$ زیرخمینه همبند $L_p \subset M$ چنان یافت شود که برای هر $q \in L_p$ ، $T_qL_p = \mathcal{H}_q$. در این حالت L_p خمینه انتگرال $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود. توزیع $\mathcal{H}$ برگشتی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $X, Y \in \mathcal{H}$ ، $[X, Y] \in \mathcal{H}$.

گزاره ۱.۲.۲. [۲۱] هر توزیع انتگرال پذیر برگشتی است.

قضیه ۲.۲.۲ ([۲۱]فربینیوس). هر توزیع برگشتی انتگرال‌پذیر است.

بنابراین توزیع $\mathcal{H}$ انتگرال‌پذیر است اگروتنهااگر برگشتی باشد. هرگاه $\mathcal{H}$ انتگرال‌پذیر باشد برای هر $p \in M$ یک زیرخمینه انتگرال بیشین $\mathcal{H}$ یافت می‌شود که برگ $\mathcal{H}$ شامل p نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. [۳] فرض کنید M یک خمینه ریمانی و $\bar{\nabla}$ هموستار لوی‌چویتا بر آن باشد. توزیع $\mathcal{H}$ بر M را خودموازی گویند هرگاه $\bar{\nabla}_{\mathcal{H}}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ یعنی برای هر $X, Y \in \mathcal{H}$ میدان برداری $\bar{\nabla}_X Y$ بر $\mathcal{H}$ مماس باشد.

نکته ۴.۲.۲. قضیه فربینیوس نتیجه می‌دهد که هر توزیع خودموازی انتگرال‌پذیر است. اگر ∇ هموستار خمینه انتگرال باشد با توجه به فرمول $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$ یک توزیع انتگرال‌پذیر خودموازی است اگروتنهااگر برگهای آن زیرخمینه‌های تماما ژئودزیک M باشند.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید M یک خمینه n- بعدی باشد. یک برگ‌بندی k- بعدی بر M عبارت است از مجموعه زیرخمینه‌های k- بعدی نشانده‌شده ، همبند و مجزای M که برگ برگ‌بندی نامیده می‌شوند و M را می‌پوشانند و در یک همسایگی هر $p \in M$ نقشه‌ی $(U, (x^i))$ چنان یافت شود که یا اشتراک U با هر برگ تهی باشد یا اجتماع شمارایی از برشهای k- بعدی به شکل $x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n$ باشد. چنین نقشه‌ای یک نقشه‌ی تخت برای برگ‌بندی نامیده می‌شود.

لم ۶.۲.۲. [۲۱] فرض کنید $\mathcal{F}$ یک برگ‌بندی بر خمینه هموار M باشد. گردایه فضای مماس برگ‌های $\mathcal{F}$ یک توزیع برگشتی بر M تشکیل می‌دهند.

قضیه ۷.۲.۲. [۲۱] فرض کنید D توزیعی k- بعدی و برگشتی بر خمینه هموار M باشد آنگاه گردایه‌ی خمینه‌های انتگرال همبند و بیشین D یک برگ‌بندی بر M تشکیل می‌دهند.

۳.۲ فضای هذلولوی حقیقی

$\mathbb{R}^{n+1}$ به همراه فرم دو خطی و متقارن پایین را با $\mathbb{R}^{n,1}$ نشان می‌دهیم:

$$u = (u_1, ..., u_{n+1}) \text{ و } v = (v_1, ..., v_{n+1})$$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - u_{n+1}v_{n+1}$$

فرم درجه‌دو وابسته به $\langle ., .\rangle$ ناتبهگون است.

برای $v \in \mathbb{R}^{n,1}$ تعریف کنید:

$$v^{\perp} = \left\{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, v\rangle = 0\right\}$$

$v^{\perp}$ زیر فضای برداری n- بعدی $\mathbb{R}^{n,1}$ می‌باشد.

لم ۱.۳.۲. اگر $\langle v, v\rangle < 0$ آن‌گاه تحدید فرم درجه‌دو به $v^{\perp}$ مثبت و معین می‌باشد .

تعریف ۲.۳.۲. فضای هذلولوی حقیقی n- بعدی که با $\mathbb{R}H^n$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R}H^n = \left\{u = (u_1, ..., u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, u\rangle = -1\ ,\ u_{n+1} > 0\right\}$$

توجه کنید که اگر $u \in \mathbb{R}H^n$ آن‌گاه $u_{n+1} \geq 1$ و $u_{n+1} = 1$ هرگاه برای هر $i = 1, ..., n$ ، $u_i = 0$.

نکته ۳.۳.۲. برای هر $u, v \in \mathbb{R}H^n$ داریم $\langle u, v\rangle \leq -1$ و $\langle u, v\rangle = -1$ اگر و تنها اگر $u = v$.

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - u_{n+1}v_{n+1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} - u_{n+1}v_{n+1}$$
$$= \left(u_{n+1}^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(v_{n+1}^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} - u_{n+1}v_{n+1} \leq -1$$

همچنین $\langle u - v, u - v\rangle \geq 0$.

گزاره ۴.۳.۲. تعریف کنید

$$d : \mathbb{R}H^n \times \mathbb{R}H^n \to \mathbb{R}$$

$$\cosh d\,(A, B) = -\langle A, B\rangle \qquad \forall\ A, B \in \mathbb{R}H^n$$

آن‌گاه d یک متریک بر $\mathbb{R}H^n$ تعریف می‌کند.

اثبات. نکته‌ی (۳.۳.۲) نشان می‌دهد d خوش‌تعریف است. آشکارا d متقارن است. نابرابری مثلثی از قانون کسینوس هذلولوی به دست می‌آید که در ادامه گفته می‌شود. □

۴.۲ $\mathbb{R}H^n$ به عنوان زیر خمینه $\mathbb{R}^{n,1}$

نگاشت هموار

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$
$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2$$

را در نظر گیرید. داریم $Df = [2x_1, ..., 2x_n, -2x_{n+1}]$ پس رتبه f بر $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ برابر یک است و بنا به قضیه رتبه $\mathbb{R}H^n$ برابر یک مولفه از $f^{-1}(-1)$ ، زیر خمینه $\mathbb{R}^{n,1}$ (با نقص‌بعد یک) است.

۵.۲ فضای مماس $\mathbb{R}H^n$ در هر نقطه

$$\begin{aligned} T_x f^{-1}(-1) =& Ker T_x f = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad T_x f(v) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \sum_{i=1}^{n} x_i v_i - x_{n+1} v_{n+1} = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \langle x, v \rangle = 0 \right\} \end{aligned}$$

بنابراین فضای مماس $\mathbb{R}H^n$ در نقطه $x \in \mathbb{R}H^n$ با $x^\perp$ یکسان است.

گزاره ۱.۵.۲. فرض کنید $x \in \mathbb{R}H^n$ $y \in T_x\mathbb{R}H^n$ و $\langle y, y \rangle = 1$. ژئودزیک γ در $\mathbb{R}H^n$ چنانچه $\gamma(0) = x$ و $\gamma'(0) = y$ عبارت است از خم $t \mapsto x\cosh(t) + y\sinh(t)$ که از تقاطع $\mathbb{R}H^n$ با زیر فضای خطی $\mathbb{R}^{n+1}$ تولید شده توسط x, y به دست می آید.

اثبات. فرض کنید W صفحه تولید شده با x, y و γ ژئودزیک بیشین با شروع از x و بردار سرعت نخست y باشد. $\phi \in O(n,1)$ را چنان بگیرید که $\mathbb{R}H^n$ را نگه دارد و $\phi \mid_W = id$ و $\phi \mid_W^\perp = -id$ چون $\phi(x) = x$ و $d_x\phi(y) = y$ ، ϕ ، γ را نگه می‌دارد. بنابرین $\gamma \subset W \cap \mathbb{R}H^n$. از سویی $t \mapsto x\cosh(t) + y\sinh(t)$ یک باز پرمایش $W \cap \mathbb{R}H^n$ با سرعت یکه می‌باشد. زیرا اگر $ax + bz \in W \cap \mathbb{R}H^n$ ، پس $\langle ax + bz, ax + bz \rangle = -1$ از طرفی $\langle ax + bz, ax + bz \rangle = b^2 - a^2$ و با بازپرمایش $b = \cosh t$ و $a = \sinh t$ حکم برقرار است. □

گزاره (۱.۵.۲) نشان می دهد هر ژئودزیک $\mathbb{R}H^n$ بر $\mathbb{R}$ تعریف می شود. از قضیه هاف-رینو داریم:

لم ۲.۵.۲. $\mathbb{R}H^n$ یک خمینه ریمانی کامل می باشد.

به عنوان نتیجه دیگری از گزاره (۱.۵.۲) داریم:

لم ۳.۵.۲. فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}H^n$ در این صورت قطعه ژئودزیکی که x را به y وصل می کند یکتاست.

تعریف ۴.۵.۲. فرض کنید $a > 0$ و $A \in \mathbb{R}H^n$ و $u \in A^{\perp}$ و $\langle u, u \rangle = 1$ و γ یک ژئودزیک بر $\mathbb{R}H^n$ که $\gamma(0) = A$. $\gamma([0, a])$ را قطعه هذلولوی نامند و با $[A, \gamma(a)]$ نشان می دهیم. فرض کنید $A, B, C \in \mathbb{R}H^n$ و α, β دو ژئودزیک در $\mathbb{R}H^n$ باشند چنانکه $\alpha(0) = \beta(0) = A$ و $\alpha'(0) = u$ و $\beta'(0) = v$ همچنین α بر B و β بر C می‌گذرد. زاویه هذلولوی بین دو قطعه هذلولوی $[A, B]$ و $[A, C]$ عبارت است از عدد یکتای $\varphi \in [0, \pi)$ چنانکه $\cos\varphi = \langle u, v \rangle$. مثلث هذلولوی Δ در $\mathbb{R}H^n$ شامل سه نقطه مجزای $A, B, C \in \mathbb{R}H^n$ (به عنوان راس) و سه قطعه هذلولوی گذرنده بر سه نقطه است.

گزاره ۵.۵.۲. (قانون کسینوس هذلولوی) فرض کنید Δ یک مثلث هذلولوی با راسهای A و B و C باشد. قرار دهید $b = d(C, A)$ و $a = d(B, C)$ و$c = d(A, B)$ که d متریک تعریف شده در گزاره ۴.۳.۲ می‌باشد. فرض کنید θ زاویه بین قطعه‌های $[C, A]$ و$[C, b]$ باشد ، آنگاه

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh b \sinh b \cos\theta.$$

پی‌آمد ۶.۵.۲. نامساوی مثلثی: برای هر $A, B, C \in \mathbb{R}H^n$ داریم :

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر C بر قطعه هذلولوی $[A, B]$ قرار داشته باشد.

۶.۲ فضای هذلولوی مختلط $\mathbb{C}H^1$

فرم هرمیتی پایین را بر $\mathbb{C}^2$ را در نظر گیرید

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_2$$

که $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ و $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$. چون $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$ حقیقی است مجموعه‌های پایین را در نظر بگیرید

$$V_- = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0\}$$
$$V_0 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \quad | \quad \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0\}$$
$$V_+ = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle > 0\}$$

بردارهای هریک از این مجموعه‌ها را به ترتیب زمان‌گون، نورگون و فضاگون نامند. برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $\langle \lambda\mathbf{z}, \lambda\mathbf{z} \rangle = |\lambda|^2 \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$ پس $\lambda\mathbf{z}$ زمان‌گون، نورگون و فضاگون است اگر وتنها اگر $\mathbf{z}$ چنین باشد.

$$\mathbb{CP}^1 = \{[\mathbf{z}] \ | \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \, , \ \mathbf{z} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{z} = \lambda \mathbf{w} \, , \ \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

نگاشت تصویری پایین را در نظر گیرید

$$\mathbb{P} : \mathbb{C}^2 - \{0\} \to \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$$
$$(z_1, z_2) \mapsto \begin{cases} z_1/z_2 & z_2 \neq 0 \\ \infty & z_2 = 0 \end{cases}$$

مدل تصویری $\mathbb{C}H^1$ چنین تعریف می‌شود

$$\mathbb{C}H^1 = \{[\mathbf{z}] \in \mathbb{CP}^1 \ | \ \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0\}$$

و مرز آن را مجموعه

$$\{[\mathbf{z}] \in \mathbb{CP}^1 \ | \ \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0\}$$

در نظر می‌گیریم.

اکنون مدل دیگری از این فضا، که مدل گوی نامیده می‌شود تعریف می‌شود.

$$D = \{z \in \mathbb{C} \ | \ z\bar{z} < 1\}$$

اگر قرار دهیم $\mathbf{z} = (z, 1)$ و $\mathbf{w} = (w, 1)$ که $z, w \in \mathbb{C}$ داریم

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = z\bar{z} - 1 < 0$$