وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

تعمیمی از اصل انقباضی باناخ که فضاهای متری کامل را مشخص سازی می کند

توسط:

فاطمه مجدی

استاد راهنما:

آقای دکتر مرتضی ابطحی ایوری

استادان مشاور:

آقای دکتر مجید میرزاوزیری

آقای دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

تعمیمی از اصل انقباضی باناخ که فضاهای متری کامل را مشخص سازی می کند

توسط:

فاطمه مجدی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر مرتضی ابطحی ایوری استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر مجید میرزاوزیری دانشیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد (استاد مشاور)

دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سید علی تقوی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز-هندسه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم،

که راه و رسم زندگیم آموختند، آنان که مظهر صبر، ایمان، عشق و استقامت هستند و آفتاب مهرشان در آستانه قلبم همچنان پابرجاست و هرگز غروب نخواهد کرد.

سپاسگزاری

پروردگارم! چگونه سپاست گویم، که چرخش زبان به سپاس، خود نیازمند سپاسی دیگر است.

از دو الهه عشق و مهربانی پدر بزرگوار و مادر فداکارم سپاسگزارم و بر دستان پر مهرشان بوسه می زنم.

از همراهان دیروز و امروزم خواهر و برادران عزیزم که وجودشان گرما بخش لحظه لحظه ی زندگی ام بوده تشکر و قدردانی می کنم.

صادقانه ترین سپاس ها را به استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر ابطحی تقدیم می کنم که شاگردی در مکتب ایشان مایه مباهات من است.

از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر میرزاوزیری و جناب آقای دکتر عباسپور که قبول زحمت کردند و در امر مشاوره ی پایان نامه یاری ام کردند صمیمانه سپاسگذارم.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر تقوی و جناب آقای دکتر رمضانپور که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از تمام دوستانم به خصوص خانم حسینی خواه صمیمانه سپاسگذارم.

فاطمه مجدی

شهریور ۹۱

چکیده

تعمیمی از اصل انقباضی باناخ که فضاهای متری کامل را مشخص سازی می کند

به وسیله‌ی:
فاطمه مجدی

قضیه نقطه ثابت باناخ بیان می‌کند که اگر (X,d) یک فضای متری کامل و $T : X \to X$ یک انقباض باشد به این معنی که وجود دارد $r \in [0,1)$ به‌طوری‌که $d(Tx,Ty) \leq rd(x,y)$ برای هر $x,y \in X$، آن‌گاه T دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشد. حال اگر (X,d) یک فضای متری باشد به‌طوری‌که هر انقباض $T : X \to X$ دارای یک نقطه ثابت باشد، آیا X کامل است؟ بخشی از این پایان‌نامه به پاسخ دادن به این پرسش اختصاص دارد. مثالی ارائه می‌شود که نشان می‌دهد عکس قضیه نقطه ثابت باناخ برقرار نیست. بنابراین این قضیه نمی‌تواند فضاهای متری کامل را مشخص سازی کند. سپس تعمیمی از قضیه نقطه ثابت باناخ اثبات می‌شود که خاصیت کامل بودن فضاهای متری را مشخص سازی می‌کند. در ادامه پایان‌نامه به بیان تعمیم‌هایی از قضیه نقطه ثابت کانان می‌پردازیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

قضیه نقطه ثابت باناخ یک قضیه بسیار ساده و موثر است که اولین بار در سال ۱۹۲۲ در پایان‌نامه شخصی به نام استفان باناخ ظاهر شد. این قضیه یک ابزار کلاسیک در آنالیز غیرخطی می‌باشد و تعمیم های بسیاری دارد که می‌توان تعمیم‌های این قضیه را در [۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۷، ۱۸، ۲۱، ۲۲، ۲۹، ۳۰، ۳۱] مشاهده کرد. از طرف دیگر شخصی به نام کانل در سال ۱۹۵۹ مثالی از یک فضای متری X بیان کرد به‌طوری‌که X یک فضای متری کامل نیست ولی هر نگاشت پیوسته روی X دارای نقطه ثابت است [۸]. این نشان می‌دهد که قضیه نقطه ثابت باناخ نمی‌تواند فضاهای متری کامل را مشخص سازی کند بنابراین می‌توان گفت شرط انقباض در این قضیه یک شرط قوی می‌باشد.

در سال ۱۹۶۹ شخصی به نام کانان به معرفی نگاشت کانان پرداخت و ثابت کرد که اگر X یک فضای متری کامل باشد آن‌گاه هر نگاشت کانان دارای نقطه ثابت است. نکته قابل توجه آن است که قضیه نقطه ثابت کانان توسیعی از قضیه نقطه ثابت باناخ نمی‌باشد و از نظر بسیاری از ریاضیدانان قضیه نقطه ثابت کانان بسیار مهم‌تر از قضیه نقطه ثابت باناخ است زیرا در سال ۱۹۷۵ شخصی به نام سابراهمانیام ثابت کرد که قضیه نقطه ثابت کانان فضاهای متری کامل را مشخص سازی می کند به این معنی که فضای متری X کامل است اگر و فقط اگر هر نگاشت کانان روی X دارای نقطه ثابت باشد[۲۸]. ریاضیدانان بسیاری فضاهای متری کامل را مورد مطالعه قرار داده‌اند برای مثال کایرک در [۱۶] اثبات کرد که قضیه نقطه ثابت کاریستی [۵، ۶]، فضاهای متری کامل را مشخص سازی می کند و برای دیدن نتایج مشابه می‌توان به [۹، ۱۳، ۲۳، ۲۴، ۳۳] مراجعه کرد. در این پایان‌نامه تعمیمی جدید و خیلی ساده از قضیه نقطه ثابت باناخ را بیان می کنیم که توسط شخصی به نام سوزوکی در سال ۲۰۰۸ بیان شد که فضای متری کامل را مشخص سازی می کند.

در فصل اول به یاد آوری مفاهیم فضاهای متری، فضاهای متری کامل و بیان قضیه نقطه ثابت باناخ و تعمیم‌های این قضیه می‌پردازیم.

در فصل دوم به بیان مثالی می‌پردازیم که نشان می‌دهد قضیه نقطه ثابت باناخ نمی‌تواند فضاهای متری را مشخص سازی کند و سپس تعمیم سوزوکی از قضیه نقطه ثابت باناخ را بیان می‌کنیم که با ضعیف کردن شرط انقباض منجر به مشخص سازی فضای متری کامل می‌شود. در پایان این فصل تعمیم سوزوکی از قضیه نقطه ثابت میر-کیلر را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم قضیه نقطه ثابت کانان را معرفی و مثال‌هایی را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد انقباض‌های معرفی شده در تعمیم سوزوکی از قضیه نقطه ثابت باناخ که انقباض‌های معمولی را نیز در برمی‌گیرد با نگاشت‌های کانان متفاوت هستند و در پایان فصل به بیان تعمیم‌های قضیه نقطه ثابت کانان از نوع سوزوکی می‌پردازیم.

در این پایان‌نامه بیشتر از مراجع [۱۲] و [۱۵] و [۳۲] استفاده شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

هدف ما در این فصل آشنایی با مسئله وجود و یکتایی نقطه ثابت برای یک نگاشت $T : X \to X$ می‌باشد که در آن X یک فضای متری است، برای این منظور به یاد آوری مفهوم فضاهای متری و فضاهای متری کامل می‌پردازیم و در ادامه مفهوم نگاشت انقباض و قضیه نقطه ثابت باناخ را بیان می‌کنیم سپس در پایان چند نمونه از توسیع‌های قضیه نقطه ثابت باناخ را معرفی می‌کنیم. مطالب این فصل بدون اثبات بیان می‌شود و خواننده می‌تواند برای جزئیات بیشتر به منابع [۱]،[۲۵]،[۲۶] مراجعه کند.

در طول این پایان‌نامه منظور از $\mathbb{N}$ مجموعه همه اعداد مثبت و منظور از $\mathbb{R}$ مجموعه همه اعداد حقیقی می‌باشد. به‌علاوه "و" منطقی و "یا" منطقی را به ترتیب با نمادهای "$\wedge$" و "$\vee$" نشان می‌دهیم.

۱-۱ فضاهای متری

ابتدا مفهوم فضاهای متری را یاد آوری می‌کنیم.

فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متریک[۱] یا یک متر روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $d(x, x) = 0$.

(۲) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(۳) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = d(y, x)$.

[۱] Metric

(۴) به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. (نامساوی مثلث[۲])

در صورتی‌که d یک متر روی X باشد (X, d) را یک فضای متریک[۳] می‌نامیم و می‌گوییم فضای X به متر d مجهز شده است.

ملاحظه ۱.۱.۱. اغلب نویسندگان شرط نامنفی بودن متر را به عنوان یکی از خواص اصلی متر معرفی می‌کنند که می‌توان این شرط را به‌راحتی از شرایط (۱) و (۴) نتیجه گرفت. به این‌صوررت که برای هر $x, y \in X$ داریم $d(x,y) + d(y,x) \geq d(x,x)$ بنابراین $۲d(x,y) \geq ۰$ و لذا $d(x,y) \geq ۰$.

حال به بیان چند مثال از فضاهای متری می‌پردازیم.

مثال ۲.۱.۱. قرار می‌دهیم $X = \mathbb{R}^n$ یعنی مجموعه همه n تایی‌های $x = (x_۱, ..., x_n)$ که $x_i \in \mathbb{R}$، برای هر $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=۱}^{n} (x_i - y_i)^۲ \right)^{۱/۲}.$$

آن‌گاه d یک متر روی $\mathbb{R}^n$ است که به متر اقلیدسی معروف است و به $\mathbb{R}^n$ همراه با متر اقلیدسی، فضای اقلیدسی گوییم.

روی یک مجموعه می‌توان مترهای گوناگون تعریف کرد، اگر فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و دلخواه باشد و $d_۱$ و $d_۲$ دو متر روی آن باشند. $d_۱$ و $d_۲$ را معادل[۴] گوییم، هرگاه اعداد مثبتی مانند α و β موجود باشند به قسمی که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\alpha d_۱(x,y) \leq d_۲(x,y) \leq \beta d_۱(x,y).$$

مثال ۳.۱.۱. به‌طور مثال مترهای زیر روی $\mathbb{R}^n$ باهم معادل‌اند.

- $d(x,y) = \max \left\{ |x_i - y_i| : ۱ \leq i \leq n \right\}$,
- $d(x,y) = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{۱/p}, \quad (۱ \leq p < \infty)$,

مثال ۴.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد نگاشت $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را برای هر $x, y \in X$ به‌صورت

$$d(x,y) = \begin{cases} ۱, & x \neq y, \\ ۰, & x = y. \end{cases}$$

[۲] Triangle Inequality

[۳] Metric Space

[۴] Equivalent

تعریف می‌کنیم. آن‌گاه d یک متر روی X است که به آن متر گسسته[۵] گویند.

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و دلخواه باشد. هر تابع $x : \mathbb{N} \to X$ که $n \mapsto x_n$، یک دنباله[۶] در X نام دارد که آن‌را با نماد (x_n) یا $\{x_n\}$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین اگر $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابعی اکیدا صعودی باشد، تابع $y : \mathbb{N} \to X$ با ضابطه $y(n) = x_{h(n)}$ را زیردنباله‌ای از x گوییم.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $B(X)$ مجموعه همه توابع کران‌دار $f : X \to \mathbb{R}$ باشد. برای هر $f, g \in B(X)$ تعریف می‌کنیم

$$d(f,g) = \sup \Big\{ \big| f(x) - g(x) \big| : x \in X \Big\}. \qquad (۱.۱)$$

چون f و g کران‌دار هستند پس $d(f,g) < \infty$. به آسانی می‌توان دید تابع تعریف شده d در (۱.۱) یک متر روی $B(X)$ است. حالت خاص این مثال زمانی است که $X = \mathbb{N}$، دراین‌صورت $B(X)$ را با l^∞ نشان می‌دهیم و عبارت است از مجموعه همه دنباله‌های (x_n) از اعداد حقیقی به‌طوری‌که

$$\sup \big\{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \big\} < \infty.$$

مثال ۶.۱.۱. فرض کنیم $۱ \leq p < \infty$. l^p را مجموعه همه دنباله‌های (x_n) از اعداد حقیقی قرار می‌دهیم به‌طوری‌که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

برای دو عضو $x = (x_n)$ و $y = (y_n)$ از l^p تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{۱/p}.$$

آن‌گاه d یک متر روی l^p است.

فضاهای نرم‌دار حالت خاصی از فضاهای متری هستند. ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ یک نرم[۷] است اگر شرایط زیر را داشته باشد.

(۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

(۲) برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

[۵] Discrete Metric

[۶] Sequence

[۷] Norm

(۳) برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

آن‌گاه به $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار[۸] گوییم. حال اگر تعریف کنیم $d(x,y) = \|x - y\|$ آن‌گاه X همراه با d یک فضای متری است.

مثال ۷.۱.۱. فضای l^∞ معرفی شده در مثال ۵.۱.۱ با نرم زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

مثال ۸.۱.۱. فضای l^p معرفی شده در مثال ۶.۱.۱ با نرم زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p \right)^{۱/p}.$$

۱–۲ فضاهای متری کامل

فرض کنیم (X, d) یک فضای متری و (x_n) یک دنباله در X باشد. نقطه $x \in X$ حد[۹] دنباله (x_n) نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد مثبت N موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $n > N$ داشته باشیم $d(x_n, x) < \varepsilon$. در این حالت گوییم دنباله (x_n) همگرا[۱۰] به x است و می‌نویسیم $x_n \to x$ و هم‌چنین می‌توان مشاهده کرد که حد دنباله همواره یکتا است.

مثال ۱.۲.۱. مجموعه X را به متر گسسته که در مثال ۴.۱.۱ بیان شد مجهز می‌کنیم. فرض کنیم (x_n) یک دنباله در X باشد که به نقطه $x \in X$ همگراست. قرار می‌دهیم $\varepsilon = ۱/۲$. دراین‌صورت عدد N موجود است به‌طوری‌که برای هر $n > N$ داریم $d(x_n, x) < ۱/۲$. اما در فضای متری گسسته $d(x_n, x) < ۱/۲$ اگر و فقط اگر $d(x_n, x) = ۰$ اگر و فقط اگر $x_n = x$. بنابراین برای هر $n \geq N$ باید $x_n = x$، یعنی از یک جایی به بعد دنباله با یک مقدار ثابت برابر می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد، دنباله (x_n) در X یک دنباله کوشی[۱۱] نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد مثبت N وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $n, m > N$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

---

[۸] Normed Space

[۹] Limit

[۱۰] Converges

[۱۱] Cauchy

به‌راحتی می‌توان نشان داد که هر دنباله همگرا در فضاهای متری، یک دنباله کوشی است [۲۶]. ولی عکس این مطلب صحیح نمی‌باشد یعنی می‌توان دنباله‌ای یافت که کوشی است ولی همگرا نیست.

مثال ۱.۲.۳. قرار می‌دهیم $X = (0, 1)$ و برای هر $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم $d(x, y) = |x - y|$. حال دنباله $(1/n)$ را در X درنظر می‌گیریم چون در فضای $\mathbb{R}$، $1/n \to 0$ بنابراین $(1/n)$ یک دنباله کوشی است اما در X همگرا نیست زیرا $0 \notin X$.

تعریف ۱.۲.۴. فضای متری (X, d)، کامل[۱۲] نامیده می‌شود اگر هر دنباله کوشی در X همگرا به نقطه‌ای در X باشد.

ملاحظه ۱.۲.۵. فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ را فضای باناخ[۱۳] گوییم هرگاه نسبت به متر تعریف شده $d(x, y) = \|x - y\|$ یک فضای متری کامل باشد.

مثال ۱.۲.۶. فضاهای l^pو l^∞، فضای باناخ هستند.

برای حل این مثال به مرجع [۱۹] صفحه ۶۱ مراجعه شود.

۱-۳ قضیه نقطه ثابت باناخ وتعمیم‌هایی از آن

قضیه نقطه ثابت باناخ، معمولا با اصل انقباض باناخ شناخته می‌شود و یکی از مهم‌ترین قضایا در آنالیز ریاضی است. این قضیه به فرم روشنی در پایان‌نامه مربوط به استفان باناخ[۱۴] در سال ۱۹۲۲ ظاهر شد که برای اثبات وجود جواب، برای یک معادله انتگرال مورد استفاده قرار گرفته بود. این قضیه کاربردهای فراوانی در ریاضیات و به‌ویژه در آنالیز دارد.

در ابتدا مفهوم نقطه ثابت را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. نقطه $x_0 \in X$ را یک نقطه ثابت[۱۵] T نامیم، اگر $T(x_0) = x_0$.

مثال ۱.۳.۲. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $T : X \to X$ به‌صورت $T(x) = x + \sin \pi x$ تعریف شده باشد دراین‌صورت T دارای بی‌نهایت نقطه ثابت می‌باشد.

[۱۲] Complete

[۱۳] Banach Space

[۱۴] Stefan Banach

[۱۵] Fixed Point

مثال ۳.۳.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و d متر اقلیدسی روی X باشد. $T : X \to X$ را به‌صورت $T(x) = \cos(x)$ تعریف می‌کنیم آن‌گاه T یک نقطه ثابت دارد.

مثال ۴.۳.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $T : X \to X$ به‌صورت $T(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ تعریف شده باشد. دراین‌صورت T روی X نقطه ثابت ندارد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای متریک با متر d باشد. نگاشت $T : X \to X$ را لیپ‌شیتس[16] نامیم، هرگاه $k \geq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

کوچکترین k ای که در رابطه فوق صدق کند را ثابت لیپ‌شیتس نگاشت T می‌نامیم و آن‌را با $k(T)$ نشان می‌دهیم و از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$k(T) = \sup\left\{\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y\right\} < \infty.$$

اگر $k(S)$ و $k(T)$ به‌ترتیب ثابت‌های لیپ‌شیتس نگاشت‌های S و T باشند آن‌گاه

$$k(T \circ S) \leq k(T)k(S),$$

که در آن $T \circ S(x) = T(Sx)$ و به‌ویژه

$$k(T^n) \leq k^n(T), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

که $T^n x = T(T^{n-1}x)$. چنانچه $T : X \to X$ یک نگاشت لیپ‌شیتس باشد و $k(T) < 1$، به T یک نگاشت انقباضی[17] یا یک انقباض گوییم و اگر $k(T) = 1$، دراین‌صورت نگاشت T را یک نگاشت غیرانبساطی[18] نامیم.

قضیه ۶.۳.۱ (قضیه نقطه ثابت باناخ[19] [۲]). *فرض کنیم X یک فضای متری کامل و $T : X \to X$ یک انقباض روی X باشد، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

از آن‌جایی‌که قضیه نقطه ثابت باناخ مهم‌ترین موضوع این پایان‌نامه است اثبات آن‌را بیان می‌کنیم.

[16] Lipschitz

[17] Contraction Mapping

[18] Non-Expansive Mapping

[19] Banach Fixed Point Theorem

اثبات. $x_0 \in X$ را ثابت می‌گیریم و دنباله $(x_n) \in X$ را به‌صورت $x_n = T^n x_0$ تعریف می‌کنیم که $n = 0, 1, \ldots$. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x_0, x_1),$$

بنابراین برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ که $m > n$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \big[k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n-1}\big] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

از آن‌جایی‌که $k < 1$ وقتی $n \to \infty$ آن‌گاه $\frac{k^n}{1-k} \to 0$ و این نشان می‌دهد که (x_n) یک دنباله کوشی است. از آن‌جایی‌که X کامل است، $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ که نتیجه می‌شود

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

بنابراین داریم $T(x) = x$. حال اثبات می‌کنیم که نقطه ثابت یکتا است. به برهان خلف فرض می‌کنیم $x, y \in X$ دو نقطه ثابت از نگاشت T باشند به‌طوری‌که $x \neq y$ آن‌گاه داریم

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

که نتیجه می‌شود $d(x, y) = 0$ و داریم $x = y$ که با فرض در تناقض است. بنابراین نقطه ثابت یکتا است. $\square$

مثال ۱.۳.۷. نگاشت f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &(x, y, z) \longmapsto \Big(\frac{\cos y}{4}, \frac{\cos z}{3} + 1, \frac{\cos x}{5} + 2\Big) \end{aligned}$$

و نشان می‌دهیم f یک نقطه ثابت یکتا دارد.

باید نشان دهیم برای هر دو عضو (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) از $\mathbb{R}^3$، وجود دارد $k < 1$ به‌طوری‌که $d\big(f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2)\big) \leq kd\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big)$. در این‌جا از این حقیقت که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ استفاده می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&d\big(f(x_1,y_1,z_1),f(x_2,y_2,z_2)\big)\\
&\quad=d\bigg(\Big(\frac{\cos y_1}{4},\frac{\cos z_1}{3}+1,\frac{\cos x_1}{5}+2\Big),\Big(\frac{\cos y_2}{4},\frac{\cos z_2}{3}+1,\frac{\cos x_2}{5}+2\Big)\bigg)\\
&\quad=\sqrt{\Big(\frac{\cos y_1}{4}-\frac{\cos y_2}{4}\Big)^2+\Big(\frac{\cos z_1}{3}-\frac{\cos z_2}{3}\Big)^2+\Big(\frac{\cos x_1}{5}-\frac{\cos x_2}{5}\Big)^2}\\
&\quad\le\sqrt{\Big(\frac{\cos y_1-\cos y_2}{3}\Big)^2+\Big(\frac{\cos z_1-\cos z_2}{3}\Big)^2+\Big(\frac{\cos x_1-\cos x_2}{3}\Big)^2}\\
&\quad\le\frac{1}{3}\sqrt{(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(x_1-x_2)^2}\\
&\quad=\frac{1}{3}d\big((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\big).
\end{aligned}
$$

نشان دادیم نگاشت f یک انقباض روی $\mathbb{R}^3$ است، بنابراین طبق قضیه نقطه ثابت باناخ نگاشت f یک نقطه ثابت یکتا دارد.

در قضیه نقطه ثابت باناخ، ملاحظه کردیم که اگر نگاشت T یک انقباض روی یک فضای متری کامل X باشد، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا در X دارد. اما هر نگاشتی که یک نقطه ثابت یکتا در یک فضای متری کامل X داشته باشد، لزوما یک انقباض نیست.

مثال ۱.۳.۸. فرض کنیم $X=[0,1]$ و d متر اقلیدسی روی X باشد. نگاشت T روی X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx=1-x,\qquad (x\in X).$$

در این‌صورت، T یک نقطه ثابت یکتای $x=\frac{1}{2}$ دارد اما T یک انقباض نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد در قضیه نقطه ثابت باناخ اگر $k=1$ آن‌گاه قضیه برقرار نیست.

مثال ۱.۳.۹. فرض کنیم $X=\mathbb{R}$ و d متر اقلیدسی روی X باشد. نگاشت $T:X\to X$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx=x+1,\qquad (x\in\mathbb{R}).$$

چون هیچ x ای در $x=x+1$ صدق نمی‌کند بنابراین T نقطه ثابت ندارد اما $k=1$.

بین نگاشت‌های انقباضی و نگاشت‌های غیرانبساطی، دسته دیگری از نگاشت‌ها وجود دارند که آن‌ها را نگاشت‌های انقباضی‌اکید می‌نامیم.