بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

نگاشت‌های ضعیف متروید‌های سه‌سه‌ای

سارا سرائی

گروه ریاضی
مرکز آموزش های نیمه حضوری

خرداد ۱۳۸۸

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:
دکتر حبیب اذانچیلر

پایان نامه آقای/خانم سارا سراں به تاریخ ۸۸/۳/۲۵
شماره ۳-۲۲۳ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ هیجده
قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر حبیب الله نجفی

۲- استاد مشاور : دکتر ——

۳- داور خارجی : دکتر قدرت اله آزادی

۴- داور داخلی : دکتر علی سرباز حسین‌فرا

۵- نمایندده تحصیلات تکمیلی : دکتر محسن اشرف ربانی

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید. و با تشکر از :

استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر اذانچیلر که با زحمات فراوان و سعه صدر خویش در تمامی مراحل این کار همواره مشوق و یاری کننده من بودند.

اساتید گروه ریاضی از جمله جناب آقای دکتر آزادی و تمامی مسئولین محترم دانشگاه که امکانات را برای ایجاد کارشناسی ارشد در گرایش متروید فراهم نموده‌اند.

خانواده عزیزم. بالاخص پدر و مادر بزرگوار و دلسوزم که همواره یاری گر و پشتیبان من در تمامی مراحل زندگی‌ام بوده‌اند.

و تمامی دوستانی که در به پایان رساندن این کار همواره کمک حال من بودند.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

چکیده

فرض کنید M و N ماترویدهای سه‌سه‌ای باشند که دارای رتبه یکسان و مجموعه زمینه یکسان هستند و فرض کنید که هر مجموعه مستقل در N ، در M نیز مستقل باشد . نتیجه اصلی این مقاله ثابت می کند که اگر M، ۳–همبند و N همبند و غیردودویی باشند، آنگاه $M = N$. وقتی یک ماتروید باواهلش یک دور– ابرصفحه از یک ماتروید سه‌سه‌ای بدست می‌آید نیز سه‌سه‌ای است.

پیشگفتار

نوشته‌ای که پیش رو دارید حاصل تلاش و تفحصی است که روی مقاله‌ی « نگاشت های ضعیف ماترویدهای سه‌سه‌ای » نوشته‌ی ویتلی [1] و آکسلی [2] انجام شده است.

نگاشت های ضعیف ساختارهای بسیار عمومی دارند و تعجب آور نیست که نتایج قوی کمی که توصیف کننده رفتار آن ها باشند وجود دارد. یک استثناء بر جسته عبارت است از: توصیف لوکاس از نگاشت های ضعیف ماترویدهای دودویی، او نشان داد که اگر یک ماتروید همبند N، یک تصویر نگاشت ضعیف حافظ رتبه از یک ماتروید دودویی M باشد، آن گاه $M = N$. این مقاله مسئله مشابه را برای ماترویدهای سه‌سه‌ای در نظر می گیرد.

مسئله اصلی که در این پایان نامه بحث خواهد شد این است که:

قضیه: «فرض کنید M و N ماترویدهای سه‌سه‌ای باشند به طوری که N، یک تصویر نگاشت ضعیف حافظ رتبه از M است. اگر M ۳—همبند و N همبند و غیر دودویی باشند، آن گاه $M = N$.»

در نگارش این پایان نامه تلاش کرده‌ایم تا مطلب به ساده ترین صورت بیان شود این پایان نامه در پنج فصل تنظیم شذه است

فصل اول را با ارائه مفاهیم پایه‌ای از نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی ماتروید آغاز می کنیم که پیش نیازی برای ارائه ی مطالب اصلی است.

---

[1] Whittle

[2] Oxley

در فصل دوم پس از معرفی نگاشت های ضعیف و خواص آن به بیان خواص مهم و جالبی از واهلش ها می پردازیم و در بخش آخر از این فصل نیز متروید های سه‌سه‌ای و ویژگی های آنها را مورد بررسی و مطالعه قرار داده و به بیان قضیه اصلی برای شناسایی متروید های سه‌سه‌ای می پردازیم.

در فصل سوم به بررسی حالت ۳ –همبندی متروید N در قضیه ی مورد نظر می پردازیم که در بخش اول و دوم متروید های ۳ – همبند و خواص آن و ۲ – جمع ها را مورد بررسی قرار داده و در بخش آخر با استفاده از لم های کمکی به اثبات ۳ –همبندی قضیه ی اصلی می پردازیم.

در فصل چهارم این پایان نامه در دو حالت و تحت دو بخش صورت گرفته در بخش اول خواصی از ۲– جداساز ها و در بخش آخر به اثبات ۲ – همبندی قضیه می پردازیم.

در فصل آخر این پایان نامه به واهلش متروید های سه‌سه‌ای می پردازیم. در این فصل به دو بخش پرداخته شده است. در بخش اول مثال هایی در مورد قضیه ی اصلی داده شده تا نشان دهد که قضیه کاملاً ممکن است . و در بخش دوم نشان می دهیم که واهلش مترویدهای سه‌سه‌ای ، سه‌سه‌ای است . این پایان نامه بر اساس مقاله‌ی زیر تنظیم گردیده است.

On weak maps of ternary matroids

J. Oxley and G. Whittle

Europ. J. Combinatories (1998) 19, 377-389.

فصل ۱

تعارف و مفاهیم اولیه

در این فصل به برخی از تعاریف و قضایای پایه‌ای مورد نیاز از نظریه‌ی گراف و ماترویدها اشاره می کنیم و از ارائه اثبات قضایا و لم ها در این فصل صرف نظر می کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف [۱] G، سه‌تایی [۲] متشکل است از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$ و یک مجموعه‌ی $E(G)$ به همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می کند. اعضای $V(G)$ را رأس‌های گراف، و اعضای $E(G)$ را یال‌های گراف می نامند. اگر $e = uv$ یک یال از گراف G باشد، آن‌گاه u و v را نقاط انتهایی [۳] آن یال نامیم. علاوه بر این u و v را دو رأس مجاور [۴] نیز می نامیم.

اگر نقاط انتهایی یالی بر هم منطبق باشند، آن گاه آن یال را یک طوقه [۵] گویند.

---

[۱] graph
[۲] triple
[۳] End points
[۴] Adjacent
[۵] loop

اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آن‌گاه آن دو یال را یال های موازی [۶] می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ گراف فاقد طوقه و یال‌های موازی را گراف ساده[۷] می نامند .

تعریف ۳.۱.۱ یک گشت[۸] در گراف G دنباله‌ای از رأس ها و یال‌های G به صورت $v_0e_1v_1e_2 \ldots e_nv_n$ است که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند.

تعریف ۴.۱.۱ اگر هیچ یالی در گشت تکرار نشده باشد ، آن‌گاه به آن گشت گذر[۹] می گوییم .

تعریف ۵.۱.۱ یک مسیر[۱۰] گذری است که در آن هیچ رأسی تکرار نشده باشد.

تعریف ۶.۱.۱ اگر در مسیر $v_0e_1v_1e_2 \ldots e_nv_n$ رابطه‌ی $v_0 = v_n$ برقرار باشد، آن‌گاه آن مسیر را دور[۱۱] گویند.

تعریف ۷.۱.۱ دریک گراف G، زیر تقسیم[۱۲] یک یال مثل uv یعنی جایگزین کردن یال uv با مسیر uwv که در آن w راسی با درجه‌ی دو است که در یال uv درج شده است.

تعریف ۸.۱.۱ گراف همبند[۱۳]، گرافی است که برای هر دو رأس دلخواه آن مانند u و v یک $u-v$ مسیر موجود باشد .

تعریف ۹.۱.۱ هر زیر گراف همبند ماکسیمال گراف G را یک مؤلفه[۱۴] گراف G می گوییم .

[۶] parallel edges
[۷] simple graph
[۸] walk
[۹] trail
[۱۰] path
[۱۱] circuite
[۱۲] Subdivision
[۱۳] connected
[۱۴] component

تعریف ۱۰.۱.۱ یک برش رأسی[۱۵] گراف G، مجموعه‌ای از رأس ها است که با حذف آنها، تعداد مؤلفه های گراف G افزایش می یابند .

تعریف ۱۱.۱.۱ یال e از گراف G را منقبض شده گوییم اگر آن یال حذف شده و دو سر آن روی هم قرار گیرند. گراف بدست آمده از انقباض[۱۶] یال e را با $G.e$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ یک گراف G را یک گراف بی دور یا جنگل[۱۷] می گوییم هر گاه هیچ دوری نداشته باشد. یک جنگل همبند را یک درخت[۱۸] می گوییم. منظور از یک درخت فراگیر[۱۹] گراف G، زیر گراف فراگیری است که یک درخت می باشد.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ مترویـد[۲۰] M زوج مرتب $M = (E,\mathcal{I})$ است که در آن E مجموعه‌ای متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می‌کنند:

$(I۱)$ $\emptyset \notin \mathcal{I}$.

$(I۲)$ اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آن‌گاه $I' \in \mathcal{I}$.

$(I۳)$ اگر $I_۱, I_۲ \in \mathcal{I}$ و $|I_۲| < |I_۱|$، آن‌گاه عضوی مثل $e \in I_۲ - I_۱$ وجود دارد که $I_۱ \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد ، آن‌گاه M را یک متروید روی E و E رامجموعه ی زمینه ی[۲۱] آن گویند.

[۱۵] vertex cut
[۱۶] Contraction
[۱۷] forest
[۱۸] tree
[۱۹] spanning tree
[۲۰] matroid
[۲۱] ground set

هر عضو $\mathcal{I}$ یک مجموعه‌ی مستقل[۲۲] M نامیده می‌شود.

زیرمجموعه‌هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند مجموعه‌های وابسته‌ی[۲۳] M گویند.

گزاره ۲.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه‌ای از بردارها باشد و $\mathcal{I}$ گردایه تمام زیر مجموعه‌های مستقل خطی E باشد. در این‌صورت $(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید است. ماترویید حاصل را یک ماترویید برداری[۲۴] گوییم.

گزاره ۳.۲.۱ فرض کنیم G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه $\mathcal{I}$ شامل مجموعه‌ای از یال‌های G است که زیر گراف‌های تولید شده توسط این مجموعه‌ها بی‌دور باشند، در این‌صورت $M = (E,\mathcal{I})$ یک ماترویید روی E است و این ماترویید را با $M(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱ هر زیر مجموعه وابسته ماترویید M را یک دور[۲۵] گوییم و مجموعه تمامی دورهای ماترویید M را با $\mathcal{C}(M)$ یا با $\mathcal{C}$ نشان می‌دهیم.

یک دور M را که شامل n عضو باشد، یک n—دور[۲۶] می‌نامیم.

بنابراین با معلوم بودن عناصر $\mathcal{C}(M)$ می‌توان اعضای $\mathcal{I}(M)$ را مشخص کرد چون عناصرآن دقیقاً زیر مجموعه‌هایی از E هستند که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(M)$ نیستند.

قضیه ۵.۲.۱ گردایه دورهای یک ماترویید دارای خواص زیر است:

$(C1)$ $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

$(C2)$ اگر $C_1 \in \mathcal{C}$ ، $C_2 \in \mathcal{C}$ و $C_1 \subseteq C_2$، آن‌گاه $C_1 = C_2$.

$(C3)$ اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آن گاه عضوی مثل C_3 از $\mathcal{C}$ وجود

---

[۲۲] independent set

[۲۳] dependent set

[۲۴] Vector matroid

[۲۵] Circuit

[۲۶] n-circuit

دارد به‌طوری که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

برهان : [[۵] ۳.۱.۱].■

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد که در سه خاصیت $C1$ و $C2$ و $C3$ صدق می‌کند. همچنین فرض کنیم $\mathcal{I}$ گردایه تمامی زیر مجموعه‌های E باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند، در این صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید روی E است که $\mathcal{C}$ گردایه دورهای آن می‌باشد.

برهان : [[۵] ۴.۱.۱].■

نتیجه ۷.۲.۱ فرض کنیم G گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعه زمینه $E(M)$ باشد. در این‌صورت $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک متروید روی E است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در سه خاصیت $C1$ و $C2$ و $C3$ صدق کند.

گزاره ۸.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه یال‌های گراف G و $\mathcal{C}$ گردایه تمام دورهای G باشد. در این صورت $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک متروید روی مجموعه E است. این متروید را متروید دوری [۲۷] گراف G گوییم و آن را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

برهان : [[۵] ۸.۱.۱].■

تعریف ۹.۲.۱ دو متروید M_1 و M_2 را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $M_1 \cong M_2$، اگر تناظر یک به یک $\psi(X) : E(M_1) \to E(M_2)$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $X \subseteq E(M_1)$، $\psi(X)$ یک مجموعه مستقل در M_2 است اگر و تنها اگر یک مجموعه مستقل در M_1 باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱ متروید M را گرافیک [۲۸] گوییم، هر گاه گرافی وجود داشته باشد که متروید دوری این گراف یکریخت با M باشد، به عبارتی M یکریخت با متروید تولید شده توسط گرافی مثل G

[۲۷] Cycle matroid
[۲۸] Graphic

باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ هر عضو e از متروید M را یک طوقه گوییم، اگر $\{e\}$ یک دور M باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ اگر f و g دو عضو متروید M باشند به‌طوری که $\{f,g\}$ یک دور باشد، آن‌گاه f و g را موازی گوییم. منظور از یک کلاس موازی از M، زیر مجموعه ماکسیمال X از E است که هر دو عضو متمایز آن موازی‌اند و هیچ عضو آن طوقه نیست.

یک کلاس موازی را بدیهی[۲۹] گوییم اگر شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنیم $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید بدون طوقه بوده و هر کلاس موازی آن بدیهی باشد. در این‌صورت M را یک متروید ساده[۳۰] گوییم.

حال اگر تمامی طوقه‌های متروید M و از هر کلاس موازی همه‌ی عضوها را به‌جز یکی حذف کنیم، متروید حاصل را متروید ساده‌ی وابسته به M می‌نامیم و آن را با $\tilde{M}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱ هر مجموعه مستقل ماکسیمال متروید M را یک پایه‌ی[۳۱] M گوییم و مجموعه تمامی پایه‌های M را با $\mathcal{B}(M)$ نشان می دهیم.

لم ۱۵.۲.۱ فرض کنیم $B_۱$ و $B_۲$ دو پایه از متروید M باشند؛ آن‌گاه $|B_۱|=|B_۲|$.

برهان : [[۵] ۱.۲.۱].■

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه متناهی و ناتهی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد آن‌گاه $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک متروید روی E است اگر و تنهااگر در شرایط زیر صدق کند:

$(B۱)$ $\mathcal{B}\neq\emptyset$.

[۲۹] Trivial
[۳۰] Simple matroid
[۳۱] Base

$(B2)$ اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 - B_2$، آن‌گاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ وجود دارد به‌طوری که $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان : [[۵] ۱.۲.۲].■

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید B پایه‌ای از متروید M باشد. آن‌گاه برای هر $e \in E - B$، $B \cup e$ شامل دوری یکتاست. این دور را با $C(e, B)$ نمایش می‌دهیم. بعلاوه $e \in C(e, B)$.

$C(e, B)$ را دور اصلی[۳۲] وابسته به پایه M گوییم.

مثال ۱۸.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه‌ی n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه تمام زیر مجموعه‌های m عضوی E باشد که در آن $0 \leq m \leq n$. آن‌گاه $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک متروید روی E است. این متروید را با $U_{m,n}$ نمایش داده آن را متروید یکنواخت[۳۳] می‌نامیم و داریم:

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E; |X| \leq m\}$$

$$C(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset & m = n \\ \{C \subseteq E; |C| = m + 1\} & m < n \end{cases}$$

مثال ۱۹.۲.۱ در متروید $U_{0,n}$، هر مجموعه تک عضوی از مجموعه زمینه یک طوقه است چون تک عضوی‌ها دوراند. در ضمن $\emptyset$ به‌عنوان تنها مجموعه مستقل برای این متروید است.

در متروید $U_{n,n}$ هر زیر مجموعه از مجموعه زمینه $E(M)$ یک مجموعه‌ی مستقل است. لازم به ذکر است این متروید هیچ مجموعه وابسته ندارد.

گزاره ۲۰.۲.۱ فرض کنیم M یک متروید گرافیک باشد. آن‌گاه $M \cong M(G)$ که در آن G یک گراف همبند می‌باشد. یعنی گراف همبندی مثل G وجود دارد که متروید دوری تولید شده توسط G یکریخت با M باشد.

برهان : [[۵] ۱.۲.۸].■

---

[۳۲] Fundamental circuit

[۳۳] Uniform matroid

تعریف ۲۱.۲.۱ فرض کنیم $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد و $X \subseteq E$. فرض کنید:

$$\mathcal{I}\,|X \ = \{\ I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$$

می توان دید که $(X,\mathcal{I}|X)$ یک متروید است. این متروید را تحدید[۳۴] M به X یا حذف $E-X$ از M گوییم و با نماد $M|X$ یا $M\backslash E-X$ نمایش می‌دهیم.

گردایه دورهای این متروید به‌صورت زیر است:

$$C(M|X) = \{C \in \mathcal{C}\ ;\ C \in X\}$$

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک مترويد و $X \subseteq E$ باشد، تابع رتبه مترويد M را به‌صورت:

$$r(X) = max\{\ |Y|\ ;\ Y \subseteq X,\ Y \in \mathcal{I}\}$$

تعریف می‌کنیم.

لم ۲۳.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه متناهی و ناتهی باشد. تابع $r : ۲^E \to N \cup \{۰\}$ تابع رتبه یک مترويد روی E است اگر و تنها اگر r در شرايط زير صدق کند:

$(R۱)$ اگر $X \subseteq E$ ، آن‌گاه $۰ \leq r(X) \leq |X|$.

$(R۲)$ اگر $X \subseteq Y \subseteq E$ ، آن‌گاه $r(X) \leq r(Y)$.

$(R۳)$ اگر $X,Y \subseteq E$ ، آن‌گاه $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

که این خاصیت را نیم مدولاری گویند.

برهان : [[۵] ۴.۳.۱].■

---

[۳۴] Restriction

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنیم M یک ماترويد روی مجموعه زمینه $E(M)$ باتابع رتبه r باشد. تابع $cl : ۲^E \to ۲^E$ را برای هر $X \subseteq E$ با ضابطه‌ی

$$cl(X) = \{x \in E \; ; \; r(X \cup x) = r(X)\}$$

تعریف می‌کنیم. این تابع را عملگر بستار[۳۵] M گوییم.

لم ۲۵.۲.۱ عملگر بستار ماترويد M روی E دارای خواص زیر است:

۱) اگر $X \subseteq E$ ، آن‌گاه $X \subseteq cl(X)$.

۲) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$ ، آن‌گاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

۳) اگر $X \subseteq E$ ، آن‌گاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

۴) اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ ، آن‌گاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان : [[۵] ۲.۴.۱].■

نتیجه ۲۶.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه باشد، $cl : ۲^E \to ۲^E$ عملگر بستار یک ماترويد روی E است اگر و تنهااگر در شرایط لم قبل صدق کند.

قضیه ۲۷.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $cl : ۲^E \to ۲^E$ تابعی باشد که در شرایط لم ۲۵.۲.۱، صدق می‌کند. فرض کنیم

$$\mathcal{I} = \{ X \subseteq E \; ; \; x \notin cl(X - x) \; , \; \forall \, x \in X\}$$

آن‌گاه $M = (E,\mathcal{I})$ یک ماترويد با عملگر بستار cl است.

برهان : [[۵] ۴.۴.۱].■

---

[۳۵] Closur operatore