مقدمه

در سال ۱۹۴۰ میانگین پذیری به عنوان یک مفهوم مهم درآنالیز هارمونیک و نظریه نیمگروه های نیم توپولوژیک معرفی شد. در سال ۱۹۷۲ جانسون نشان داد که گروه موضعا فشرده G میانگین پذیراست اگرو تنها اگر $L^1(\mathrm{G})$ میانگین پذیر باشد، بدین ترتیب نظریه میانگین پذیری جبرهای باناخ مطرح شد.

در سال ۱۹۸۷ مفهوم میانگین پذیری ضعیف توسط باد و همکارانش برای جبرهای باناخ جابجایی معرفی شد. آنها نشان دادند که جبر باناخ جابجایی A میانگین پذیر ضعیف است اگرو تنها اگر هر مشتق پیوسته از A به توی X ،A- مدول باناخ و متقارن X درونی باشد. سپس جانسون آنرا برای جبرهای باناخ دلخواه تعمیم داد.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه به صورت زیر تدوین شده است.

در فصل اول تعاریف و قضیه های لازم که در فصل های بعدی به آنها نیازمندیم را بیان می‌کنیم. در فصل دوم به بررسی و مطالعه مفهوم میانگین پذیری جبرهای باناخ و به خصوص شرایط لازم و کافی برای این مفهوم می پردازیم و در فصل سوم مفهوم میانگین پذیری ضعیف را تحقیق می کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات لازم

در این فصل تعاریف و قضیه‌های لازم را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. اکثر مطالب این فصل از مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴] و [۱۳] اخذ شده است که در صورت لزوم در پایان هر نتیجه, مراجع دیگر ذکر می شود.

در سرتاسر این پایان‌نامه همه فضاهای برداری و جبرها روی میدان مختلط درنظر گرفته شده، مگر خلاف آن تصریح شود.

۱.۱ مدول‌های باناخ

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری A را یک جبر می‌نامیم هرگاه نگاشت

$$\pi : A \times A \longrightarrow A, \quad (a,b) \mapsto \pi(a,b) = ab$$

برای هر $a,b,c \in A$ و برای هر $\alpha \in ¢$ در شرایط زیر صدق کند.

۱. $a(bc) = (ab)c$

۲. $(a+b)c = ac + bc \;,\; a(b+c) = ab + ac$

۳. $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$

تعریف ۲.۱.۱ جبر A همراه با یک نرم را یک جبر نرم‌دار می نامیم. هم‌چنین جبر نرم‌دار A را کامل می نامیم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۳.۱.۱ جبر نرم‌دار کامل A را یک جبر باناخ می نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$،

$$\|ab\| \leq \|a\|.\|b\|.$$

تعریف ۴.۱.۱ زیرفضای I از جبر A را یک ایده‌ال چپ (راست) می نامیم، اگر

$$AI \subseteq I\,, (IA \subseteq I).$$

تعریف ۵.۱.۱ فضای همه تابعک‌های خطی پیوسته روی فضای(باناخ) X را فضای دوگان X می نامیم و با X^* نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$X^* = \left\{f : X \to \mathbb{C} \ : \ \text{پیوسته و خطی است } f\right\}.$$

X^* با نرم *یکنواخت* $(f \in A^*)$ $\|f\| = Sup\ \{\|f(x)\|,\ \|x\| \leq 1\},$ به یک فضای باناخ تبدیل می شود. فضای دوگان دوم X، یعنی X^{**} و دوگان های بالاتر به طور مشابه قابل تعریف می باشند.

قرارداد : در تمامی فصل ها اثر تابع f روی x را با نماد $< f, x >$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ برای فضای باناخ X، نگاشت $k : X \to X^{**}$ را نگاشت طبیعی روی X می نامیم و تصویر هر عنصر از X مانند x را در X^{**} با $\hat{x}$ نشان می دهیم. در واقع

$$\langle k(x), f\rangle = \langle \hat{x}, f\rangle = \langle f, x\rangle\,, \qquad (\,x \in X,\ f \in X^*\,).$$

فضای باناخ X را انعکاسی می نامیم هرگاه نگاشت طبیعی k، پوشا باشد.

تعریف ۷.۱.۱ فضای برداری X روی جبر A را یک مدول چپ می نامیم هرگاه نگاشت

$$. : A \times X \longrightarrow X\,; \qquad (a, x) \longmapsto a.x$$

برای هر $a, b \in A$، $x, y \in X$ و هر $\alpha \in ¢$ در شرایط زیر صدق کند.

$$(\alpha a + b, x) = \alpha(a, x) + (b, x) \qquad (۱$$

$$(a, \alpha x + y) = \alpha(a, x) + (a, y) \qquad (۲$$

$$(ab, x) = (a, bx) \qquad (۳$$

A-مدول راست به طور مشابه تعریف می شود.

فضای برداری X را یک A- مدول می‌نامیم هرگاه X، یک A- مدول چپ و راست باشد و

$$a(xb) = (ax)b, \qquad (a, b \in A, x \in X).$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این صورت X را یک A- مدول چپ باناخ می‌نامیم اگر X، A- مدول چپ باشد و

$$\|ax\| \leq \|a\|. \|x\|, \qquad (a \ \in A, \ x \in X).$$

A-مدول راست باناخ و A- مدول باناخ به طور مشابه قابل تعریف می‌باشند.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید X و Y دو A- مدول چپ باناخ باشند و فرض کنید $\theta: A \longrightarrow B$ *یک نگاشت خطی و پیوسته باشد. آنگاه* θ را یک مورفیسم A- مدولی چپ باناخ می نامیم اگر برای هر $a \in A$ و هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\theta(a \ . \ x) = a. \theta(x).$$

مورفیسم A - مدولی راست و مورفیسم A - مدولی به طور مشابه تعریف می شوند.

تعریف ۱۰.۱.۱ *فرض کنید* X و Y و Z، A- مدول چپ باناخ باشند و فرض کنید $\theta: X \longrightarrow Y$ و $\beta: Y \longrightarrow Z$ مورفیسم های A-مدولی چپ باشند. در این صورت دنباله

$$\Sigma: \ \circ \longrightarrow X \ \longrightarrow Y \ \longrightarrow Z \longrightarrow \circ \qquad (۱.۱)$$

دقیق است اگر و تنها اگر

۱) θ یک به یک باشد.

۲) $Im\,\theta = Ker\,\beta$.

۳) $Im\,\theta = Z$.

دنباله دقیق کوتاه **(۱.۱)** را شکافنده می نا میم هرگاه مورفیسم $\alpha : Z \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوری که $\beta o \alpha = I_Z$.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید X یک A- مدول باناخ باشد. آنگاه X^* تحت اعمال

$$A \times X^* \longrightarrow X^*, \qquad (a, f) \mapsto a.f$$

و

$$X^* \times A \longrightarrow X^*, \qquad (f, a) \mapsto f.a$$

یک A- مدول باناخ است که در آن

$$\langle a.f, x\rangle = \langle f, x.a\rangle\,, \quad \langle f.a, x\rangle = \langle f, a.x\rangle.$$

به طور مشابه X^{**}، X^{***} و ... نیز A- مدول باناخ می باشند. در حالت خاص A^* و A^{**} را به ترتیب مدول و مدول دوگان دوم روی جبر باناخ A می نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و Y زیرفضای آن باشد. در این صورت مجموعه

$$Y^{\perp} = \{f \in X^*: \qquad \langle f, x\rangle = \circ \quad (x \in Y)\}.$$

را پوچساز Y می‌نامیم. اگر Y زیرفضای بسته از X باشد آنگاه بنا به قضیه ۴.۹از [۱۳] ، $X = Y^* \bigoplus Y^{\perp}$.

تعریف ۱۳.۱.۱ تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در جبر باناخ A یک همانی تقریبی چپ (راست) برای A نامیده می‌شود اگر برای هر $a \in A$،

$$\|e_\lambda a - a\| \to 0\ , \quad (\|a e_\lambda - a\| \to 0).$$

تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در جبر باناخ A را یک همانی تقریبی (دوطرفه) می‌نامیم، هرگاه $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ همانی تقریبی چپ و *راست* باشد.

تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ را کراندار می‌نامیم هرگاه مجموعه $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ یک مجموعه کراندار در A باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ تور $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ را یک همانی تقریبی چپ ضعیف برای جبر باناخ A می‌نامیم اگر برای هر $f \in A^*$،

$$f(e_\lambda a) \longrightarrow f(a), \qquad (a \in A).$$

همانی تقریبی راست ضعیف و همانی تقریبی ضعیف به طور مشابه تعریف می‌شوند.

گزاره ۱۵.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی چپ ضعیف کراندار باشد. آنگاه A دارای همانی تقریبی چپ کراندار است.

اثبات : رجوع شود به [۱].

تعریف ۱۶.۱.۱ جبر باناخ A را یک جبر باناخ دوگان می‌نامیم هرگاه زیرمدول بسته E از مدول دوگان A^* موجود باشد به طوری که $E^* = A$. در این صورت E را پیش دوگان A می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک تور در X باشد. در این صورت گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در توپولوژی ضعیف به x همگراست هرگاه برای هر $f \in X^*$،

$$\langle f, x_\alpha \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle.$$

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک تور در X^* باشد. در این صورت گوییم تور $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ در توپولوژی ضعیف- ستاره به f همگراست هرگاه برای هر $x \in X$،

$$\langle f_\alpha, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle.$$

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و X^* دوگان X مجهز به توپولوژی ضعیف- ستاره باشد. در این صورت نگاشت $F: X^* \longrightarrow X^*$ را پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر تور $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ در X^*، از همگرایی $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ به f در توپولوژی ضعیف- ستاره، نتیجه شود که $\langle F, f_\alpha\rangle \longrightarrow \langle F, f\rangle$، در همان توپولوژی.

قضیه ۲۰.۱.۱ (گلدشتاین) فضای باناخ X در X^{**} نسبت به توپولوژی ضعیف- ستاره چگال است.

اثبات : رجوع شود به [۲].

قضیه ۲۱.۱.۱ (باناخ- آلاغلو) برای هر فضای نرم‌دار X، مجموعه

$$k = \{f \in X^*: \|f\| \leq 1\}.$$

در X^*، نسبت به توپولوژی ضعیف- ستاره فشرده است.

اثبات : رجوع شود به [۳].

قضیه ۲۲.۱.۱ (هان- باناخ) فرض کنید M یک زیرفضا از فضای برداری X و p یک نیم نرم روی X باشد. اگر f یک تابع خطی روی M باشد که

$$|f(x)| \leq p(x), \quad (x \in X).$$

آنگاه f به یک تابعک خطی مانند F روی X قابل گسترش است به طوری که

$$|F(x)| \leq p(x), \qquad (x \in X).$$

اثبات : رجوع شود به [۴].

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری و $E \subseteq X$ باشد. در این صورت کوچکترین مجموعه محدب در X شامل مجموعه E را غلاف محدب E می نامیم و با $convex\ hull\ E$ و یا $co\ E$ نشان می دهیم.

۲.۱ ضربهای آرنز

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. آنگاه ضربهای اول و دوم آرنز روی دوگان دوم A، یعنی A^{**}، که به ترتیب با نمادهای $\Box$ و $\Diamond$ نشان می‌دهیم، برای هر $a, b \in A$ و $f \in A^{*}$ و $\Phi, \Psi \in A^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle \Phi \Box\Box \Psi, f\rangle = \langle \Phi, \Psi . f\rangle, \qquad \langle \Phi \Box \Diamond \Psi, f\rangle = \langle \Psi, f . \Phi\rangle$$

$$\langle \Psi \Box . f, a\rangle = \langle \Psi \Box, f . a\rangle, \qquad \langle f . \Phi, a\rangle = \langle \Phi, a . f\rangle$$

$$\langle f . a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \qquad \langle a . f, b\rangle = \langle f, ba\rangle.$$

هم‌چنین ضربهای فوق به صورت

$$\Phi \Box \Psi = w^{*} - \lim_{i} \lim_{j} a_i b_j\,, \quad \Phi \Diamond \Psi = w^{*} - \lim_{j} \lim_{i} a_i b_j$$

نیز تعریف می‌شوند که در آن $(a_i)_{i\in I}$ و $\left(b_j\right)_{j\in I}$ دو تور در A هستند که به ترتیب در توپولوژی ضعیف- ستاره به Φ و Ψ همگرا می‌باشند.

تعریف ۱.۲.۱ جبر باناخ A را منظم می‌نامیم هرگاه برای هر $\Phi, \Psi \in A^{**}$

$$\Phi \Box \Psi = \Phi \Diamond \Psi.$$

تعریف ۲.۲.۱ برای جبر باناخ A، مجموعه‌های

$$Z_{t}^{1}(A^{**}) = \left\{\Phi \in A^{**} : \Phi \Box \Psi = \Phi \Diamond \Psi, (\Psi \in A^{**})\right\},$$

$$Z_{t}^{2}(A^{**}) = \left\{\Phi \in A^{**} : \Psi \Box \Phi = \Psi \Diamond \Phi, (\Psi \in A^{**})\right\}.$$

را به ترتیب مرکزهای توپولوژیکی اول و دوم A^{**} می‌نامیم.

در این صورت جبر باناخ A منظم است اگر و تنها اگر $Z_t^1(A^{**}) = A^{**}$ یا به طور معادل $Z_t^2(A^{**}) = A^{**}$.

به عنوان مثال، برای هر گروه موضعاً فشرده G، $L^1(\mathrm{G})$ منظم است اگر و تنها اگر G متناهی باشد (ببینید [۱۴]).

تعریف ۳.۲.۱ عملگر خطی کراندار T از فضای باناخ X به فضای باناخ Y را (به طور ضعیف) فشرده می‌نامیم هرگاه تصویر گوی واحد بسته در X، توسط T در Y (به طور ضعیف) فشرده نسبی باشد.

تعریف ۴.۲.۱ تابعک خطی f روی جبر باناخ A را به طور ضعیف تقریباً متناوب می‌نامیم هرگاه مجموعه

$$\{f.a: \quad a \in A, \quad \|a\| \leq 1\}.$$

به طور ضعیف فشرده نسبی باشد. فضای همه تابعک‌های خطی به طور ضعیف تقریباً متناوب روی جبر باناخ A را با $WAP(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۲.۱ برای جبر باناخ A شرایط زیر معادلند.

۱) A منظم است.

۲) $WAP(A) = A^*$

۳) برای هر $\Psi \in A^{**}$، عملگر $\Phi \to \Psi \square \Phi$ نسبت به توپولوژی ضعیف- ستاره پیوسته است

۴) برای هر $f \in A^*$، نگاشت $a \longmapsto f.a$ از A به توی A^* به طور ضعیف فشرده است

اثبات : رجوع شود **به** [۲].

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T: X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) T به طور ضعیف فشرده است.

۲) T^{**} به طور ضعیف فشرده است.

۳) $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$

اثبات : رجوع شود به [۲].

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A- مدول باناخ باشد. در این صورت گوییم X از چپ تجزیه می‌شود هرگاه $X.A = X$ که در آن

$$X.A = \{x.a : \quad x \in X, \ \ a \in A\}$$

تجزیه‌پذیری راست و تجزیه‌پذیری به طور مشابه تعریف می‌شوند.

قضیه ۸.۲.۱ (تجزیه کوهن) فرض کنید A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی کراندار مانند $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ باشد. اگر X یک A- مدول باناخ باشد به طوری که برای هر $x \in X$ ،

$$e_\lambda x \longrightarrow x\,, \qquad\qquad x e_\lambda \longrightarrow x$$

آنگاه X تجزیه می‌شود.

اثبات : رجوع شود به [۴].

قضیه ۹.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی کراندار باشد. آنگاه

۱) $(A^{**}, \square)$ یکدار است اگر و تنها اگر $A^*.A = A^*$.

۲) $(A^{**}, \lozenge)$ یکدار است اگر و تنها اگر $A.A^* = A^*$.

اثبات : رجوع شود به [۱۱].

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ همراه با یک همانی تقریبی کراندار باشد آنگاه

$$WAP(A) \subseteq (A^*.A) \cap (A.A^*).$$

اثبات : رجوع شود به [۱۴].

نتیجه ۱۱.۲.۱ برای جبر باناخ منظم A ، A^* تجزیه می‌شود.

فصل ۲

میانگین‌پذیری جبرهای باناخ

در این فصل برخی از شرایط لازم برای میانگین‌پذیری جبر باناخ A را بررسی می کنیم. همچنین همریختی‌های پیوسته بین دو جبر باناخ دلخواه را مورد مطالعه قرار داده و شرایطی را که طی آن یک همریختی بتواند میانگین‌پذیری را انتقال دهد، بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲ فرض کنید X یک A- مدول باناخ باشد. آنگاه نگاشت خطی پیوسته $D: A \longrightarrow X$ را یک مشتق می‌نامیم هرگاه

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b)$$

فرض کنید x عنصر دلخواهی از X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\delta_x(a) = a.x - x.a, \qquad (a \in A).$$

آنگاه δ_x یک مشتق است. چنین مشتقی را یک مشتق درونی می‌نامند.

فضای همه مشتق‌های پیوسته از جبر باناخ A به توی A- مدول باناخ X را با $Z^1(\mathrm{A},\mathrm{X})$ ، و زیرفضای همه مشتق‌های درونی از $Z^1(\mathrm{A},\mathrm{X})$ را با $N^1(\mathrm{A},\mathrm{X})$ نشان می‌دهیم.

هم‌چنین فضای خارج قسمتی $\frac{Z^1(\mathrm{A},\mathrm{X})}{N^1(\mathrm{A},\mathrm{X})}$ را با $H^1(\mathrm{A},\mathrm{X})$ نشان می‌دهیم

تعریف ۲.۲ جبر باناخ A را میانگین‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر A- مدول باناخ X، هر مشتق پیوسته از A به توی X^* درونی باشد یعنی $H^1(\mathrm{A},\mathrm{X}^*) = \{0\}$.

تعریف ۳.۲ مشتق $D: A \longrightarrow X$ را تقریباً درونی (ضعیف) می‌نامیم اگر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در X موجود باشد به طوری که برای هر $a \in A$ ، $D(a) = \lim_{\alpha} \delta_{x_\alpha}(a)$ در نرم توپولوژی (در توپولوژی ضعیف).

گزاره ۴.۲ مشتق $D: A \longrightarrow X$ تقریباً درونی است اگر و تنها اگر تقریباً درونی ضعیف باشد.

اثبات: با توجه به اینکه توپولوژی نرم قوی تر از توپولوژی ضعیف است، لذا تقریباً درونی ضعیف از تقریباً درونی نتیجه می شود.پس کافی است ثابت کنیم که اگر D تقریباً درونی ضعیف باشد، آنگاه تقریباً درونی است.بدین ترتیب فرض کنید $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک تور کراندار در X باشد به طوری که برای هر $a \in A$، در توپولوژی ضعیف

$$D(a) = \lim_\alpha (a.x_\alpha - x_\alpha.a).$$

فرض کنید $n \in N$ و $X^n = X \times X \times \ldots \times X$. برای سادگی هر عنصر $(x_1,\ldots,x_n)$ متعلق به X^n را با $\tilde{x}$ نشان می دهیم. در این صورت X^n با نرم

$$\| \tilde{x} \| = Max \{ \| x_i \| : \quad 1 \le i \le n \}$$

به یک فضای باناخ تبدیل می شود. فرض کنید a_1 , a_2 , ... a_n عناصری دلخواه در A باشند و $\tilde{0} = (0,0,\ldots,0)$.
مجموعه P را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P = \{\tilde{x} : \ x_i = D(a_i) - (a_i.x_\alpha - x_\alpha.a_i) \qquad for\ some\ \alpha\ and\ all\ i\}.$$

در این صورت $\tilde{0}$ به بستارضعیف P تعلق دارد. یعنی $\tilde{x} \longrightarrow \tilde{0}$ در توپولوژی ضعیف. درحقیقت چون $a_i.x_\alpha -$ $x_\alpha.a_i \longrightarrow D(a_i)$ برای هر $1 \le i \le n$ ،در نتیجه برای هر $1 \le i \le n$ ، $x_i \longrightarrow 0$. بنابراین

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{x} \longrightarrow \tilde{0} = (0,0,\ldots,0).$$

غلاف محدب مجموعه P ، عبارت است از

$$co\ P = \{\tilde{x_i} : x_i = D(a_i) - (a_i.x - x.a_i) \qquad for\ some\ x \in co\{x_\alpha\}\ and\ all\ i\}.$$

به طور مشابه $\tilde{o}$ به بستار ضعیف غلاف محدب P تعلق دارد وچون غلاف P، یک مجموعه محدب است در نتیجه بنا به قضیه ۳.۱۲ از [13]، بستار ضعیف غلاف محدب P با بستار نرم آن یکسان است. در نتیجه $\tilde{o}$ به بستار نرم غلاف P *تعلق دارد. به عبارت دیگر برای هر* $\varepsilon>0$ *و برای هر* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *متعلق به* A، *عنصری مانند* xدر غلاف محدب $\{x_\alpha\}$ وجود دارد که

$$\|D(a)-(a.x-x.a)\|<\varepsilon; \qquad \forall a\in\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

با توجه به اینکه فرایند فوق برای هر $n\in N$ و هر $a_1, a_2, \dots, a_n$ متعلق به مجموعه A برقرار است، لذا برای هر زیر مجموعه متناهی E از A و هر $\varepsilon>0$، عنصری وابسته به E و ε مانند $(x_{E,\varepsilon})$ در غلاف محدب $\{x_\alpha\}$ وجود دارد که

$$\left\|D(a)-\left(a.x_{E,\varepsilon}-x_{E,\varepsilon}.a\right)\right\|<\varepsilon \qquad \forall a\in E. \qquad (۲.۱)$$

اکنون رابطه ترتیب جزیی زیر را روی زیرمجموعه متناهی E از A تعریف می کنیم:

$$(E,\varepsilon)<(E',\varepsilon') \iff E\subset E', \qquad \varepsilon>\varepsilon'$$

چون $\{x_\alpha\}$ کرندار است و$(x_{E,\varepsilon})$ از غلاف محدب $\{x_\alpha\}$ به دست می آید لذا $(x_{E,\varepsilon})$ کراندار است. هم چنین بنا به رابطه فوق، $(x_{E,\varepsilon})$ یک تور می باشد.

بنابراین با توجه به این که $(x_{E,\varepsilon})$ یک تور کراندار است و بنا به رابطه(1.2) داریم:

$$\left(a.x_{E,\varepsilon}-x_{E,\varepsilon}.a\right) \longrightarrow D(a),$$

درنرم توپولوژی. یعنی مشتق D *تقریبا درونی است.*

قضیه زیر از جوردیائو[1] [۹]، یک شرط لازم و کافی برای میانگین پذیری جبر باناخ A را بیان می‌کند.

[1] Gourdeau

قضیه ۵.۲ جبر باناخ A میانگین پذیر است اگر و تنها اگر هرمشتق پیوسته از A به توی هر A- مدول باناخ X، تقریباً درونی باشد.

اثبات: فرض کنید برای هر مدول دلخواه X، $D: A \longrightarrow X$ یک مشتق پیوسته باشد. باتوجه به نگاشت طبیعی می‌توان مشتق D را از A به توی X^{**} درنظر گرفت. چون بنا به فرض A میانگین پذیر است، لذا برای

هرA- مدول باناخ دلخواه Y ، مشتق پیوسته $D: A \longrightarrow Y^{*}$ درونی است. در نتیجه $D: A \longrightarrow X^{**}$ نیز درونی است. لذا $y_{\circ} \in X^{**}$ موجود است به طوری که برای هر $a \in A$ ، داریم:

$$D(a) = a.y_{\circ} - y_{\circ}.a.$$

برطبق قضیه گلداشتاین، تور کراندار $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ در X وجود دارد به طوری که $\hat{x}_{\alpha} \longrightarrow y_{\circ}$ در توپولوژی ضعیف- ستاره. یعنی برای هر $f \in X^{*}$ ، $\hat{x}_{\alpha}(f) \longrightarrow y_{\circ}(f)$ در توپولوژی ضعیف- ستاره. لذا برای هر $x^{*} \in X^{*}$ داریم:

$$\langle x^{*}, D(a)\rangle = \langle x^{*}, a.y_{\circ} - y_{\circ}.a\rangle = \lim_{\alpha}\langle x^{*}, a.\hat{x}_{\alpha} - \hat{x}_{\alpha}.a\rangle$$

$$= \lim_{\alpha}\langle x^{*}, \widehat{a.x_{\alpha}} - \widehat{x_{\alpha}.a}\rangle$$

$$= \lim_{\alpha}\langle x^{*}, a.x_{\alpha} \widehat{-} x_{\alpha}.a\rangle$$

$$= \lim_{\alpha}\langle a.x_{\alpha} - x_{\alpha}.a, x^{*}\rangle.$$

بنابراین $D(a) = \lim_{\alpha}(a.x_{\alpha} - x_{\alpha}.a)$ در توپولوژی ضعیف. و این یعنی D یک مشتق تقریباً درونی ضعیف است و در نتیجه بنا به لم قبل، تقریباً درونی است.

برعکس: فرض کنید هر مشتق پیوسته از A به توی هر A- مدول باناخ X، تقریباً درونی باشد. لذا تور کراندار $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ در X وجود دارد به طوری که $D(a) = \lim_{\alpha}(a.x_{\alpha} - x_{\alpha}.a)$ در نرم توپولوژی. چون $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ها کراندارند، لذا برطبق قضیه باناخ- آلاغلو یک زیرتور همگرا دارند. زیرتور همگرای $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ را، خود $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ درنظر می گیریم. فرض کنید $x_{\circ}$ یک نقطه چسبیدگی ضعیف- ستاره $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ باشد. آنگاه چون

$$D(a) = \lim_{\alpha}(a.x_{\alpha} - x_{\alpha}.a)$$

در نرم توپولوژی، درنتیجه $D(a) = \lim_{\alpha}(a.x_\alpha - x_\alpha.a)$ در توپولوژی ضعیف-ستاره و بنابراین

$D(a) = a.x_\circ - x_\circ.a$. یعنی D درونی است و لذا A میانگین‌پذیر است.

گزاره ۶.۲ فرض کنید θ یک همریختی پیوسته از جبر باناخ A به توی جبر باناخ B باشد. اگر برد θ در B چگال باشد، آنگاه میانگین‌پذیری A ، میانگین‌پذیری B را نتیجه می‌دهد.

اثبات: فرض کنید که A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر باشد. فرض کنید X یک B- مدول باناخ باشد. X با ساختارهای مدولی تعریف شده توسط

$$A \times X \longrightarrow X, \qquad (a,x) \longmapsto a.x = \theta(a).x$$

و

$$X \times A \longrightarrow X, \qquad (x,a) \longmapsto x.a = x.\theta(a)$$

یک A- مدول باناخ است. اکنون فرض کنید برای هر B- مدول باناخ X، $D: B \longrightarrow X$ یک مشتق پیوسته باشد. نشان می‌دهیم این مشتق، تقریباً درونی است. به سادگی می‌توان دید که $Do\theta$ یک مشتق پیوسته از جبر باناخ A به توی A- مدول باناخ X است. زیرا برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$Do\theta(ab) = D\big(\theta(ab)\big) = D\big(\theta(a)\theta(b)\big)$$

$$= D\ (\ \theta(a)\ ).\theta\ (b) + \theta(a).D\ (\ \theta(b))$$

$$= Do\theta(a).\theta(b) + \theta(a).Do\theta(b).$$

پیوستگی $Do\theta$ نیز از پیوسته بودن D و θ نتیجه می شود. اما بنا به فرض چون A میانگین پذیر است . پس $Do\theta$ یک مشتق تقریباً درونی است لذا یک تور کراندار $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در X وجود دارد به طوری که برای هر $\theta(a) \in B$ داریم:

$$D\left(\theta(a)\right) = \lim_{\alpha}\left(\theta(a).x_\alpha - x_\alpha.\theta(a)\right) \qquad (۲۰۲)$$

حال چون برد $\theta: A \longrightarrow B$ در B چگال است لذا برای هر $b \in B$ ، تور کراندار $(a_i)_{i\in I}$ در A وجود دارد به طوری که $\theta(a_i) \longrightarrow b$. از طرفی چون مشتق D پیوسته است لذا $D\left(\theta(a_i)\right) \longrightarrow D(b)$. لذا باتوجه به رابطه (۲.۲) داریم:

$$D(b) = \lim_{\alpha}(b.x_\alpha - x_\alpha.b)$$

و این یعنی مشتق D تقریباً درونی است و در نتیجه B میانگین‌پذیر است.

نتیجه ۷.۲ فرض کنید A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر و I یک ایده‌ال بسته از آن باشد. آنگاه A/I میانگین‌پذیر است.

اثبات : چون نگاشت متعارف $k: A \rightarrow A/\,I$ پیوسته و برو می باشد لذا حکم از گزاره قبل بدست می آید.

قضیه ۸.۲ فرض کنید I یک ایده‌ال بسته از جبر باناخ A باشد. اگر I و A/I میانگین‌پذیر باشند، آنگاه A میانگین‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید E یک A- مدول باناخ و $D: A \longrightarrow E^*$ یک مشتق پیوسته باشد. آنگاه $D|_I: I \longrightarrow E^*$ نیز یک مشتق پیوسته است. چون I میانگین‌پذیر است، لذا $\Phi_1 \in E^*$ وجود دارد به طوری که $D|_I = \delta_{\Phi_1}$.

فرض کنید که $\widetilde{D} = \mathrm{D} - \delta_{\Phi_1}$ ، آنگاه واضح است که برای هر $a\epsilon\, I$, $\widetilde{D}(a) =\circ$. زیرا

$$\widetilde{D}(a) = D(a) - \delta_{\Phi_1}(a) =\circ.$$

لذا اگرنگاشت $\widetilde{D}$ از $A/\,I$ به E^* را بوسیله $\widetilde{D}\ (\alpha + I) = \widetilde{D}\ (\alpha)$ تعریف کنیم، آنگاه $\widetilde{D}$ خوش تعریف است. قرار می‌دهیم:

$$F := \{\Psi \in E^*: \quad a.\Psi = \Psi.a =\circ \qquad (a \in I)\},$$

$$E_\circ := lin\{a.x + y.b: \quad a, b \in I, \qquad x, y \in E\}.$$

آنگاه $F \cong (E/E_\circ)^*$ یک دوگان A/I- مدول باناخ است. اکنون فرض کنید $a \in I$ و $b \in A$. چون I یک ایده‌ال A است پس $ab, ba \in I$. لذا $\widetilde{D}(ab) = \widetilde{D}(a).b + a.\widetilde{D}(b) = a.\widetilde{D}(b)$ زیرا $(a \in I)$. هم‌چنین $\widetilde{D}(ab) = \circ$. در نتیجه $a.\widetilde{D}(b) = \circ$ و به طور مشابه $\widetilde{D}(b).a = \circ$. لذا $\widetilde{D}(b) \in F$.

در این صورت $\widetilde{D}(A/I) \subseteq F$. چون $\widetilde{D}: A/I \longrightarrow F \subseteq E^*$ یک مشتق و A/I درونی است لذا $\Phi_2 \in F$ وجود دارد به طوری که $\widetilde{D} = \delta_{\Phi_2}$. بنابراین

$$D = \widetilde{D} + \delta_{\Phi_1} = \delta_{\Phi_1} + \delta_{\Phi_2}$$

$$= a.\Phi_1 - \Phi_1.a + a.\Phi_2 - \Phi_2.a$$

$$= a.(\Phi_1 + \Phi_2) - (\Phi_1 + \Phi_2).a$$

$$= \delta_{\Phi_1 + \Phi_2}\,.$$

و این یعنی D یک مشتق درونی است.

گزاره ۹.۲ فرض کنید X یک A- مدول باناخ و Y زیرمدول بسته از X باشد. اگر $H^1(A, Y^*) = \{\circ\}$ و $H^1(A, (X/Y)^*) = \{\circ\}$، آنگاه $H^1(A, X^*) = \{\circ\}$.

اثبات: فرض کنید برای هر A- مدول باناخ X، $D: A \longrightarrow X^*$ یک مشتق باشد، و فرض کنید $\pi: X^* \longrightarrow Y^*$ الحاقی نگاشت شمول $i: Y \longrightarrow X$ باشد. آنگاه π یک هومومرفیسم A- مدول است و $\pi o D: A \longrightarrow Y^*$ یک مشتق است زیرا برای هر $a, b \in A$، داریم:

$$\pi o D(ab) = \pi\big(D(ab)\big) = \pi\big(D(a).b + a.D(b)\big)$$

$$= \pi o D(a).b + a.\pi o D(b).$$

از طرفی چون بنا به فرض $H^1(A, Y^*) = \{\circ\}$، لذا $\pi o D$ یک مشتق درونی است. در نتیجه عنصری از Y^* مانند y^* موجود است به طوری که برای هر $a \in A$، $\pi o D(y^*) = a.y^* - y^*.a = \delta_{y^*}$.

بنا به قضیه گسترش هان- باناخ $x^* \in X^*$ وجود دارد به طوری که x^* روی Y با y^* برابر است.

در این صورت $d = D - \delta_{x^*}: A \to Y^\perp \subseteq X^*$ یک مشتق است، اما $Y^\perp \cong (X/Y)^*$. لذا چون بنا به فرض، $H^1(A, (X/Y)^*) = \{0\}$، بنابراین d یک مشتق درونی است. لذا $x_1^* \in Y^\perp \subseteq X^*$ وجود دارد به طوری که $d = a. x_1^* - x_1^*. a = \delta_{x_1^*}$. بنابراین

$$D = \delta_{x_1^*} + \delta_{x^*} = a. x_1^* - x_1^*. a + a. x^* - x^*. a$$

$$= a(x^* + x_1^*) - (x^* + x_1^*). a$$

$$= \delta_{(x^* + x_1^*)}.$$

و این یعنی D یک مشتق درونی است.

گزاره ۱۰.۲ فرض کنید X یک A- مدول باناخ و Y یک زیرمدول بسته از X باشد. اگر $H^1(A, X^*) = \{0\}$ و دنباله دقیق

$$\{0\} \longrightarrow Y^\perp \overset{i}{\to} X^* \overset{\pi}{\to} \frac{X^*}{Y^\perp} \longrightarrow \{0\} \qquad (۳.۲)$$

از A- مدولهای باناخ شکافته شود، آنگاه $H^1(A, Y^*) = \{0\}$.

اثبات: فرض کنید $D: A \longrightarrow Y^*$ یک مشتق باشد. چون دنباله (3.2) یک دنباله دقیق تجزیه است، لذا π یک معکوس راست مانند $\Phi: \frac{X^*}{Y^\perp} \longrightarrow X^*$ دارد به طوری که Φ یک هومومورفیسم A- مدول است.

اما می‌دانیم $Y^* \cong \left(\frac{X^*}{Y^\perp}\right)$. لذا $\Phi o D: A \longrightarrow X^*$ یک مشتق است زیرا برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\Phi o D(ab) = \Phi\big(D(ab)\big) = \Phi\big(D(a). b + a. \Phi(b)\big)$$

$$= \Phi o D(a). b + a. \Phi o D(b).$$

از طرفی چون بنا به فرض $H^1(A,X^*)=\{\circ\}$، لذا $f\in X^*$ وجود دارد به طوری که $\Phi\, oD(f)=a.f-f.a=\delta_f$. بنابراین $\pi o\Phi D=\pi o\delta_f$. و این نشان می‌دهد که $id_{Y^*}oD=\delta_{\pi(f)}$ و بنابراین $D=\delta_{\pi(f)}$و این یعنی D یک مشتق درونی است.

گزاره ۱۱.۲ فرض کنید A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی کراندار و X یک A- مدول باناخ باشد به طوری که $A.X=\{\circ\}$. آنگاه $H^1(A,X^*)=\{\circ\}$.

اثبات: واضح است که $X^*.A=\{\circ\}$. فرض کنید $D:A\longrightarrow X^*$ یک مشتق پیوسته باشد. در این صورت برای هر $a,b\in A$ داریم،

$$D(ab)=D(a).b+a.D(b)=a.D(b).$$

فرض کنید تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک همانی تقریبی کراندار راست برای A باشد، فرض کنید $\Phi\in E^*$ یک نقطه چسبیدگی ضعیف- ستاره $\big(D(e_\alpha)\big)_\alpha$ باشد. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد که $\Phi=\lim\limits_{\alpha} D(e_\alpha)$ در توپولوژی ضعیف- ستاره. بنابراین

$$\Phi=\lim_{\alpha} D(ae_\alpha)=\lim_{\alpha} a.D(e_\alpha)=a.\Phi, \qquad (a\in A)$$

بنابراین $D=\delta_\Phi$. و این یعنی D یک مشتق درونی است.

قضیه ۱۲.۲ فرض کنید A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی کراندار باشد، آنگاه $H^1(A,X^*)=\{\circ\}$ برای هر A- مدول باناخ X، اگر و تنها اگر برای هر A- مدول باناخ تجزیه‌پذیر، $H^1(A,X^*)=\{\circ\}$.

اثبات:

۲ $\Longrightarrow$ ۱) بوضوح برقرار است

۱ $\Longrightarrow$ ۲) فرض کنید E یک A- مدول باناخ دلخواه و $D:A\longrightarrow E^*$ یک مشتق باشد.فرض کنید

$$E_\circ:=\{a.x.b:\quad a,b\in A,\quad x\in E\}$$

بنا به قضیه تجزیه کوهن، $E_\circ$ یک زیرمدول بسته از E است. فرض کنید $\pi: E^* \longrightarrow E_\circ^*$ الحاق نگاشت $i: E_\circ \longrightarrow E$ باشد، آنگاه π یک هومومورفیسم A- مدولی است و همچنین $\pi o D: A \longrightarrow E_\circ^*$ یک مشتق پیوسته است زیرا برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\pi o D(ab) = \pi\big(D(ab)\big) = \pi\big(D(a).b + a.D(b)\big)$$

$$= \pi o D(a).b + a.\pi o D(b).$$

چون بنابه فرض $H^1(A, X^*) = \{\circ\}$، لذا $\pi o D$ یک مشتق درونی است. در نتیجه $\Phi_\circ \in E_\circ^*$ موجود است به طوری که برای هر $a \in A$،

$$\pi o D(\Phi_\circ) = a.\Phi_\circ - \Phi_\circ.a = \delta_{\Phi_\circ}$$

بنا به قضیه گسترش هان- باناخ $\Phi \in E^*$ وجود دارد به طوری که تحدید Φ به E^* برابر $\Phi_\circ$ است.

بنابراین $\widetilde{D} = D - \delta_{\Phi_\circ} = D - \delta_{\Phi}: A \to E_\circ^\perp$ یک مشتق است. از طرفی داریم $E_\circ^\perp \cong (E/E_\circ)^*$. باتوجه به تعریف $E_\circ$، $A.(E/E_\circ) = \{\circ\}$. لذا بنا به گزاره قبل $H^1(A, (E/E_\circ)^*) = \{\circ\}$.

بنابراین مشتق $\widetilde{D}: A \to E_\circ^\perp$ یک مشتق درونی است. در نتیجه $\Psi \in E_\circ^\perp$ موجود است به طوری که برای هر $a \in A$ ، $\widetilde{D}(a) = a.\Psi - \Psi.a = \delta_\Psi$. بنابراین

$$D = \delta_\Psi + \delta_\Phi = (a.\Psi - \Psi.a) + (a.\Phi - \Phi.a)$$

$$= a(\Psi + \Phi) - (\Psi + \Phi).a$$

$$= \delta_{\Psi+\Phi}.$$

لذا D یک مشتق درونی است.

قضیه ۱۳.۲ فرض کنید A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر باشد آنگاه A دارای همانی تقریبی کراندار است.

اثبات: گیریم X یک A- مدول باناخ با فضای خطی یکسان A و مجهز با ساختارهای مدولی زیر باشد.