دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده‌ی علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی‌ارشد (M.Sc.)

گرایش: تحقیق در عملیات

عنوان:

مدل‌سازی و حل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت و متغیر در زنجیره‌ی تأمین دو مرحله‌ای با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری

استاد راهنما:

دکتر مسعود صانعی

استاد مشاور:

دکتر قاسم توحیدی

پژوهشگر:

محمد میرصالحی

تابستان ۱۳۹۲

تقدیم به:

چکیده

در این پایان‌نامه مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت ارائه شده است به‌گونه‌ای که از این هزینه‌ی ثابت با نام هزینه‌ی راه‌اندازی یاد می‌شود. این مسأله از جمله مسائل چند وجهی سخت یا N.P می‌باشد که الگوریتم‌های فراابتکاری زیادی برای حل آن ارائه شده است. علی‌رغم یافته‌ها در سال‌های گذشته، الگوریتم ژنتیک یک روش پیشتاز بر اساس درخت فراگیر برای طراحی یک کروموزوم می‌باشد که نیاز به روش ترمیم برای میسر بودن ندارد. روش ارائه شده در این پایان‌نامه در حقیقت تصحیح روش‌های گذشته بوده چرا که آن روش‌ها در بعضی از موقعیت‌ها درخت حمل و نقل را ایجاد نمی‌کردند و علاوه بر این در این پایان‌نامه درخت حمل و نقل را با تمامی کروموزوم‌های محتمل طراحی کرده و برخی از اپراتورهای جهشی توسعه‌یافته در این کار تحقیقاتی به کار رفته‌اند. به علّت نقش مهم آن‌ها در کیفیت الگوریتم اپراتورها و پارامترها نیازمند درجه‌بندی صحیح برای اطمینان از بهترین عملکرد است، به همین منظور مسائل در اندازه مختلف به صورت تصادفی ایجاد شده و یک درجه‌بندی محکم بر پارامترهای به کار رفته در روش تاگوچی اعمال می‌شود و دو مسأله در اندازه‌های مختلف برای ارزیابی عملکرد الگوریتم ارائه شده حل می‌شود و با نتایج قبلی و نرم‌افزار LINGO مقایسه می‌شود.

فهرست مطالب

۱ پیش‌گفتار **۱**

۱-۱ بیان مسأله: ۲

۱-۲ اهمیت موضوع ۳

۱-۳ تاریخچه ۳

۱-۴ سؤالات تحقیق ۳

۱-۵ هدف تحقیق ۴

۱-۶ مروری بر فصل‌های آینده ۴

۲ حمل و نقل و الگوریتم‌هایی برای حل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت **۵**

۲-۱ مقدمه ۵
۲-۲ تعریف مسأله حمل و نقل ۶
۲-۲-۱ نمایش ستون‌های متناظر غیراساسی در جدول حمل و نقل . . . ۱۱
۲-۲-۲ شدنی مسأله حمل و نقل ۱۲
۲-۳ الگوریتم حمل و نقل ۱۳
۲-۳-۱ یک جواب پایه‌ای آغازین ۱۳
۲-۳-۱-۱ روش گوشه شمال‌غربی ۱۳
۲-۳-۱-۲ روش کمترین هزینه ۱۵
۲-۳-۲ تعیین بهینگی جدول حمل و نقل ۱۷
۲-۳-۲-۱ محاسبه‌ی در هر خانه‌ی غیرپایه‌ای ۱۸
۲-۳-۳ محاسبه‌ی $z_{ij}|c_{ij}$ متغیرهای غیراساسی و تعیین متغیر ورودی با استفاده از روش پله سنگ ۱۹
۲-۳-۴ روش توزیع تعدیل شده یا روش u-v ۲۰
۲-۴ الگوریتم‌هایی برای حل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت ۲۲
۲-۵ مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت مرحله‌ای و مدل آن ۲۹
۲-۶ تعداد متغیرهای مثبت در یک راه حل که به جواب بهینه منتج می‌شود. ۳۰
۲-۷ الگوریتم مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت مرحله‌ای ۳۱

۳ الگوریتم‌های فراابتکاری ۴۰

۳-۱ مقدمه ۴۰

۲-۳ مدل‌های بهینه‌سازی ۴۱
۳-۳ چه موقع از فرا ابتکاری‌ها استفاده می‌شود؟ ۴۲
۴-۳ مفاهیم رایج در فرا ابتکاری‌ها ۴۵
۳-۴-۰-۱ نمایش راه حل‌ها ۴۵
۳-۴-۱ کدگذاری دودویی ۴۶
۳-۴-۲ کدگذاری ترتیبی ۴۶
۳-۴-۳ کدگذاری ارزشی ۴۷
۳-۴-۴ مسائل مرتبط با کدگذاری ۴۷
۳-۴-۵ تابع هدف ۴۹
۵-۳ الگوریتم ژنتیک ۵۰
۳-۵-۱ محاسبات تکاملی ۵۰
۳-۵-۲ کلیات الگوریتم ژنتیک ۵۳
۳-۵-۲-۱ سلول ۵۳
۳-۵-۲-۲ کروموزوم ۵۴
۳-۵-۲-۳ ژنتیک ۵۵
۳-۵-۲-۴ تولیدمثل ۵۶
۳-۵-۳ فضای جستجو ۵۸
۳-۵-۴ دنیای الگوریتم‌های ژنتیک ۵۹
۶-۳ یک الگوریتم ژنتیک ساده ۵۹
۷-۳ اجزای الگوریتم ژنتیک ۶۲

۳-۷-۱ کروموزوم ۶۳
۳-۷-۲ جمعیت ۶۳
۳-۷-۳ مقدار برازندگی ۶۴
۳-۷-۴ کدگذاری ۶۵
۳-۷-۵ انتخاب ۶۵
۳-۷-۵-۱ چرخ رولت ۶۷
۳-۷-۵-۲ روش تصادفی ۶۸
۳-۷-۵-۳ روش رقابتی ۶۸
۳-۷-۶ عملگر تقاطعی (ترکیب مجدد) ۶۸
۳-۷-۷ جهش ۷۰
۳-۷-۸ قاعده توقف ۷۱

۴ حل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت مرحله‌ای با استفاده از الگوریتم ژنتیک ۷۳

۴-۱ مدل ریاضی و توضیحات ۷۴
۴-۲ مدل ریاضی مسأله‌ی حمل و نقل دو مرحله‌ای با هزینه‌ی ثابت ۷۵
۴-۳ الگوریتم ژنتیک مسأله ۷۷
۴-۴ ارائه‌ی الگوریتم ژنتیکی برای درخت فراگیر ۷۸
۴-۵ روند انتخاب ۷۹
۴-۶ اپراتورهای ژنتیک ۷۹
۴-۶-۱ تولید دوباره ۷۹

۴-۶-۲ تقاطع ۷۹
۴-۶-۲-۱ تفسیر اول تقاطع یک نقطه‌ی تعدیل‌شده . . . ۸۰
۴-۶-۲-۲ تفسیر دوم تقاطع یک نقطه‌ی تعدیل‌شده . . . ۸۰
۴-۶-۲-۳ تفسیر اول تقاطع دو نقطه‌ای تعدیل‌شده ۸۱
۴-۶-۲-۴ تفسیر دوم تقاطع دو نقطه‌ای تعدیل‌شده ۸۲
۴-۶-۲-۵ تفسیر اول تعدیل‌شده بر مبنای موقعیت تقاطع . ۸۲
۴-۶-۲-۶ تفسیر دوم اصلاح بر مبنای موقعیت تقاطع . . ۸۳
۴-۶-۳ جهش ۸۴
۴-۷ روش کلی ۸۶
۴-۷-۱ طراحی تجربی ۸۸
۴-۷-۲ طراحی با پارامترهای تاگوچی ۸۸
۴-۸ نتایج تجربی ۹۰
۴-۹ مثال‌های عددی ۹۲

۵ نتیجه‌گیری ۱۰۰

فهرست جداول

۲-۱ جدول حمل و نقل ۸

۲-۲ مثالی از روش گوشه‌ی شمال‌غربی ۱۵

۲-۳ مثالی از روش کمترین هزینه ۱۷

۲-۴ مقادیر هزینه‌های ثابت و متغیر ۲۷

۲-۵ مقدار هزینه به دست آمده توسط رابطه‌ی (a) ۲۸

۲-۶ مقدار $\{x'_{ij}\}$ به دست آمده ۲۸

۲-۷ مقادیر عرضه و تقاضا و هزینه‌ی متغیر ۳۳

۲-۸ مقادیر هزینه‌های ثابت و متغیر ۳۴

۲-۹ هزینه‌های به دست آمده توسط روش فوق ۳۵

۲-۱۰ جمع مقادیر هزینه‌های متغیر با مقادیر جدول ۶٫۲ . . . . . ۳۵

۲-۱۱ جدول بهینه ۳۶

۲-۱۲ جدول به دست آمده توسط روش v-u ۳۶

۲-۱۳ . . . . . ۳۷

۲-۱۴ . . . . . ۳۸

۲-۱۵ جدول بهینه ۳۸

۲-۱۶ . . . . . ۳۹

۳-۱ مقایسه بین اصطلاحات رایج در الگوریتم ژنتیک و تکامل طبیعی ۵۸

۳-۲ انتخاب کروموزوم با استفاده از مدل چرخ رولت ۶۷

۴-۱ . . . . . ۹۰

۴-۲ . . . . . ۹۶

۴-۳ . . . . . ۹۶

۴-۴ . . . . . ۹۶

۴-۵ جدول بهینه توسط جو در سال ۲۰۰۷ برای سایز مسأله‌ی ۵ × ۴ . . . . . ۹۷

۴-۶ جدول بهینه به‌وسیله‌ی نرم‌افزار LINGO برای سایز مسأله‌ی ۵ × ۴ . . . . . ۹۷

۴-۷ جدول بهینه به‌وسیله‌ی الگوریتم ارائه شده برای مسأله‌ی ۵ × ۴ . . . . . ۹۸

۴-۸ جدول بهینه توسط جو در سال ۲۰۰۷ برای مسأله‌ی ۱۰ × ۵ . . . . . ۹۸

۴-۹ جدول بهینه توسط نرم‌افزار LINGO برای مسأله‌ی ۱۰ × ۵ . . . . . ۹۹

۴-۱۰ ماتریس تخصیص‌یافته‌ی حمل و نقل برای مسأله‌ی ۱۰ × ۵ . . . . . ۹۹

فصل ۱

پیش‌گفتار

مدل حمل و نقل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با ساختار شبکه است. در این پایان‌نامه به مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت مرحله‌ای پرداخته شده است.

مدل‌سازی مسأله به این صورت است که یک مدل ریاضی کلی برای مسأله ساخته می‌شود. مدل‌ساز ممکن است از مدل‌های مشابه کمک بگیرد که این گام موجب تجزیه‌ی مسأله به یک یا چند مدل بهینه می‌گردد. معمولاً مدل‌هایی که حل می‌شوند، ساده شده مسائل واقعی هستند و در این مدل‌ها از تقریب و حذف برخی از فرآیندها پیچیده‌ی واقعی استفاده می‌گردد.

۱-۱ بیان مسأله:

مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت[1] یکی از مسائل مهم حمل و نقل می‌باشد. هدف از حل این مسأله حداقل‌کردن هزینه‌ی حمل از منبع به مقصد می‌باشد که این هزینه‌ی حمل علاوه بر هزینه‌های متغیر شامل هزینه‌های ثابت نیز می‌باشد.

در این پایان‌نامه برای حل مسأله از الگوریتم‌های فرابتکاری و از جمله الگوریتم ژنتیک استفاده می‌شود. در سال ۲۰۰۶ میتسوگن[2] مدل مسأله‌ی حمل و نقل را به مدل دومرحله‌ای گسترش داد و زنجیره‌ی تأمین که نمایانگر نظم در بهینه‌سازی تحویل کالا و خدمات از عرضه‌کننده به مصرف‌کننده است را معرفی کرد.

طراحی شبکه‌ی حمل و نقل یکی از بخش‌های مدیریت زنجیره‌ی تأمین است. این طرح ارائه‌کننده‌ی پتانسیل بالای کاهش هزینه و بهبودبخشیدن به کیفیت خدمات است. و در این پایان‌نامه توسعه و گسترش مدل مسأله‌ی حمل و نقل دومرحله‌ای در نظرگرفته می‌شود و علاوه بر آن هزینه‌ی سخت‌افزاری حمل و نقل که شامل مراکز توزیع قیمت‌ها و از مراکز توزیع‌ها به مصرف‌کننده است، محدود شده است.

بسیاری از سازمان‌ها و بنگاه‌های دولتی که در صدد دستیابی به عملکرد مطلوب و کارایی بیشتر در حوزه‌ی رقابتی بازار هستند، پتانسیل عملکرد در زنجیره‌ی تأمین را دریافته‌اند. لذا در حال حاضر تغییراتی که در زمینه‌ی فعالیت‌های اقتصادی و نیز پیچیده‌تر شدن این فعالیت‌ها به وجود آمده آنها را بر آن داشته که رویکرد نوینی جهت بهبود کیفیت و فعالیت‌های خود برگزینند که از طرفی زنجیره‌ی تأمین تنها گزینه‌ی موافق موفق در عرصه‌ی رقابت بازار و جواب‌دهی بهتر به نیاز مشتریان در سراسر جهان می‌باشد. درواقع زنجیره‌ی تأمین بر منافع و مزیت‌های کلی و بلندمدت برای تمامی اعضاء زنجیره از طریق همکاری و تسهیم اطلاعات تأکید دارد.

1. Fixed charge transportation problem 2. Mitsugen

۱-۲ اهمیت موضوع

هدف در این پایان‌نامه حل مسئله‌ی حمل و نقل با هزینه ی ثابت است. از آنجا که مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت غیرخطی و از نوع مسائل با رده‌ی NP-hard است به‌راحتی قابل حل نیست و روش‌های معدودی برای حل آن ارائه شده است.

در این پایان‌نامه روش‌های ابتکاری برای حل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت ارائه شده است و این مسأله توسط الگوریتم ژنتیک و نرم‌افزار LINGO مورد بررسی قرار گرفته است.

۱-۳ تاریخچه

مدل‌سازی و حل مسأله‌ی حمل و نقل در سال ۱۹۴۶ توسط هیچکاک[1] ابداع گزدید و بعد از آن پژوهش‌های بسیاری روی این مسأله انجام گرفت و در سال ۲۰۰۶ میتسوگن موفق به معرفی مسأله‌ی حمل و نقل دو مرحله‌ای شد.

مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت اولین بار توسط بالینسکی در سال ۱۹۴۷ با یک روش ابتکاری حل شد که در این پایان‌نامه این روش در کنار روش‌های ابتکاری دیگر ذکر شده است.

۱-۴ سؤالات تحقیق

۱) عوامل و شاخص‌های مؤثر در الگوریتم‌های فراابتکاری چیست؟

۲) چه روش‌ها و تکنینک‌هایی در تحلیل طراحی این مدل‌ها و ارتباط آن‌ها با زنجیره‌ی تأمین مؤثر می‌باشد؟

۳) چگونه می‌توان از الگوریتم ژنتیک برای طراحی مدل‌های حمل و نقل استفاده کرد؟

1. Hichkock

۱-۵ هدف تحقیق

هدف اصلی، مدل‌سازی و حل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت در زنجیره‌ی تأمین دومرحله‌ای با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری می‌باشد. به‌طوریکه بر اساس شرایط موردنیاز طراحی شود و بعد از طراحی مورد توجه، بازنگری و کنترل قرار بگیرد از این رو با به‌کارگیری مدل‌های حمل و نقل می‌توان نقش کارساز و مؤثری در زنجیره‌ی تأمین ایفا کرد که هر یک از موارد فوق می‌توانند نقاط ضعف و قوت زنجیره‌ی تأمین را مشخص سازد.

۱-۶ مروری بر فصل‌های آینده

در فصل دوم ابتدا به معرفی مسأله‌ی حمل و نقل و روش‌های یافتن جواب شدنی و رسیدن به جواب بهینه پرداخته و سپس مدل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت را ارائه داده و روش‌های فراباتکاری برای حل مسلأله که توسط بالینسکی[1] در سال ۱۹۴۷ و آدلاخا و کوالسکی[2] بیان شده است، ارائه می‌گردد. در فصل سوم به معرفی الگوریتم‌های فراابتکاری و از جمله الگوریتم ژنتیک ئرداخته و در فصل چهارم روش‌های ارائه شده روی مثال‌های عددی اجرا می‌شوند و در فصل پنجم نتیجه‌گیری ارائه شده است.

1. Balinski 2. Adlakha & Kowalski

فصل ۲

حمل و نقل و الگوریتم‌هایی برای حل مسأله‌ی حمل و نقل با هزینه‌ی ثابت

۲-۱ مقدمه

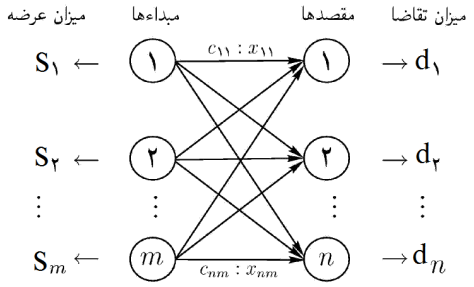
مدل حمل و نقل، یک ردهٔ خاصی از مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی است. این مدل با وضعیتی سروکار دارد که یک کالا از مبدأهائی (مثل کارخانه‌ها) به مقصدهائی (مثل فروشگاه‌ها) ارسال می‌شود. هدف، تعیین زمان‌بندی ارسال است که ضمن برقراری محدودیت‌های عرضه و تقاضا، مجموع هزینه‌ی ترابری را مینیمم کند. در این مدل فرض می‌شود که هزینه‌ی ترابری در یک مسیر معین، با تعداد واحدهای ارسالی در آن مسیر نسبت مستقیم

دارد. در حالت کلی، مدل حمل و نقل را می‌توان به زمینه‌هایی، به‌جز ترابری مستقیم یک کالا، از جمله شامل کنترل موجودی، زمان‌بندی استخدام، و تخصیص نیروی انسانی تعمیم داد.

اگرچه، مدل حمل و نقل می‌تواند به‌عنوان یک برنامه‌ریزی خطی معمولی حل گردد، ولی ساختار خاص آن امکان گسترش الگوریتم محاسباتی براساس سیمپلکس را فراهم می‌نماید. با این ساختار می‌توان از روابط اولیه‌ـدوگان برای ساده کردن محاسبات استفاده کرد. مسأله حمل و نقل حالت خاصی از برنامه‌ریزی خطی با ساختار شبکه‌ای است.

۲-۲ تعریف مسأله حمل و نقل

مسأله حمل و نقل در حالت کلی دارای m مبدأ و n مقصد است. این مسأله با گراف شکل ۱.۱ نشان داده شده است که در آن هر گره نشان‌دهنده‌ی مبدأها و مقصدهاست و نیز هر کمان نشان‌دهنده مسیر بین مبدأها و مقصدهاست. کمان (i, j) مبدأ iام را به مقصد jام وصل می‌کند، این کمان دارای دو ویژگی است: هزینه انتقال یک واحد یعنی c_{ij} و مقدار ارسالی یعنی، x_{ij}.



شکل ۱.۲: نمایش مدل حمل و نقل با گره‌ها و کمان‌ها

مقدار عرضه در مبدأ i، s_i مقدار تقاضا و در مقصد j، d_j است. در این مدل هدف تعیین مجهولات

x_{ij} است که ضمن برقراری همه‌ی محدودیت‌های عرضه و تقاضا مجموع هزینه‌ی حمل و نقل را مینیمم کند.

الگوریتم حمل و نقل براساس فرض متعادل بودن مدل است یعنی، فرض می‌شود که عرضه‌ی کل با تقاضای کل برابر هستند. به عبارت دیگر،

$$\sum_{i=۱}^{m} s_i = \sum_{j=۱}^{n} d_j. \tag{۱.۲}$$

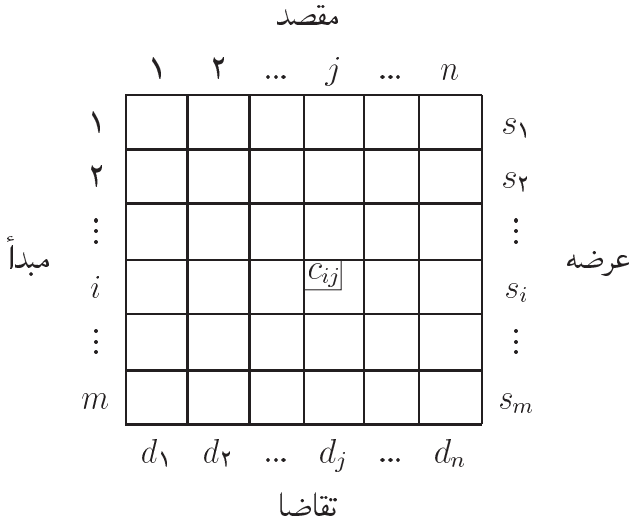
اگر تقاضای کل کوچک‌تر از عرضه کل باشد با ایجاد یک مقصد مجازی با تقاضایی برابر مقدار مازاد و اگر تقاضای کل بیشتر باشد با ایجاد یک منبع مجازی با عرضه‌ای برابر مقدارکمبود تساوی (۲.۱) تضمین می‌گردد. مدل ریاضی استاندارد برای این مسأله عبارت است از

$$\begin{aligned} \min\ z = & \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = s_i,\ i = ۱,\dots,m, \\ & \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} = d_j,\ j = ۱,\dots,n, \\ & x_{ij} \geqslant ۰, \qquad \forall i = ۱,\dots,m,\ \forall j:\ j = ۱,\dots,n. \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

هم‌چنین، این مسأله را می‌توان با جدول حمل و نقل ارائه کرد. در این پایان‌نامه، سعی بر این است که فرم جدولی مورد بحث قرار گیرد.

در جدول حمل و نقل اگر سطرهای ۱،...، m گره‌های مبدأ و ستون‌های ۱،...، n گره‌های مقصد و خانه‌ی سطر iام و ستون jام متغیر جریان x_{ij} باشند، ضریب هزینه‌ی متناظر c_{ij} همانند آن‌چه که در خانه‌ی (i,j) نشان داده شده است نمایش داده می‌شود.

جدول ۲-۱: جدول حمل و نقل



مسأله حمل و نقل را می‌توان در قالب ماتریسی مطرح کرد. اگر فرض کنید:

$$x = (x_{۱۱}, x_{۱۲}, \ldots, x_{۱n}, x_{۲۱}, \ldots, x_{۲n}, \ldots, x_{mn})^t$$
$$c = (c_{۱۱}, c_{۱۲}, \ldots, c_{۱n}, c_{۲۱}, \ldots, c_{۲n}, \ldots, c_{mn})^t$$
$$b = (s_۱, s_۲, \ldots, s_m, -d_۱, -d_۲, \ldots, -d_n)$$
$$A = (a_{۱۱}, a_{۱۲}, \ldots, a_{۱n}, a_{۲۱}, \ldots, a_{۲n}, \ldots, a_{mn})^t$$

که در آن

$$a_{ij} = e_i - e_{m+j}$$

e_i و e_{m+j} بردارهای واحد در R^{m+n} هستند، هم‌چنین یک‌ها به ترتیب در iامین و $(m+j)$امین مکان قرار

دارند. با این تعاریف مسأله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &\text{s.t.}\ \ Ax = b, \\ &\qquad x \geqslant ۰. \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

شکل ماتریس A که از بعد $(m+n)\times mn$ به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & ۰ & \dots & ۰ \\ 1 & ۰ & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & 1 \\ -I & -I & \dots & -I \end{bmatrix}$$

که در آن ۱ یک بردار nـسطری از تمام عناصر ۱ و I یک ماتریس واحد $n\times n$ است. با این ماتریس A، مسأله حمل و نقل در ساختار خاص خود خلاصه می‌شود.

به‌عنوان مثال، یک مسأله حمل و نقل با ۲ مبدأ و ۳ مقصد را درنظر بگیرید. با داده‌های نشان داده شده در زیر

		مقصد ۱	مقصد ۲	مقصد ۳	s_i
مبدأ	۱	$c_{۱۱}=۴$	$c_{۱۲}=۷$	$c_{۱۳}=۵$	۳۰
	۲	$c_{۲۱}=۲$	$c_{۲۲}=۴$	$c_{۲۳}=۳$	۲۰
	d_j	۱۵	۱۰	۲۵	

برای این مسأله ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

برخی از خواص ماتریس A را بررسی می‌کنیم. به‌وضوح، $\text{rank}A \neq m+n$، چون مجموع سطرها مساوی صفر است. در واقع رتبه‌ی ماتریس A برابر $m+n-۱$ است. از این رو دو انتخاب برای یک پایه در اختیار داریم، یا آخرین سطر یا هر سطر دلخواهی را حذف کنیم و حاصل $m+n-۱$ محدودیت مستقل خطی است که به‌ازای آن یک پایه موجود است یا یک متغیر مصنوعی به یک محدودیت اضافه کنیم. هنگامی که روش سیمپلکس به‌کار می‌رود روش دوم و ماتریس الحاقی با یک متغیر مصنوعی جدید یا متغیر یال ریشه‌ی x_a با ستون e_{m+n} را انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب، با حذف یکی از محدودیت‌های مسأله بقیه‌ی محدودیت‌ها مستقل خطی هستند و پایه‌ی B به‌صورت

$$B = \begin{bmatrix} I_m & ۰ \\ ۰ & I_{n-۱} \end{bmatrix}$$

به‌دست می‌آید که یک ماتریس بالا مثلثی از مرتبه‌ی $m+n-۱$ است.

هم‌چنین ماتریس A را یک ماتریس تک کالبدی می‌نامند هرگاه دترمینان هر زیر ماتریس مربعی از آن ۰ و ۱+ و ۱- باشد و به‌عبارت دیگر هر پایه‌ی B از A و بنابراین معکوس آن دترمینان ± ۱ دارد. یعنی، تمام عنصر $B^{-۱}$، ± ۱ یا ۰ هستند.