**دانشگاه پیام نور**
**مرکز بابل**

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

**عنوان پایان نامه:**

# حل معادلات دیفرانسیل با استفاده ازروش تبدیل یافته دیفرانسیلی

نگارش:

**بهروزعرب فیروزجایی**

استاد راهنما:

**دکتر حسین جعفری**

استاد مشاور:

**دکتر سیامک فیروزیان**

**آذر 1390**

**تشکر وقدردانی:**

حمد خدایی را که اول همه ی آثار هستی اوست وقبل از او اولی نبوده وآخر است بی آنکه پس از او آخری باشد،(دعای اول صحیفه سجادیه)

برخود وظیفه می دانم از استاد راهنمای محترم،جناب آقای دکتر جعفری واستاد مشاور بزرگوارم جناب آقای دکتر فیروزیان نه تنها دراین پایان نامه بلکه در طول تحصیل این دوره برایم راهنما بوده - اند تشکر وقدردانی می نمایم.

همچنین از زحمات اساتید فرزانه آقایان دکتر وحیدی و دکتر ادبی تبار که در طول تحصیل من را در یادگیری علوم ریاضی کمک کرده اند، سپاسگزارم.

بهروزعرب فیروزجایی-آبان ماه1390

## تقدیم به پدر دلسوز و مادر صبور و همسر مهربانم

خداوند را بسی سپاس که توفیق حمد وثنایش رابه من داده وقدردان زحمات عزیزانی باشم که باصبر و از خود گذشتگی مرایاری نمودند. پدر ومادر مهربان همواره در زندگی بیشتر از وظیفه خود مایه گذاشتند. همسر عزیزم که سنگ صبور بودند

و همچنین از برادر عزیزم آقای محمد عرب که مرا راهنما بوده انداز همه این عزیزان سپاسگزارم.

# فهرست مندرجات

# فهرست جداول

## چکیده:

یکی از شاخه های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل علوم مهندسی و فیزیک دارد معادلات دیفرانسیل می باشد . روش های عددی متعددی برای بدست آوردن جواب های تقریبی وجود دارد.

در این پایان نامه ابتدا درفصل اول به تعاریف مفاهیم اولیه وتوابعی که در فصل های بعدی بکار می رودمی پردازد. در فصل دوم روش دیفرانسیل تبدیل یافته وانواع آن شرح داده می شود. در فصل سوم مثال های عددی هریک از عناوین ذکر شده در فصل دوم پرداخته می شود . در فصل چهارم روش دیفرانسیل تبدیل یافته باسایر روش ها مورد مقایسه قرار گرفته است و در پایان نتیجه گیری می باشد.



**کلمات کلیدی:** دیفرانسیل تبدیل یافته، معادله دیفرانسیل معمولی، معادله دیفرانسیل جزیی وکسری.

## پیشگفتار

هرمعادله مشتمل بریک متغیر وابسته ومشتقات نسبت به یک یاچند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل می نامند [11].بسیاری ازقوانین عمومی طبیعت (در فیزیک ،شیمی ،زیست شناسی ونجوم )طبیعی ترین بیان خودرا درزبان معادلات دیفرانسیل می یابند .کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین در خود ریاضیات، خصوصا درهندسه، ودرمهندسی ،اقتصاد وبسیاری از زمینه های دیگر علوم فراوانند.به همین دلیل ریاضیدان ها سعی دارند روش هایی ابداع کنند که جواب های عددی باخطای بسیارکم وحجم محاسبا ت اندک برای انواع معادلات دیفرانسیل بدست آورند . یکی ازاین روش ها روش دیفرانسیل تبدیل یافته است.

روش دیفرانسیل تبدیل یافته اولین بار توسط ژو[1] یک ریاضیدان چینی درسال 1986 میلادی معرفی شد. ایشان مسایل مقدار اولیه خطی وغیر خطی رابرای تجزیه وتحلیل مدار الکتریکی حل کرد.درسال 1996 هو[2] وچن[3] این روش رابرای معادلات دیفرانسیل جزیی گسترش دادند و ایاز [4] آن را برای معادلات دیفرانسیلی به کار برد.در روش تبدیل یافته با روش بسط تیلور بارتبه ای بالا متفاوت است که شامل محاسبه کردن ضرایبی از بسط تیلور درحل بکار برده شده است که این روش مقدار دامنه محاسباتی وکاربردی را برای بسیاری از مسایل به راحتی کاهش می دهد .در روش بسط تیلور نیاز به حجم عملیات زیادتری برای مرتبه های بالاتر است.

اساس روش تبدیل دیفرانسیلی مبتنی بر روش تیلور می باشدو روش تحلیلی وعددی می باشد .

درروش تیلور برای حل معادلات دیفرانسیل باید مشتقات مراتب بالاتر تابع رامحاسبه نمود که حجم

[1] Zhou
[2] Ho Shing-Huei
[3] Chen chao- Kuang
[4] Ayaze

محاسبات وپیچدگی و طولانی شدن زمان آن منج ر خواهد شد .که در روش دیفرانسیل تبدیل یافته این معایب کمی کاسته شده است .روش دیفرانسیل تبدیل یافته در واقع مشتقات تابع راحساب نمی کند بلکه دراین روش ،ارتباط مشتقات را با استفاده از یک روند تکراری محاسبه ودر پایان تقریبی از جواب رابه صورت یک سری تیلور متناهی بیان می کند .به بیان دیگر اینکه برای حل معادله دیفرانسیل ابتدا باید با استفاده از تعریف ها وخواص وفرمول های روش دیفرانسیل تبدیل یافته معادله اصلی وشرایط مرزی را به یک معادله جبری تبدیل نموده وباجایگزین نمودن مقادیر مختلف به دست آمده در معادله جبری حاصل ضرایب بسط تیلور جواب پایانی بدست آید ودر پایان جواب معادله را به شکل یک سری تیلور متناهی در می آورد.[6]

# فصل اول

# مفاهیم اولیه ومعرفی توابع خاص

**مقدمه:**

دراین فصل مفاهیم وتوابعی که درفصل های آتی به آنها نیاز پیدا می کنیم معرفی می شوند.

**تعریف 1.1** بسط دوجمله ای

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k} \qquad (1.1)$$

اگرnعددصحیح نامنفی باشد عبارت سمت راست یک سری متناهی است که به ازای جمیع مقادیر

aوxمساوی $(x+a)^n$است.

**تعریف2.1عملگرخطی:** عملگرL با این خاصیت که هرگاه اعمال آن بر

$f_1(x)$و$f_2(\mathrm{x})$و$c_1\mathrm{f}_1(\mathrm{x})+\mathrm{c}_2\mathrm{f}_2(\mathrm{x})$

که در آن $c_2$و$c_1$ ثابت های دلخواهی هستندکه معنی داشته باشدآنگاه

$$l[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)] = c_1 l[f_1(x)] + c_2 l[f_2(x)]$$

یک عملگر خطی نام دارد.

**تعریف 3.1مشتق پارامتری** : هرگاه $y=g(t)$و$x=f(t)$آنگاه داریم: $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}} \neq 0$ $\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \frac{\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}}{\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}}} \Longrightarrow$

**تعریف4.1 سری تیلور برای یک تابع دو متغیره** : هرگاه $f(x,y)$ از هرمرتبه مشتق جزیی داشته

باشدآنگاه

$$f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\right]$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_{0)}{}^2\right] + \cdots \quad (2.1)$$

سری تیلور$f(x,y)$حول نقطه $(x_0,y_0)$ نام دارد.

**تعریف 5.1 همگرایی یکنواخت یک سری نامتناهی:**گوییم سری نامتناهی

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

که مجموع جزیی nام آن

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) \qquad (3.1)$$

می باشد، به ازای $\alpha \leq x \leq \beta$ به طوریکنواخت همگراست اگربه ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N

وابسته به ε موجود باشد به طوری که به ازای جمیع مقادیر $n > N$ وتمام مقادیر x دربازه $(\alpha, \beta)$

داشته باشیم: $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$

هرگاه جملات یک سری به طور یکنواخت همگرا پیوسته باشند انگاه مجموع سری نیز پیوسته می

باشداین امردرموردهمگرایی غیر یکنواخت لزوما صادق نیست.

**تعریف 6.1 معادلات دیفرانسیل جزیی:** معادله ای که مشتمل بر بیش از یک متغیر مستقل است،

بنابراین مشتقات موجود در آن، مشتقات جزیی هستند . به عنوان مثال، هرگاه

$w = f(x, y, z, t)$ تابعی از زمان وسه مختص قائم یک نقطه در فضا باشد.

الف–بیضوی (معادله لاپلاس)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad ; \quad (4.1)$$

ب–سهموی(معادله حرارت)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ; \quad (5.1)$$

ج–هذلولی(معادله موج یک بعدی)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ; \quad (6.1)$$

این معادلات به ترتیب معادله لاپلاس ،معادله حرارت، معادله موج نامیده می شوند هرکدام ازاین معادلات درفیزیک نظری اهمیت زیادی دارد و مطالعه آنها موجب پیدایش بسیاری از نظرات مهم ریاضی شده است .معادلات دیفرانسیل جزیی عموما در فیزیک محیط های پیوسته پیش می آید .مانند مسایل مشتمل بر میدان های الکتریکی دینامیک سیالات ،پخش وحرکت موجی . نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی خیلی متفاوت وتقریبا از هر لحاظ بسیار مشکل تر است.

**تعریف 7.1 تفاضلات متناهی برای مشتق**

$$u(x+h)=u(x)+h\frac{u'(x)}{1!}+h^2\frac{u''(x)}{2!}+\cdots \qquad (7.1)$$

$$u(x-h)=u(x)-h\frac{u'(x)}{1!}+h^2\frac{u''(x)}{2!}-\cdots \qquad (8.1)$$

$$u(x+h)+u(x-h)=2u(x)+h^2u''(x)+o(h^4) \quad (2)+(1)$$

$$u(x+h)+u(x-h)\approx 2u(x)+h^2u''(x)$$

$$u''(x)\approx\frac{u(x+h)+u(x-h)-2u(h)}{h^2}$$

**تعریف 8.1 تفاضلات متناهی برای دومتغیره:** هدف یافتن $\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2u(x_i,t_j)}{\partial x^2}\approx\frac{u(x_i+h,t_j)+u(x_i-h,t_j)-2u(x_i,t_j)}{h^2} \qquad (9.1)$$

$$\frac{\partial^2u_{ij}}{\partial x^2}\approx\frac{u((i+1)h,jk)+u((i-1)h,jk)-2u(ik,jk)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2u_{ij}}{\partial t^2}\approx\frac{u(ih,(j+1)k)+u(ih,(j-1)k)-2u(ik,jk)}{k^2} \qquad (10.1)$$

**تعریف9.1 شرایط مرزی:** برای حل عددی PDE[1] معمولا به شرایط زیر محتاج هستیم. $u(x,t)$ معلوم و $u(0,t)$ را شرایط مرزی گویند.

[1] Partial Differential Equation

**تعریف 11.1:** بافرض اینکه $\alpha > 0$ و $f \in c[a,b]$ انتگرال کسری ریمان –لیوویل[1] به صورت زیر تعریف می شود:[7]

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad , \quad x > 0 \qquad (11.1)$$

لازم به ذکر است که به جای $I_{a^+}^{\alpha} f(x)$ به اختصار از $I_a^{\alpha} f(x)$ استفاده می شود.

**تعریف 12.1 مشتق کسری ریمان لیوویل:** فرض کنیم $f(t)$ تابعی حقیقی دلخواه باشد و

$$n-1 < \alpha \leq n$$

دراین صورت مشتق کسری ریمان لیوویل به صورت زیر تعریف می شود:[8]

$$D_a^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} [I_a^{n-\alpha} f(t)] \qquad (12.1)$$

که درآن $n$ کوچکترین عددطبیعی بزرگتراز $\alpha$ است یعنی $n = [\alpha + 1]$.

مشتق کسری ریمان- لیوویل دارای ویژگی های مربوط به خود می باشد از جمله اینکه دو مشتق کسری ریمان- لیوویل $D^{\alpha}$ و $D^{\beta}$ باهم جابجا نمی شوند.

یعنی داریم: $D^{\alpha}\left[D^{\beta} f(t)\right] \neq D^{\beta}[D^{\alpha} f(t)]$

**تعریف 13.1 تابع گاما :** $\Gamma(x)$ که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (13.1)$$

در زیر برخی از خواص تابع گاما بیان می شود.

$i) \Gamma(x+1) = x\, \Gamma(x)$

$ii) \Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2) \ldots (x+n)}$

---
[1] Riemann Liuville

$$iii)\ \Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\quad x\neq 0,-1,-2,\dots,Re(x)>-x$$

$$iv)\ \Gamma(x)\,\Gamma(x-1)=\frac{\pi}{\sin \pi x}\quad x\neq 0,\pm1,\pm2,\dots.$$

$$v)\ \Gamma(x+1)=x!\quad x=0,1,2\dots$$

**تعریف14.1 تابع بتا :**

تابع بتا رابا علامت $\beta(x,y)$ نمایش می دهند. وفرمول آن چنین می باشد.

$$\beta(x,y)=\int_0^1 r^{x-1}(1-r)^{y-1}dr\quad ,Re(x)>0\ ,\quad Re(y)>0\quad (14.1)$$

می توان رابطه بین تابع گاما وتابع بتا راچنین نوشت: $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(y)\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}$

چندخواص مهم تابع بتا را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$i)\beta(x,y)=\beta(y,x)$$

$$ii)\ \beta(x,y+1)=\frac{y\,\beta(x+1,y)}{x}=\frac{x}{x+y}\,\beta(x,y)$$

$$iii)\ \beta(\tfrac{x}{t},y)=\int_0^1 r^{x-1}(1-r^t)^{y-1}dr\quad t>0$$

**تعریف 15.1سری توانی** : سری نامتناهی به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\quad (15.1)$$

را سری توانی از$x$ گوییم.

# فصل 2

# شرح روش دیفرانسیل تبدیل یافته

**مقدمه**: دراین فصل روش دیفرانسیل تبدیل یافته رابرای هریک از معادلات اعم از دیفرانسیل معمولی ودیفرانسیل جزیی ومعادلات دیفرانسیل کسری بیان می شود.

## 1.2 روش دیفرانسیل تبدیل یافته توابع با دیفرانسیل معمولی

### 1.1.2دیفرانسیل تبدیل یافته توابع یک بعدی[4]

**تعریف.1.1.2**: اگر$w(t)$ یک تابع حقیقی در بازه زمانی $T$ باشدداریم:

$$\emptyset(t,h)=\frac{d^n w(t)}{dt^n} \quad \forall t\in T \qquad (1.1.2)$$

اگر $t=t_i$ قرار دهیم داریم:

$$\emptyset(t,h)=\emptyset(t_i,h)$$

**تعریف2.1.2:** اگر $w(t)$ یک تابع حقیقی در بازه زمانی T باشد ودارای مشتق از مراتب بالاتر باشدآنگاه

$$W(h)=\frac{1}{h!}\emptyset(\mathrm{t,h})=\frac{1}{\mathrm{h!}}\left[\frac{d^n w(t)}{dt^n}\right] \qquad (2.1.2)$$

که تابع $w(t)$ تابع اصلی وتابع $W(h)$ تابع انتقال یا همان تبدیل می باشد . اگرسری تیلورتابع $w(t)$ راحول نقطه $t_{\mathrm{i}}$ بنویسیم داریم $w(t)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(t-t_{\mathrm{i}})^h}{h!}w^{(h)}(t_i)$ که باتوجه به تعاریف گفته شده رابطه بالا رامی توان به صورت زیر نوشت

$$w(t)=\sum_{h=0}^{\infty}(t-t_i)^h\,W(h) \qquad (3.1.2)$$

درحالتی که $t_{\mathrm{i}}=0$ معادله (3.1.2) رابه صورت زیر می نویسیم:

$$w(t) = \sum_{h=0}^{\infty} t^h \, W(h)$$

معادله(3.1.2) رابه عنوان تبدیل معکوس $W(h)$ می دانیم.نمادDرا تبدیل دیفرانسیل و با استفاده از

معادله (3.1.2) داریم $w(t) = \sum_{h=0}^{\infty}\left((t-t_i)\right)^h \mathrm{W}_i(h) = D^{-1}W(h) \quad (4.1.2)$

تابع $w(t)$ رابه صورت یک سری تیلور متناهی با در نظر داشتن خطای $R_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t})$ می توان چنین

نوشت:

$$w(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^h}{h!}\left[\frac{d^n w(t)}{dt^n}\right] + R_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t})$$

$$w(t) = \sum_{h=0}^{\infty} (t-t_i)^h \, W(h) + \; R_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t})$$

می توان از مقدار خطای$R_{\mathrm{n+1}}(\mathrm{t})$ که عددی بسیار کوچک می باشد صرف نظر کرد.

حال به بیان خواص این روش و اثبات برخی ازآنها می پردازیم.

**قضیه3.1.2**: اگر $w(t) = ag(t)$ آنگاه

$$W(h) = aG(h) \qquad (5.1.2)$$

اثبات :

$$G(h) = \frac{1}{\mathrm{h!}}\left[\frac{d^h g(t)}{dt^h}\right]$$

$$W(h) = \frac{1}{\mathrm{h!}}\left[\frac{d^h ag(t)}{dt^h}\right] = a\frac{1}{\mathrm{h!}}\left[\frac{d^h g(t)}{dt^h}\right] = a\,G(h)$$

**قضیه4.1.2**: اگر $w(t) = \frac{dg(t)}{dt}$ آنگاه داریم:

**اثبات :**

$$W(h) = (h+1)G(h+1) \qquad (6.1.2)$$

$$W(h)=\frac{1}{\mathrm{h}!}\left[\frac{d^h w(t)}{dt^h}\right]= \frac{1}{\mathrm{h}!}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{d^h g(t)}{dt^h}\right]\right]=\frac{\mathrm{h}+1}{(\mathrm{h}+1)!}\left[\frac{d^{h+1} g(t)}{dt^{h+1}}\right]$$

$$=(h+1)\frac{1}{(\mathrm{h}+1)!}\left[\frac{d^{h+1} g(t)}{dt^{h+1}}\right]=(h+1)G(h+1)$$

**قضیه 5.1.2**: اگر $g(t)$و $f(t)$ دوتابع حقیقی در بازه T باشدو$G(h)$ و $F(h)$ و

$G(h)=D[g(t)]$n و $F(h)=D[f(t)]$

توابع تبدیل یافته دیفرانسیلی آنها باشند وبه ازای $c_1$و $c_2$ که ثابت های مستقل از $t$ و $h$ هستند.

خواص زیر را خواهیم داشت:

الف:

$$D[c_1\, f(t)+c_2\, g(t)]=D[c_1\, f(t)]+D[c_2\, g(t)]$$
$$=c_1 D[\, f(t)]+c_2 D[\, g(t)] \qquad (7.1.2)$$

ب: اگر $w(t)=f(t)g(t)$ باشد آنگاه

$$D\big(w(t)\big)=D\big(f(t)g(t)\big)=\sum_{i=0}^{h} F(i)G(h-i) \qquad (8.1.2)$$

اثبات الف: باتوجه به تعریف دیفرانسیل تبدیل یافته داریم $G(h)= \frac{1}{\mathrm{h}!}\left[\frac{d^h g(t)}{dt^h}\right]$ و

$$F(h)= \frac{1}{\mathrm{h}!}\left[\frac{d^h f(t)}{dt^h}\right]$$

حال طبق تعریف 2.1.2 برای *DTM*[1] درطرف چپ حکم داریم:

$$D[c_1\, f(t)+c_2\, g(t)]= \frac{1}{\mathrm{h}!}\left[\frac{d^h\big(c_1\, f(t)+c_2\, g(t)\big)}{dt^h}\right]$$

$$= \frac{c_1}{\mathrm{h}!}\left[\frac{d^h f(t)}{dt^h}\right]+\frac{c_2}{\mathrm{h}!}\left[\frac{d^h g(t)}{dt^h}\right]=c_1 D[\, f(t)]+c_2 D[\, g(t)]$$

[1] Differential Transform Method

اثبات ب: $W(h)$ رابه ازای $h$ های صحیح نامنفی بکار می بریم

$$W(0) = [f(0)g(0)] = F(0)G(0)$$

$$W(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d(f(t)g(t))}{dt}\right]_{\mathrm{t}=0} = [f^{'}(t)g(t) + \ g^{'}(t)f(t)]$$

$$= F(1)G(0) + F(0)G(1)$$

$$W(1) = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2\big(f(t)g(t)\big)}{dt^2}\right]_{\mathrm{t}=0}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f^{"}(t)g(t) + f(t)g^{"}(t) + 2f^{'}(t)g^{'}(t)\Big)_{\mathrm{t}=0}$$

$$= F(2)G(0) + F(1)G(1) + F(0)G(2)$$

اگر همین ترتیب ادامه یابد به ازای $h$ های نامنفی و صحیح به حکم می رسیم.

نکته: می توان در ضرب دوتابع ،بیش تر از دوتابع نیز استفاده کردکه فرمول آن شبیه رابطه (8.1.2) است.

**قضیه6.1.2**: اگر $w(t) = t^n$ آنگاه

$$W(h) = \delta(h-n) \qquad (9.1.2)$$

به طوری که $\delta(h-n) = \begin{cases} 1 & ,h = n \\ 0 & ,h \neq n \end{cases}$ که در آن $\delta$ تابع دلتای کرونکر می باشد.

**اثبات:** درصورتی که $h = n$ باشد، مشتق مرتبه$h$ -ام تابع برابر$h!$ خواهد بود و داریم:

$$W(h) = \frac{1}{\mathrm{h}!}\left[\frac{d^h t^n}{dt^h}\right]$$

اگر$h \neq n$ واضح است که $W(h)$ صفر می شود.

**قضیه7.1.2**: اگر $w(t) = e^{\alpha t}$ آنگاه داریم:

$$W(h) = \frac{\alpha^n}{\mathrm{h}!} \qquad (10.1.2)$$

اثبات: بااستفاده از تعریف(2.1.2)داریم: