بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

استفاده از برنامه‌ریزی خطی برای حل مسائل برنامه-ریزی غیرخطی

اساتید راهنما:

دکتر محمد افضلی نژاد

دکتر مجید سلیمانی دامنه

دانشجو:

مریم تکلوولاشجردی

۱۳۹۰

تقدیم:

به پیشگاه مقدس امام عصر(عج)

به آسمان

به پدر و مادر مهربانم

به سایبانان آرامشم

تقدیر

بارالها تو را سپاس که فضلت را کران نیست و شکرت را زبان نیست

بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد راهنمای گرامی و ارجمندم جناب آقای دکتر محمد افضلی نژاد که افتخار شاگردی ایشان را طی دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد داشته‌ام و نیز از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر مجید سلیمانی دامنه که راهنمایی پایان نامه حاضر را قبول زحمت فرمودند، تشکر و قدردانی فراوان نمایم و سلامتی و توفیق روز افزون این عزیزان را از خدای متعال خواستارم.

همچنین از همه بزرگواران و اساتید گرامی از جمله استاد فرهیخته و ارجمندم دکتر نبی ا... گودرزوند چگینی که در طول دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، کمال تشکر و امتنان را دارم.

در نهایت والاترین سپاس خود را به محضر خانواده بزرگوارم که همواره دریای بیکران مهر خویش را بی‌دریغ بر من ارزانی داشتند تقدیم می‌نمایم، به امید آنکه قطره‌ای ازدریای بیکران محبتشان را پاسخگو باشم.

چکیده

مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی، مسائل بهینه‌سازی هستند که در آن‌ها حداقل یکی از توابع هدف یا قیود غیرخطی‌اند. برای حل این دسته از مسائل بهینه‌سازی، برخلاف مسائل برنامه‌ریزی خطی، به روش‌های تقریبی عددی نیازمندیم. تاکنون روش‌های مختلفی برای حل این دسته از مسائل بهینه‌سازی پیشنهاد گردیده است. توجه به کارایی روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی، به‌ویژه اطمینان از رسیدن به جواب بهینه‌ی سراسری، همراه با در نظرگرفتن برخی پیش‌گیری‌ها از ایجاد دور، منجر به توجه به چنین روش‌هایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی گردید. در این پایان‌نامه به دنبال ارائه‌ی الگوریتم‌هایی جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی در حالت‌های محدب و غیرمحدب، با استفاده از برنامه‌ریزی خطی هستیم؛ که همگی مبتنی بر روش‌های برش صفحه هستند و در نهایت، بهبود در سرعت همگرایی روش فوق را نسبت به سایر روش‌ها نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: برنامه ریزی غیر خطی، الگوریتم‌های برش صفحه، برنامه ریزی خطی دنباله‌ای، برنامه‌ریزی محدب، شاخه و کران، برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه، یک الگوریتم بهینه‌سازی براساس برنامه‌ریزی خطی، که الگوریتم دنباله‌ای برش صفحه نامیده می‌شود، برای حل مسائل محدب و غیرمحدب معرفی گردیده است. تاکنون روش‌های مختلفی برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی به‌کار گرفته شده است؛ همچون روش‌های مبتنی بر برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم دنباله‌ای و روش‌هایی که براساس ناحیه‌ی اعتماد و توابع جریمه‌اند. به‌عنوان نمونه، هان [۲۳،۲۴] همگرایی سراسری و موضعی روش‌های برنامه‌ریزی درجه دوم دنباله‌ای را برای حل مسائل غیرخطی اثبات نمود. نتایج عددی نشان دهنده‌ی آن است که در این روش‌ها با اشکالاتی همچون، نشدنی گشتن مسأله توسط برخی از قیود، عدم همگرایی به نقطه‌ی بهینه در مسأله، ایجاد تعداد تکرارهای زیاد در مسائل و کندی سرعت همگرایی روبرو هستیم. استفاده از برنامه‌ریزی خطی بالاخص الگوهایی که برمبنای برش صفحه هستند، به‌دلیل کارآمدی آن‌ها به‌ویژه همگرایی سریع به نقطه‌ی ایستا و اطمینان از همگرایی سراسری، منجر به بررسی روش‌های عددی‌ای گردید، که مبتنی بر چنین روش‌هایی بودند. به عنوان مثال، روش‌هایی ارائه گردید که در آن‌ها از برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی درجه دوم به‌طور متوالی برای یافتن جواب بهینه‌ی مسائل غیرخطی استفاده شد [۸] . پس از آن روش‌هایی که تنها براساس برنامه‌ریزی خطی بودند مطرح گردیدند، مانند روش برنامه‌ریزی تقریبی که در [۲۱] بیان گردیده است. روش برش صفحه نخستین بار در سال ۱۹۶۰ توسط کِلّی [۳۰] برای حل مسائل برنامه-ریزی غیرخطی توسط دنباله‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی به‌کار گرفته شد. روش کِلّی هرچند برخی اشکالات روش‌های پیشین را نداشت و به‌عنوان اصلاحی برای روش‌های فوق مطرح می‌شد اما این روش نیز با برخی کمبودها از جمله، کندی همگرایی برای برخی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی، بزرگ شدن و افزایش ابعاد مسائل برنامه‌ریزی خطی در هر تکرار و به تبع آن کندی حل مسئله مواجه بود. از آن به بعد، بسیاری از حل‌کننده‌های برنامه‌ریزی غیرخطی، روش‌های دنباله‌ای برش صفحه را در اشکال گوناگون به‌کار گرفتند.

در این پایان نامه، با علم به کارآمد بودن روش‌های مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی در مقایسه با سایر روش‌ها، الگوریتمی جدید براساس برش‌های خطی، برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ارائه نموده‌ایم، که اشکالات موجود در الگوریتم‌ها و روش‌های پیشین که همگی بر پایه‌ی روش‌های برش صفحه و برنامه‌ریزی خطی بودند را تا حد زیادی بهبود بخشیده است. نتایج عددی بر روی مجموعه‌های آزمون نشان می‌دهد که الگوریتم ارائه گردیده، ضمن محدود نمودن بعد زیر مسأله‌های برنامه‌ریزی خطی، با فرض سریع بودن محاسبات توابع قیود و هدف، جایگزینی مناسب و اصلاحی معتبر برای روش برش کِلّی و سایر حل‌کننده‌های مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی است.

درفصل اول، اشاره‌ای به پیش نیازهای مربوط به موضوعات ارائه گردیده در این پایان‌نامه از جمله؛ تعاریف ومفاهیم اولیه، شرایط لازم و کافی برای همگرایی مسائل مقیّد، توابع جریمه، برنامه‌ریزی صحیح ، روش شاخه و کران و روش برش صفحه، خواهیم داشت.

در فصل دوم، به معرفی الگوریتمی بر مبنای برش صفحه‌ی دنباله‌ای، برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی در حالت محدب با قیود تساوی، خواهیم پرداخت و در ادامه همگرایی روش به جواب بهینه را اثبات خواهیم نمود.

در فصل سوم، الگوریتم بیان گردیده در فصل قبل را برای مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با قیود تساوی و نامساوی در حالت غیرمحدب تعمیم خواهیم داد. در ادامه همگرایی الگوریتم فوق را نیز اثبات خواهیم کرد.

در فصل چهارم این پایان‌نامه، به یکی از کاربردهای مهم الگوریتم برش صفحه‌ی دنباله‌ای اشاره خواهیم نمود، که می‌تواند به‌عنوان یک جزء از الگوریتم حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته استفاده گردد و منجر به افزایش سرعت همگرایی الگوریتم مذکور گردد.

فصل پنجم در بردارنده‌ی تحلیل نتایج عددی الگوریتم ارائه گردیده و مقایسه آن با دو روش معروف دیگر، LANCELOT [۹] و DONLP2 [۴۰]، برای برخی مسائل انتخابی است.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم

۱-۱ مقدمه

در این فصل، به‌طور مفصل به پیش‌نیازهای مربوط به موضوعات بیان‌شده در این پایان‌نامه پرداخته‌ایم. همچنین در ارائه مطالب سعی شده است، تا لیست کاملی از مراجع را در اختیار خواننده قرار دهیم تا در صورت نیاز به اطلاعات تکمیلی، به آن‌ها مراجعه نماید. ابتدا تعاریف اولیه و مفاهیم مورد نیاز را بیان می‌نماییم و در ادامه به تبیین مسائل بهینه‌سازی مقید، شرایط لازم و کافی برای بهینگی و ... می‌پردازیم. به‌طور کلی سعی بر آن است، انواع مسائل برنامه‌ریزی را معرفی و مقدماتی از چند روش مهم برای حل این مسائل، همچون روش درخت شاخه-کران و روش برش در حل مسائل برنامه‌ریزی صحیح را تشریح نماییم.

۱-۲ تعاریف اولیه

تعریف ۱-۲-۱

نگاشتی به فرم $\|.\|: R^n \to R$، نرم[1] نامیده می‌شود اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق نماید:

۱. به ازای هر $\mathbf{x} \in R^n$، $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ و به‌علاوه: $\|\mathbf{x}\| = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

۲. به ازای هر $\alpha \in R$ و به ازای هر $\mathbf{x} \in R^n$، $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$.

۳. به ازای هر $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in R^n$، $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

مشهورترین نرم‌های برداری عبارتند از:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i|, \quad 1 \leq i \leq n, \qquad (\text{نرم} - l_\infty)$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \qquad (\text{نرم} - l_1)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (\text{نرم} - l_2)$$

که در حالت کلی به‌صورت $(\text{نرم} - l_p)$ نمایش داده می‌شوند و داریم:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (۱-۱)$$

تعریف ۱-۲-۲

فرض کنید تابع $f: R \to R$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f در $x = a$ برابر L است (و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$)، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به‌طوری که برای $0 < |x - a| < \delta$ نتیجه دهد : $|f(x) - L| < \varepsilon$.

قضیه ۱-۱ (قضیه فشردگی[2] حدود). فرض کنید برای توابع f ، h و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ داشته باشیم: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$، آن‌گاه $\lim_{x\to a} h(x) = L$ (این قضیه برای حدهای یک طرفه و بی نهایت هم برقرار است).

[1] Norm
[2] The Squeeze Theorem

برهان. به مرجع [۴۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۲-۳

تابع $f: R^n \to R$ در نقطه‌ی $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$ پیوسته است، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به‌طوری که برای هر $\mathbf{x} \in R^n$، $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ نتیجه دهد : $|f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})| < \varepsilon$.

تعریف ۱-۲-٤

تابع پیوسته‌ی $f: R^n \to R$ را در نقطه‌ی $\mathbf{x} \in R^n$ مشتق‌پذیر گویند، هرگاه تابع $g: R^n \to R$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $\mathbf{0} \neq \mathbf{d} \in R^n$ داشته باشیم : $\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{d})-f(\mathbf{x})}{t} = g(\mathbf{x})^T.\mathbf{d}$. به ازای بردار یکه‌ی $\mathbf{d} = \mathbf{e}_j$ ، اگر $\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f(\mathbf{x})}{t}$ موجود باشد، آن‌گاه آن را مشتق جزئی یا نسبی f نسبت به x_j گوییم و با نماد $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۵

تابع پیوسته‌ی $f: R^n \to R$، در نقطه‌ی $\mathbf{x} \in R^n$ ، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر[1] نامیده می‌شود، اگر $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}; j = 1, \dots, n$ موجود و پیوسته باشد.

تعریف ۱-۲-٦

تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر $f: R^n \to R$ ، در نقطه‌ی $\mathbf{x} \in R^n$ ، دو بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر[2] نامیده می‌شود اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ، $j, i = 1, \dots, n$ موجود و پیوسته باشد. این مفهوم را با $f \in C^2$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱-۲-۷

گرادیان تابع f در نقطه‌ی $\mathbf{x} \in R^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(\mathbf{x}), \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(\mathbf{x}), \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\mathbf{x})\right]. \qquad (۲-۱)$$

[1] Continuously Differentiable
[2] Twice Continuously Differentiable

تعریف ۱-۲-۸

ماتریس هسی[1] تابع f ، یک ماتریس متقارن $n \times n$ است که با درایه‌های زیر تعریف می‌شود:

$$[\nabla^2 f(\mathbf{x})]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}. \qquad (۱-۳)$$

تعریف ۱-۲-۹

فرض کنید $A \in R^{n\times n}$ متقارن[2] باشد. A معین مثبت[3] نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\mathbf{v} \in R^n$ که $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ داشته باشیم: $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} > 0$. و اگر به ازای هر $\mathbf{v} \in R^n$ ، $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} \geq 0$ آن‌گاه A را نیمه معین مثبت[4] می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۱۰

مجموعه‌ی $\mathbf{S} \subset R^n$ را درنظر بگیرید. اگر برای هر $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{S}$ و برای هر $\alpha \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in \mathbf{S}, \qquad (۱-۴)$$

آن‌گاه مجموعه‌ی $\mathbf{S}$، یک مجموعه‌ی محدب نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۱

فرض کنید $\mathbf{S} \subset R^n$ یک مجموعه‌ی محدب و غیرتهی باشد. تابع $f: \mathbf{S} \subset R^n \to R$ را درنظر بگیرید. اگر برای هر $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{S}$ و برای هر $\alpha \in (0,1)$ داشته باشیم:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2), \qquad (۱-۵)$$

آن‌گاه گوییم تابع f روی مجموعه‌ی $\mathbf{S}$ محدب است. اگر نامساوی بالا برای همه‌ی $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ ها به‌صورت اکید برقرار باشد، آن‌گاه تابع f محدب اکید[5] روی $\mathbf{S}$ نامیده می‌شود.

قضیه ۱-۲. فرض کنید $\mathbf{S} \subset R^n$ یک مجموعه‌ی محدب باز ناتهی باشد و $f: \mathbf{S} \subset R^n \to R$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه f محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbf{S}$:

[1] Hessian
[2] Symmetric
[3] Positive Definite
[4] Positive Semidefinite
[5] Strictly Convex

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^{T}(\mathbf{y}-\mathbf{x}). \tag{۱-۶}$$

به‌طور مشابه، f روی $\mathbf{S}$ محدب اکید است اگر و فقط اگر به ازای هر $\mathbf{y},\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ ، $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^{T}(\mathbf{y}-\mathbf{x}). \tag{۱-۷}$$

برهان . به [۴۵] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۲-۱۲

روشی که از یک نقطه‌ی اولیه مانند $\mathbf{x}^{0} \in R^{n}$ شروع می‌شود و در ادامه دنباله‌ی تکراری $\mathbf{x}^{k+1} = H(\mathbf{x}^{k})$ را تولید می‌کند، که در آن H رابطه‌ای بر حسب $\mathbf{x}^{k}$ و تکرارهای قبلی می‌باشد، روش تکراری[1] نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۳

گوییم یک روش تکراری دارای همگرایی سراسری[2] است، اگر به ازای هر نقطه‌ی شروع دلخواه $\mathbf{x}^{0} \in R^{n}$، به یک جواب مسأله همگرا باشد.

۱-۲-۱ برنامه‌ریزی خطی

فرم کلی یک مسأله مینیمم‌سازی برنامه‌ریزی خطی[3] (LP) به فرم متعارفی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{c}\,\mathbf{x}, \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{۱-۹}$$

که در آن ماتریس $A_{m\times n}$ را ماتریس ضرایب، بردار ستونی $\mathbf{x}_{n\times 1}$ را بردار متغیرها، بردار ستونی $\mathbf{b}_{m\times 1}$ را بردار سمت راست و بردار سطری $\mathbf{c}_{1\times n}$ را بردار هزینه می‌نامند. در مسأله‌ی فوق ، تابع z تابع هدف است و $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ محدودیت‌ها یا قیود مسأله را تشکیل می‌دهد و $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ را قیود نامنفی می‌نامند.

---
[1] Iterative Method
[2] Global Convergence
[3] Linear Programming

تعریف ۱-۲-۱۴

اگر در یک مسأله‌ی بهینه‌سازی تابع هدف یا یکی از توابع قیود غیرخطی باشند، آن‌گاه آن مسأله‌ی بهینه‌سازی را یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی[1] (NLP) می‌نامند.

تعریف ۱-۲-۱۵

مجموعه‌ی $\mathbf{S} = \{\mathbf{x}: \ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ، ناحیه‌ی شدنی[2] مسأله‌ی (۱-۹) را تشکیل می‌دهد و به هر نقطه‌ی $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ ، یک نقطه‌ی شدنی گویند.

تعریف ۱-۲-۱۶

یک ابرصفحه[3] در R^n، به مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ در R^n گفته می‌شود که در معادله‌ی $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ صدق می‌کنند. $a_1, \dots, a_n$ و b در آن اعداد ثابت هستند و حداقل یکی از $a_i\,; i = 1, \dots, n$ ها مقداری غیر صفر دارد، یعنی $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

تعریف ۱-۲-۱۷

قید نامساوی $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b$ که $(a_{11}, \dots, a_{1n}) \neq 0$ ، را در نظر بگیرید. به مجموعه‌ی همه‌ی نقاط $\mathbf{x} \in R^n$ که در این نامعادله صدق می‌کنند، نیم‌فضا[4] گویند. در واقع هر ابرصفحه فضای R^n را به دو نیم‌فضا تقسیم می‌کند.

تعریف ۱-۲-۱۸

$\mathbf{x} \in \mathbf{S} = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \geq b\,, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \subseteq R^n$ یک نقطه‌ی رأسی[5] برای مجموعه‌ی $\mathbf{S}$ است هرگاه n ابرصفحه‌ی مستقل خطی تعریف‌کننده‌ی $\mathbf{S}$ در نقطه‌ی $\mathbf{x}$ فعال[6] باشند.

[1] Nonlinear Programming
[2] Feasible Set
[3] Hyperplane
[4] Halfspace
[5] Extreme Point
[6] Active

تعریف ۱-۲-۱۹

فرض کنید $\mathbf{x}^* \in X \subseteq R^n$ و $\mathbf{0} \neq \mathbf{d} \in R^n$. اگر $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $t \in [0, \delta]$ داشته باشیم $\mathbf{x}^* + t\mathbf{d} \in X$ ، آن‌گاه $\mathbf{d}$ یک جهت شدنی برای X در نقطه‌ی $\mathbf{x}^*$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۲۰

مسأله‌ی دوآل[1] برای مسأله‌ی (۱-۹) به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{wb}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}A \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{۱۰-۱}$$

توجه کنید که دقیقاً یک متغیر دوآل متناظر با هر محدودیت مسأله‌ی اولیه (۱-۹) است و بالعکس دقیقاً یک محدودیت دوآل متناظر با هر متغیر مسأله‌ی اولیه می‌باشد.

قضیه ۱-۳ (قضیه‌ی دوآلیتی قوی[2]). اگر یکی از مسائل برنامه‌ریزی خطی یا دوآل نظیرش دارای جواب بهینه‌ی متناهی باشد، دیگری نیز دارای جواب بهینه‌ی متناهی است و مقدار بهینه‌ی تابع هدف هر دو مسأله با هم برابر است.

برهان . به [۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۲-۲۱

بردار $\mathbf{d} \in R^n$ یک جهت کاهشی f در $\mathbf{x}$ است هرگاه $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر $\lambda \in [0, \delta]$:

$$f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) < f(\mathbf{x}) \tag{۱۱-۱}$$

قضیه ۱-٤. فرض کنید $f: R^n \to R$، در نقطه‌ی $\mathbf{x} \in R^n$ مشتق‌پذیر باشد و $\mathbf{d} \in R^n$. آن‌گاه $\mathbf{d}$ جهت کاهشی در $\mathbf{x}$ است اگر و تنها اگر:

$$\nabla f(\mathbf{x})^T.\mathbf{d} < 0 \tag{۱۲-۱}$$

[1] Dual
[2] The Strong Duality Theorem

برهان . برای اثبات به [۴۵] مراجعه شود. □

۱-۳ بهینه‌سازی مقید[1]

در این پایان‌نامه، فرم کلی یک مسأله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی مقید به‌صورت:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in R^n} \quad f(\mathbf{x}), \\ &\text{s.t.} \qquad h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, l, \\ &\qquad\qquad g_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{۱-۱۳}$$

می‌باشد که تابع هدف $f(\mathbf{x})$ و توابع قیود $h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ و $g_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ همگی توابعی هموار و دارای مقدار حقیقی در R می‌باشند و حداقل یکی از آن‌ها غیرخطی است. l و m مقادیر صحیح نامنفی‌اند که به ترتیب تعداد قیود مساوی و نامساوی را نشان می‌دهند. اگر $m = l = 0$ باشد ، مسأله‌ی بهینه‌سازی مقید به مسأله‌ی بهینه‌سازی نامقید[2] تبدیل می‌شود و همچنین اگر $f(\mathbf{x})$ ، $h_i(\mathbf{x})$ و $g_j(\mathbf{x})$ توابعی خطی باشند، مسأله‌ی فوق یک مسأله‌ی بهینه‌سازی مقید خطی نامیده می‌شود[۴۵] .

تعریف ۱-۳-۱

نقطه‌ی $\mathbf{x} \in R^n$ یک نقطه‌ی شدنی برای مسأله‌ی (۱-۱۳) است اگر و فقط اگر در قیود مسأله صدق نماید. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط شدنی ، ناحیه‌ی شدنی نامیده می‌شود. بنابراین ناحیه‌ی شدنی مسأله‌ی (۱-۱۳) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$X = \{\mathbf{x} : \ h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ , \quad i = 1, \dots, l \ ; \ g_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \ , \quad j = 1, \dots, m\}. \tag{۱-۱۴}$$

تعریف ۱-۳-۲

اگر $\mathbf{x}^* \in X$ و به ازای هر $\mathbf{x} \in X$:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \tag{۱-۱۵}$$

آن‌گاه $\mathbf{x}^*$ یک مینیمم سراسری مسأله‌ی (۱-۱۳) نامیده می‌شود.

[1] Constrained Optimization
[2] Unconstrained Optimization