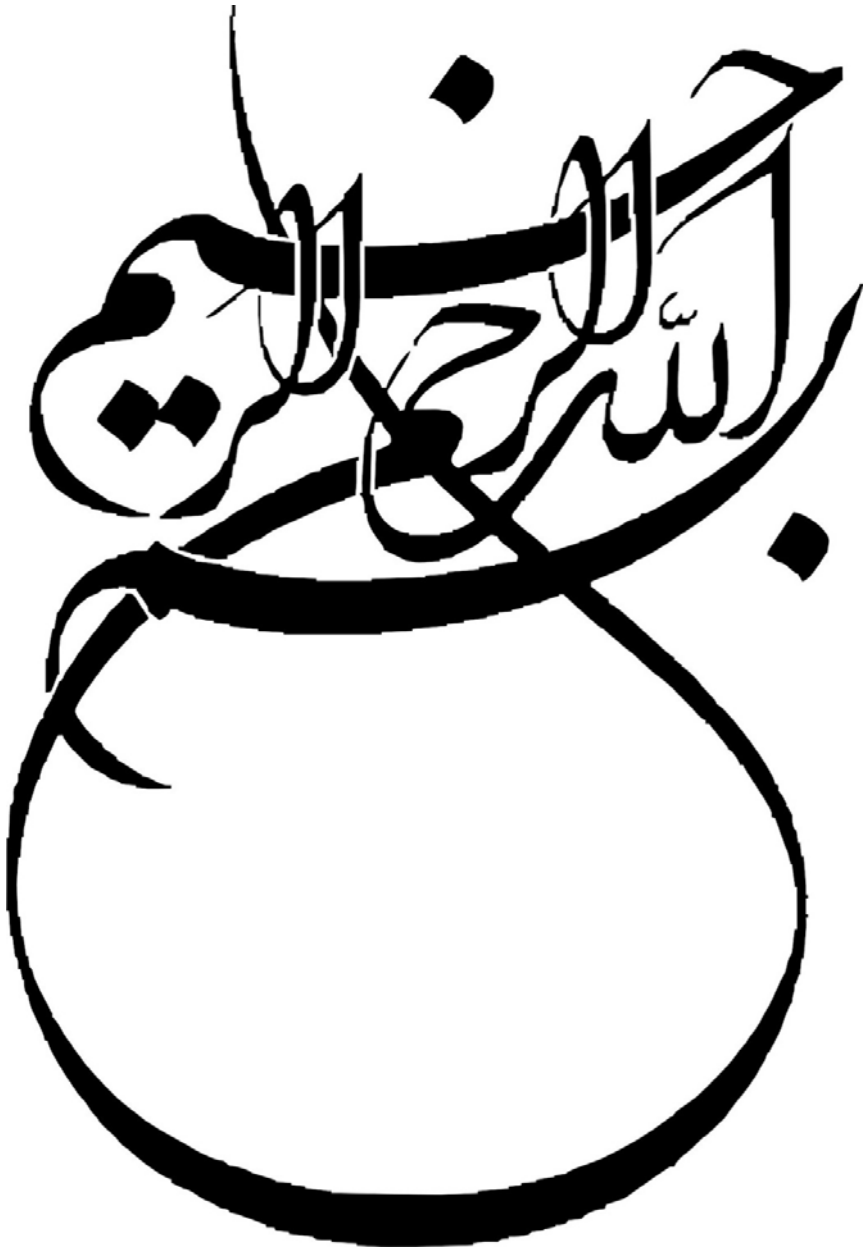
بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه علم و فرهنگ

دانشکده فنی و مهندسی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مالی

برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از ترکیب پیش‌بینی‌ها

نگارش

مرضیه شفیعی

استاد راهنما

جناب آقای دکترسید محمد رکن‌الساداتی

استاد مشاور

جناب آقای دکتر رسول سجاد

اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۱

با سپاس ازچهار وجود مقدس:

...آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم

...موهایشان سپید شد تا ما رو سفید شویم

...عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند

و آنان که خستگی‌های این راه را به امید و روشنی تبدیل کردند

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

همسرانمان

چکیده: در این تحقیق ارزش در معرض خطر با استفاده از سه روش واریانس کوواریانس، GARCH-t(۱,۱) و GARCH-n(۱,۱) در دو سطح معنی‌داری ۰.۹۹و ۰.۹۵ و با پنجره‌های چرخشی ۱۰۰۰ و ۵۰۰ محاسبه شده و سپس از آن‌ها برای ترکیب روش‌های پیش‌بینی استفاده گردیده است. روش‌های ترکیب شامل روش‌های میانگین، میانه، MSFE تخفیفی، بهترین پیش‌بینی اخیر، روش انقباضی[۱] و مؤلفه‌های اصلی[۲] می‌باشد. داده‌های تحقیق، داده‌های روزانه شاخص قیمت و بازده نقدی از تاریخ ۱۳۷۸/۰۵/۰۳ تا تاریخ ۱۳۹۰/۰۷/۲۷ می‌باشد. نتایج بررسی حاکی از بهبود عملکرد ارزش در معرض خطر با استفاده از ترکیب پیش‌بینی‌ها در هر دو پنجره چرخشی می‌باشد.

واژگان کلیدی: ترکیب پیش‌بینی‌ها، پنجره‌های چرخشی، ارزش در معرض خطر، پس‌آزمایی.

[۱] shirinkage
[۲] PCA

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول ۲

مقدمه ۲

۱-۱مقدمه ۳

۱-۲ روش‌های محاسبه ارزش در معرض خطر ۵

۱-۲-۱ روش واریانس– کوواریانس ۵

۱-۲-۲ شبیه‌سازی تاریخی ٦

۱-۲-۳روشهای GARCH ۱۰

۱-۲-۴ پس آزمایی ۱۵

فصل دوم ۱۷

ادبیات و پیشینه تحقیق ۱۷

۲-۱ مبانی نظری و پیشینه ارزش در معرض خطر ۱۸

۲-۲ مبانی نظری و پیشینه روشهای مختلف ترکیب پیش بینی ۲۳

فصل سوم ۲۸

مبانی نظری و رویکردهای ۲۸

ترکیب پیش‌بینی‌ها ۲۸

۳-۱ مقدمه ۲۹

۳-۲ روشهایی جدید در ارزیابی و طراحی پیش بینی ها ۳۰

۳-۲-۱ دقت پیش بینی ۳۰

۳-۳ مبانی نظری ترکیب پیش بینی ها ۳٤

۳-۴ رویکردهای ترکیب پیش بینی ها ۳۵

۳-۴-۱ روش اول- متوسط گیری..... ۳۵
۳-۴-۲ روش دوم- MSFE تخفیفی..... ۳۷
۳-۴-۳ روش سوم- بهترین پیش بینی اخیر ۳۸
۳-۴-۴ روش چهارم- پیش بینی انقباضی..... ۳۸
۳-۴-۵ روش پنجم- ترکیب مبتنی بر مؤلفه های اصلی ٤۲
فصل چهارم..... ۴۴
نتایج تحقیق..... ۴۴
۴-۱ داده ها..... ٤۵
۴-۲ نتایج..... ۵۲
فصل پنجم..... ۵۸
بحث و نتیجه‌گیری..... ۵۸
فهرست مراجع..... ۶۱

فهرست جداول

جدول ۴-۱- آماره‌های توصیفی ۴۵

جدول۴-۲- بررسی خودهمبستگی ۴۷

جدول۴-۳- خودهمبستگی جزئی ۴۸

جدول۴-۴- ضریب آکائیک برای روشGARCH-n و GARCH-t با پنجره چرخشی ۱۰۰۰ ۵۰

جدول۴-۵- ضریب آکائیک برای روشGARCH-n و GARCH-t با پنجره چرخشی ۵۰۰ ۵۰

جدول۴-۶- نتایج حاصل از سه روش برآورد ارزش در معرض خطر با پنجره چرخشی ۱۰۰۰ ۵۲

جدول۴-۷- نتایج حاصل از سه روش برآورد ارزش در معرض خطر در دو سطح ۰.۹۵و ۰.۹۹ و با پنجره چرخشی ۵۰۰ ۵۳

جدول۴-۸- خطای مشاهده شده در روش‌های مختلف ترکیب پیش‌بینی در سطح اطمینان ۹۵٪ و با پنجره چرخشی ۱۰۰۰ ۵۴

جدول۴-۹- خطای مشاهده شده در روش‌های مختلف ترکیب پیش‌بینی در سطح اطمینان ۹۹ ٪ و با پنجره چرخشی ۱۰۰۰ ۵۵

جدول۴-۱۰- خطای مشاهده شده در روش‌های مختلف ترکیب پیش‌بینی در سطح اطمینان ۹۵٪ و با پنجره چرخشی ۵۰۰ ۵۶

جدول۴-۱۱- خطای مشاهده شده در روش‌های مختلف ترکیب پیش‌بینی در سطح اطمینان ۹۹٪ و با پنجره چرخشی ۵۰۰ ۵۷

فهرست نمودارها

عنوان صفحه

نمودار۴-۱- بررسی نرمال بودن(نمودارQ-Q plot) داده‌های روزانه شاخص قیمت و بازده نقدی ۴۶

نمودار۴-۲- نمودار هیستوگرام داده‌های روزانه شاخص قیمت و بازده نقدی ۴۶

نمودار ۴-۳- خودهمبستگی جزئی برای ۱۶ مقدار اولیه داده‌های روزانه شاخص قیمت و بازده نقدی ۴۸

نمودار۴-۴- خودهمبستگی جزئی برای ۳۰۰ مقدار اولیه داده‌های روزانه شاخص قیمت و بازده نقدی ۴۹

تعریف پارامترها

generalized autoregressive moving average conditionally heteroscedastic process	GARCH
Variance- covariance method	Var- Cov
Partial Autocorrelation Function	PACF
Value at risk of random variable X at confidence level p	$VaR\ (X;p)$
variance of a random variable X	$Var(X)$
expectation of a random variable	μ
بازده روز t	r_t
الگوهای وزن	φ_i
متغیر تصادفی نوفه سفید	ε_t
قیمت سبد دارایی در دوره t-۱	p_{t-1}
ماتریس واریانس-کوواریانس	Σ

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

پیش‌بینی نقش عمده‌ای در بازاریابی و استراتژی بازار دارد. علاوه بر این نقش مؤثری در سیاست‌های دولت ایفا می‌کند. چرا که دولت سیاست‌های خود را نه صرفاً بر مبنای وضع موجود، بلکه بر مبنای پیش بینی‌های کوتاه و بلند مدت از متغیرهای کلیدی اقتصادی تدوین نموده و اجرا می‌کند. بدیهی است که میزان صحت پیش‌بینی ازجمله رموز موفقیت این سیاست‌ها به شمار آید. چنین اهمیتی باعث شده تا تحقیقات در زمینه مدل‌ها و تکنیک‌های پیش‌بینی در چند دهه اخیر، با شتاب بیشتری انجام شوند. امروزه در تمامی زمینه‌ها، پیش بینی به عنوان یکی از مهم ترین شاخه‌های علمی مطرح شده است و روز به روز توسعه و پیشرفت می‌کند. مدیران بخش‌های مختلف به دلیل وجود انبوه متغیرهای تأثیرگذار، ترجیح می‌دهند مکانیزمی را در اختیار داشته باشند که بتواند آن‌ها را در امور تصمیم گیری یاری کند. افزون بر این در سال‌های اخیر زیان‌های تجاری موسسات مالی در کنار رشد چشمگیر فعالیت‌های تجاری سبب شده است تا قانون‌گذاران و کمیته‌های نظارت، روش‌هایی را به‌منظور کمّی ساختن ریسک ارائه کنند. بطور کلی موسسات مالی و اقتصادی با چهار نوع ریسک اعتباری، عملیاتی، نقدینگی و بازار مواجه هستند. در حال حاضر متداولترین معیار سنجش ریسک بازار، بررسی ارزش در معرض خطر (VaR)[۳] است. بنابر تعریف ارزش در معرض خطر، حداکثر زیانی است که کاهش ارزش سبد دارایی برای دوره معینی در آینده، با ضریب اطمینان مشخصی، از آن بیشتر نمی‌شود.

با توجه به اهمیت ارزش در معرض خطر، برآن شدیم که در این تحقیق با استفاده از روش‌های ترکیبی پیش‌بینی، متغیر VaR را برآورد کنیم. تقریباً در بسیاری از مطالعات، برتری پیش بینی حاصل از ترکیب پیش بینی ها بر پیش بینی های اولیه (منفرد) به اثبات رسیده است. معمولاً پیش‌بینی‌های مختلفی برای متغیر VaR در دسترس می باشد. اختلاف در پیش‌بینی می‌تواند ناشی از وجود اطلاعات گوناگون و یا تفاوت در روش‌های الگوسازی باشد. برای مثال دو مدل پیش بینی برای متغیر VaR ممکن

[۳] Value at Risk

است مفروضات متفاوتی را در نظر گرفته و پیش‌بینی‌های کاملاً متفاوتی را بدست دهند: اولی پارامترها را ثابت فرض گرفته در حالی که مدل دوم پارامترها را با فرض زمان-تغییرپذیری برازش دهد. ترکیب پیش بینی ها به مفهوم ترکیب اطلاعات متنوع برگرفته شده از منابع یا مدل‌های گوناگون بوده و در نتیجه پیش بینی ترکیبی با اطمینان بیشتری قابل پذیرش خواهد بود.

سوالات این تحقیق عبارتند از:

۱. آیا پیش‌بینی ترکیبی انقباضی بهتر از سایر پیش‌بینی‌های ترکیبی عمل می‌کند؟
۲. کدام پیش‌بینی ترکیبی پیشنهادی(در صورت وجود) بهتر از پیش‌بینی‌های منفرد عمل می‌کند؟
۳. عملکرد پنجره‌های چرخشی و سطوح اطمینان متفاوت در ترکیب پیش‌بینی‌ها چگونه است؟

در مطالعه حاضر ابتدا پس از مقدمه‌ای کوتاه روش‌های محاسبه ارزش در معرض خطر معرفی می‌شود، در فصل دوم تحقیقات انجام شده در زمینه برآورد ارزش در معرض خطر و به طور کلی روش‌های مختلف پیش‌بینی معرفی می‌شود. نکته قابل توجه در این بخش این است که پس از بررسی مقالات مختلف داخلی و خارجی نوآوری این تحقیق در معرفی روشی جدید در ترکیب پیش‌بینی‌ها بیش از پیش آشکار می‌شود. در فصل سوم مبانی نظری ترکیب پیش‌بینی‌ها و رویکردهای ترکیب ارائه می‌شود. رویکردهای مذکور عبارتند از: روش متوسط‌گیری، روش میانه، روش MSFE تخفیفی[۴]، روش پیش‌بینی انقباضی[۵]، بهترین پیش‌بینی اخیر و ترکیب مبتنی بر مؤلفه های اصلی[۶] .کاربرد رویکردهای اشاره شده در ترکیب داده‌های پیش‌بینی متغیر VaR در فصل چهارم ارائه می‌گردد و در فصل آخر به بحث و نتیجه‌گیری در مورد یافته‌ها خواهیم پرداخت.

[۴] Discounted Mean Square Forecast Error
[۵] Shrinkage
[۶] Principle component

۱-۲ روش‌های محاسبه ارزش در معرض خطر

به طور کلی روش‌های محاسبه ارزش در معرض خطر عبارتند از روش‌های پارامتری، روش‌های ناپارامتری (شبیه‌سازی تاریخی) و روش شبیه‌سازی مونت کارلو (رادپور، عبد تبریزی, ۱۳۸۸). دو روش اول مبتنی بر داده‌های تاریخی و روش مونت کارلو مبتنی بر تولید داده‌های تصادفی است.

۱-۲-۱ روش واریانس– کوواریانس[۷]

مهمترین روش برای محاسبه VaR استفاده از روش مدل پارامتری است. که به روش واریانس-کواریانس نیز معروف است. به طور کلی روش واریانس -کواریانس دارای دو پیش فرض اساسی است:

۱- بازده دارایی مالی یا بدرهٔ سرمایه‌گذاری به صورت نرمال توزیع شده است. این پیش فرض باعث شده است که محاسبهٔ VaR به خصوص در مواردی که به صورت روزانه محاسبه می‌شود، به سادگی و با سرعت انجام شود.

۲- رابطه خطی میان عوامل ریسک بازار و ارزش دارایی یا دارایی های مالی برقرار است.

می‌توان گفت: این دو پیش فرض از محدودیت‌های رویکرد این روش هستند چراکه داده‌های مالی ذاتا نرمال نیستند و توزیع واقعی تغییرات قیمت غالبا دارای دنباله‌های ضخیم‌تری نسبت به توزیع نرمال است و در ضمن در صورت عدم وجود رابطه خطی میان عوامل ریسک بازار و ارزش دارایی برآورد دقیقی از VaR نخواهیم داشت.

حال فرض کنید سبدی از N دارایی مختلف داریم و بازده آن‌ها دارای توزیع چند متغیره نرمال با میانگین μ و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ است. μ یک بردار $n\times 1$ و Σ یک ماتریس $n\times n$ است که واریانس‌ها در قطر اصلی و کوواریانس‌ها در دیگر جایگاه‌های آن قرار دارد. بردار سطری w را به عنوان نسبت‌های سرمایه‌گذاری شده در هر دارایی در نظر بگیرید. ابعاد این بردار، $n\times 1$ است. بدین ترتیب میانگین و واریانس سبد دارایی از طریق روابط زیر بدست می‌آید:

[۷] Variance-Covariance approach

$$\mu_{p=} w\mu \quad (۱-۱)$$

$$\sigma_{p=}^{۲} w\Sigma w^{T} \quad (۱-۲)$$

اگر قیمت سبد دارایی در دوره t-۱ را با $p_{t-۱}$ نمایش دهیم، ارزش در معرض خطر طی h دوره نگهداری و سطح اطمینان ۱-α برابر است با:

$$VAR_{h,t}= -p_{t-۱}(h\mu_{p,t}- \sqrt{h}\sigma_{p,t}z_{\alpha}) \quad (۱-۳)$$

۱-۲-۲ شبیه‌سازی تاریخی[۸]

روش شبیه‌سازی تاریخی روشی ناپارامتری است که براساس اطلاعات گذشته استوار است.

اولین کاری که باید انجام شود جمع‌آوری یک سری مناسب از بازده سبد دارایی است. این بازده براساس دوره‌های زمانی خاص مثلاً یک روزه اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید یک سبد دارایی با n دارایی داریم و برای هر دارایی در هر دوره زمانی یک بازده موجود است. در این روش مستقیماً از داده‌های شبیه‌سازی تاریخی برای برآورد ریسک استفاده می‌شود و هیچ تعدیلی روی این داده‌ها انجام نمی‌شود. برای برآورد ارزش در معرض خطر کافی است که صدک آلفای توزیع بازده را استخراج کنیم. برای این کار ابتدا سری بازده را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و جایگاه صدک مورد نظر را مشخص می‌کنیم.

به طور خلاصه گام‌های حل مسئله به روش شبیه‌سازی تاریخی به صورت زیر است:

- ✓ انتخاب نمونه ای از بازده عوامل بازار
- ✓ ارزشگذاری مجدد پرتفوی با استفاده از مقادیر بازده
- ✓ ساختن توزیع تجربی از مقادیر به دست آمده
- ✓ قطع کردن توزیع متناظر با سطح اطمینان دلخواه
- ✓ محاسبه VaR با استفاده از اختلاف صدک بالا با مقدار جاری

امتیازات[۹]:

[۸] Historical simulation

- ✓ بسیار راحت و قابل فهم است
- ✓ به ماتریس واریانس –کوواریانس نیاز ندارد
- ✓ به هیچ فرضی در مورد تابع توزیع نیاز ندارد
- ✓ منجر به تولید مقادیری یکنواخت برای VaR می‌شود
- ✓ در شرایطی که تغییرات عامل بازارغیرخطی هستند کار برد دارد

محدودیت‌ها[۱۰]:

- ✓ پیچیدگی ارزیابی نهاد مالی با استفاده از شرایط گذشته
- ✓ محدودیت تعداد مشاهدات در دسترس
- ✓ زمان بر بودن درهنگام استفاده از عوامل موثر بیشتر
- ✓ توزیع احتمال را در طول زمان یکسان فرض می‌کند
- ✓ تخمین نادرست توزیع احتمال

برخی از مهمترین رویکردهای ناپارامتری یا همان رویکردهای شبیه‌سازی تاریخی عبارتند از:

- **شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی**: در این روش مستقیما از داده‌های شبیه‌سازی تاریخی برای برآورد ریسک استفاده می‌شود و هیچ تعدیلی روی داده‌ها صورت نمی‌گیرد. برای برآورد ارزش در معرض خطر کافیست که صدک آلفای توزیع بازده را استخراج کنیم. برای این کار ابتدا سری بازده را از کوچک به بزرگ مرتب و جایگاه صدک مورد نظر را مشخص می‌کنیم. اگر سری شبیه‌سازی تاریخی شامل n بازده باشد، جایگاه صدک آلفا از طریق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$n_{\alpha}=\frac{An}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲} \qquad (۴-۱)$$

در این رابطه $A=۱۰۰\alpha$ و n_{α} جایگاه صدک α است.

[۹] Merits
[۱۰] Limitations

با شمارش از پایین‌ترین بازده به جایگاه موردنظر می‌رسیم. بازده متناظر با این جایگاه، صدک آلفای بازده یعنی$q_r(\alpha)$ است. %VaR در سطح اطمینان α-۱برابر است با:

$$\%VaR = -q_r(\alpha) \qquad (۵-۱)$$

- **شبیه‌سازی تاریخی بوت استرپ**: بوت استرپ روشی ساده و بسیار سودمند است که به بهبود روش شبیه‌سازی تاریخی کمک می‌کند. این روش از قابلیت درک بالایی برخوردار است و کاربرد آن آسان است. در ابتدا با یک نمونه اصلی به اندازه n کارمان را آغاز می‌کنیم. سپس نمونه تصادفی باجایگذاری با همان اندازه از این نمونه اصلی استخراج می‌کنیم و این کار را به تعداد بسیار زیاد مثلا ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم. استخراج این نمونه‌ها مستلزم داشتن یک مولد یکنواخت اعداد تصادفی برای انتخاب یک عدد تصادفی از ۱ تا n است. این فرایند توسط رایانه انجام می‌شود و نمونه‌گیری با جایگذاری است. اگر انتخاب اعداد تصادفی را n بار تکرار کنیم، نمونه‌ای به اندازه نمونه اصلی خواهیم داشت. بدین ترتیب فرآیند نمونه‌گیری را آنقدر ادامه می‌دهیم که تعداد زیادی از این نمونه‌های هم اندازه ایجاد شود. با ایجاد هر نمونه جدید که به آن نمونه‌گیری مجدد می‌گویند، شاهد آن هستیم که برخی از اعداد بیش از یک بار انتخاب شده و برخی دیگر انتخاب نشده‌اند. بنابراین نمونه‌های جدید نوعا متفاوت از نمونه اصلی است. از نمونه‌های جدید جهت برآورد پارامترهای موردنظر استفاده می‌شود. هرکدام از این نمونه‌ها برآورد جدید از پارامتر موردنظر در اختیارمان قرار می‌دهد. از آنجاکه در محاسبه VaR به دنبال صدک-های توزیع بازده هستیم، هر نمونه جدید تخمین جدیدی از VaR ارایه می‌نماید و ما می‌توانیم میانگین برآوردهای حاصل از نمونه‌های جدید را به‌عنوان بهترین برآورد از VaR درنظربگیریم.
- **شبیه‌سازی تاریخی موزون شده با زمان:** این روش توسط بودوخ، ریچاردسون و وایت لو اریه شد و شامل وزن‌دهی مشاهدات بر اساس اهمیت نسبی آن‌ها با توجه به پارامتر زمان است. این روش به ما امکان می‌دهیم که به جای رفتار مشابه با تمامی مشاهدات، به مشاهدات جدیدتر وزن بیشتری اختصاص می‌دهد. روش‌های مختلفی برای وزن‌دهی وجود دارد، اما رایج‌ترین آن‌ها اختصاص اوزان نمایی به

مشاهدات است. اگر وزن s امین بازده تاریخی را با w_s و تعداد مشاهدات تاریخی را با k نشان دهیم، w_s از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$W_s=(1-\lambda)\lambda^{t-s-1} \qquad s=t-k,\ldots,t-1 \qquad (۶-۱)$$

که λ بین صفر و یک بوده و منعکس کننده نرخ فروپاشی نمایی[11] یا ضریب هموارسازی مربوط به وزن یک مشاهده با توجه به مسن شدن آن است. اگر لاندا نزدیک به یک باشد، نمایانگر نرخ فروپاشی آهسته است و اگر با یک فاصله زیادی داشته باشد نمایانگر نرخ فروپاشی سریع است.

برای بدست آوردن ارزش در معرض خطر ابتدا بازده‌های تاریخی را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و وزن هر داده را در مقابل آن قرار می‌دهیم. سپس بر اساس سطح اطمینان مورد نظر، صدک مربوطه را بدست می‌آوریم. مثلا برای بدست آوردن صدک پنجم، اوزان کوچکترین بازده‌ها را با هم جمع می‌کنیم. هر جا که این مجموع برابر ۵٪ شود، بازده متناظر، همان صدک ۵٪ خواهد بود. با داشتن صدک بازده در سطح اطمینان مورد نظر، جهت محاسبه ارزش در معرض خطر از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\%VaR=-\ q_r(\alpha) \qquad (۷-۱)$$

- **شبیه‌سازی تاریخی با استفاده از تخمین ناپارامتری چگالی:** برای بهبود بالقوه روش شبیه‌سازی تاریخی، گاهی اوقات استفاده از تخمین ناپارامتری چگالی پیشنهاد می‌شود. برای درک فلسفه این روش باید بدانیم که روش‌هایی که تاکنون تشریح شد، بهترین استفاده را از داده‌های موجود به عمل نمی-آورند. این روش‌ها فرصت تخمین ارزش در معرض خطر را تنها در سطوح اطمینان گسسته فراهم می-آورند. این سطوح اطمینان توسط اندازه مجموعه داده‌ها تعیین می‌شود. تخمین ناپارامتری چگالی راه حل بالقوه‌ای را برای این مسائل ارایه می‌دهد. ایده اصلی که با داده‌ها به گونه‌ای رفتار کنیم که گویا از یک تابع آماری ناشناخته یا نامعین حاصل شده‌اند. این رویکرد امکان محاسبه ارزش در معرض خطر را در هر سطح اطمینانی فراهم می‌آورد. برای نشان دادن تفاوت بین تخمین پارامتری و ناپارامتری چگالی،

[11] Exponential rate of decay

تصور کنید می‌خواهیم تابع چگالی یعنی $f(x)$ را برای متغیر تصادفی پیوسته X در یک نقطه خاص مانند x برآورد کنیم. فرض کنید توالی X یعنی x_i به طور یکسان و مستقل از هم توزیع شده باشد. اگر تابع توزیع $f(x)$ از خانواده توابع آماری شناخته شده پارامتری (مانند نرمال) باشد، برآورد چگالی احتمال تنها به برآورد تعداد انگشت‌شماری پارامتر محدود می‌شود که بر یک چگالی خاص در خانواده پارامتری دلالت دارد. اگر فرض کنیم که این متغیر تصادفی از هیچ کدام از توزیع‌های پارامتری تبعیت نمی‌کند، برآورد چگالی $f(x)$ در تمامی نقاط مربوط به متغیر تصادفی، شامل برآورد تعداد نامحدودی پارامتر می‌باشد. در دانش آمار این مساله به برآورد ناپارامتری معروف است. هیستوگرام، برآوردکننده ساده و برآوردکننده کرنل متداولترین روش‌های تخمین ناپارامتری چگالی است.

۱-۲-۳روش‌های GARCH

برای آشنایی با مدل‌های GARCH ابتدا به تعریف سری‌های زمانی می‌پردازیم:

سری زمانی r_t خطی نامیده می‌شود اگر بتوان آن را به صورت رابطه زیرمدل کرد:

$$r_t = \mu + \sum_{i=}^{t}. \varphi_i \, a_{t-i} \qquad (۱۶-۱)$$

که در آن:

a_t سری زمانی نوفه سفید، φ_i الگوهای وزن، μ میانگین r_t می‌باشد.

همچنین رابطه(۱-۱۷) برقرار است:

$$var(r_t) = \sigma_a^{۲} \sum_{i=}^{\infty}. \varphi_i^{۲} \qquad (۱۷-۱)$$

که در آن: $\sigma_a^{۲}$ واریانس[۱۲] a_t است.

[۱۲] Variance

با توجه به این‌که مدل‌های سری زمانی خطی، مدل‌های اقتصادسنجی[۱۳] و آماری هستند که برای توصیف الگوهای وزن‌های φ_t به کار می‌روند؛ به بررسی برخی از این مدل‌ها می‌پردازیم.

مدل‌های اتو رگرسیو

اگر ε_t نوفه سفید باشد، مدل اتورگرسیو به صورت رابطه (۱-۱۸) قابل تعریف است.

$$AR(p) \quad r_t = \sum_{j=1}^{P} \alpha_j r_{t-j} + \varepsilon_t$$

در تحلیل سری زمانی ابتدا باید p را طوری به دست آورد که مدل اتو رگرسیو بهینه[۱۴] باشد. همچنین برای α_j ها شرط زیر باید برقرار باشد.

که در آن اگر r_t بازده روز t ام باشد به وسیله بازده روزهای ماقبل خود (تا t-p) مدل شده است.

مدل‌های میانگین متحرک

اگر ε_t متغیر تصادفی نوفه سفید باشد، مدل میانگین متحرک به صورت رابطه (۱-۱۹)، قابل تعریف است

$$MA(q) \quad r_t = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

که در آن اگر r_t بازده روز t ام باشد به وسیله خطاهای روزهای ماقبل خود (تا t-q) مدل شده است.

مدل ARMA[۱۵]

[۱۳] Econometrics
[۱۴] Optimal

[۱۵] Auto Regressive Moving Average

در بسیاری از موارد برای به دست آوردن بهینه برای مدل‌های AR و MA باید تعداد وقفه‌های مدل را بالا برد و این امر محاسبات را دشوار می‌کند. برای غلبه بر این امر ترکیبی از AR و MA به نام ARMA استفاده می‌شود که به صورت رابطه (۱-۲۰)، قابل تعریف است.

$$ARMA(p,q) \quad r_t = \sum_{j=1}^{P} \alpha_j r_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

که در آن:

ε_t نوفه سفید است وهمچنین p و q هم پارامترهای غیر منفی می‌باشند.

مدل ARIMA[۱۶]

اگر در مدل ARMA که به آن پرداختیم، ε_t نامانا باشد در این صورت سری زمانی دارای ریشه واحد[۱۷] خواهد بود. در این حالت با تفاضل گیری مدل را به مدل مانا تبدیل می‌کنیم. مدل جدید مدل ARIMA نامیده می‌شود. به عبارت دیگرARIMA(p,q,d) عبارت است از ARMA(p,q) که d بار تفاضل‌گیری شده باشد.

مدل ARCH

همچنین در مدل‌های ARCH ساختار خودهمبسته‌ای برای واریانس شرطی در نظر گرفته می‌شود که به شوک‌های تلاطم، اجازهٔ پایداری روی زمان را می‌دهد که در نتیجه آن تلاطم خوشه‌ای ظاهر می‌شود. یک مدل کلیARCH(q) به شکل زیر است:

$$y_t = \acute{x}_t \varphi + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

---

[۱۶] Auto Regressive Integrated Moving Average

[۱۷] Unit root