به نام خدا

دانشگاه شهید چمران اهواز

**دانشکده علوم ریاضی وکامپیوتر**

**گروه ریاضی**

**پایان‌نامه کارشناسی ارشد**

**عنوان:**

# مباحثی در حلقه‌های خوش‌ترکیب

نگارش :

**ابراهیم قشقایی**

استاد راهنما:

**دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده**

استاد مشاور:

**دکتر ولی گرجی‌زاده**

تیرماه ۱۳۸۹

# چکیده

**نام خانوادگی**: قشقایی — **نام**: ابراهیم

**عنوان پایان نامه:** مباحثی در حلقه‌های خوش‌ترکیب

**استاد راهنما:** دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده — **استاد مشاور:** دکتر ولی گرجی‌زاده

**درجه تحصیلی:** کارشناسی ارشد — **رشته:** ریاضی محض

**گرایش:** جبر

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهیدچمران اهواز

**تاریخ فارغ التحصیلی**: ۱۳۸۹/۴/۷ — **تعدادصفحه:** ۱۷۰

**واژه‌های کلیدی:** حلقه‌ی خوش‌ترکیب تعویض‌پذیر، حلقه‌ی یکتا خوش‌ترکیب تعویض‌پذیر، حلقه‌ی ضعیف خوش‌ترکیب، حلقه‌ی تقریباً خوش‌ترکیب، حلقه‌ی خوش‌ترکیب تعویض‌ناپذیر، حلقه‌ی یکتا خوش‌ترکیب تعویض‌ناپذیر، حلقه‌ی به‌طور قوی خوش ترکیب، حلقه‌ی پوچ خوش‌ترکیب، حلقه‌ی به‌طور قوی پوچ خوش‌ترکیب، عملگرهای خطی شمارش‌پذیر، حلقه‌ی عمومی خوش‌ترکیب، حلقه‌ی عمومی یکتا خوش‌ترکیب، حلقه‌ی زیبا، حلقه‌ی زیبای چپ، حلقه‌ی به‌طور قوی زیبای چپ


**چکیده:** در این نگارش، سعی بر این شده است که به مباحث اساسی و بنیادی در زمینه ی حلقه‌های خوش‌ترکیب پرداخته شود. حلقه‌ی خوش‌ترکیب که نخستین بار در سال ۱۹۷۷ توسط دبلیو.کیت.نیکلسون معرفی شد عبارت است از حلقه‌ای که بتوان هر عضو آن را به‌صورت مجموع یک عضو خودتوان و یک عضو یکال بیان نمود. دراین پژوهش به بررسی خواص حلقه‌های خوش‌ترکیب در سه حوزه‌ی حلقه‌های تعویض‌پذیر، حلقه‌های تعویض‌ناپذیر و حلقه‌های عمومی(حلقه‌ی نه لزوماً یکدار) پرداخته‌ایم. بررسی‌ها را در حوزه‌ی حلقه‌های تعویض‌پذیر با محوریّت حلقه‌های خوش‌ترکیب، حلقه‌های یکتا خوش‌ترکیب، حلقه‌های ضعیف خوش‌ترکیب و حلقه‌های تقریباً خوش‌ترکیب پیش برده‌ایم. درقلمروی حلقه‌های تعویض‌ناپذیر علاوه بر بررسی حلقه‌های خوش‌ترکیب، به شناسایی ویژگی‌های حلقه‌های یکتا خوش‌ترکیب، حلقه‌های به‌طور قوی خوش‌ترکیب، حلقه‌های پوچ خوش‌ترکیب و به‌طور قوی پوچ خوش‌ترکیب و نیز عملگرهای خطی شمارش‌پذیر و خاصیت خوش‌ترکیبی آن‌ها پرداخته‌ایم. در زمینه‌ی حلقه‌های عمومی نیز حلقه‌های خوش‌ترکیب و یکتا خوش‌ترکیب را بررسی کرده‌ایم.

در بخش پایانی با استفاده از ایده‌ای که توسط پروفسور امیدعلی شهنی کرم‌زاده مطرح شد، دسته‌ی جدیدی ازحلقه‌ها راتحت عنوان حلقه‌های زیبا معرفی نموده‌ایم. حلقه‌ی زیبا عبارت است از حلقه‌ای که هر عضو غیرصفرآن به‌صورت مجموع یک عضو مقسوم‌علیه صفر و یک عضو منظم قابل بیان باشد. نشان داده‌ایم که اگر $R$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر زیبا باشد، آن‌گاه حلقه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ روی $R$ نیز زیبا است. همچنین اثبات کرده‌ایم که حلقه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ روی یک حلقه‌ی تقسیم، یک حلقه‌ی زیبای چپ است و نیز یک حلقه‌ی آرتینی دوطرفه، زیبای چپ است اگر و فقط اگر با حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های تقسیم یکریخت باشد.

تقدیم به پدر و مادرم

با سپاس فراوان از استاد ارجمندم جناب پروفسور کرمزاده که مرا به شاگردی خود پذیرفتند

## فهرست

# پیشگفتار

در سال ۱۹۷۷، دبلیو.کیت.نیکلسون[۱] در مقاله‌ای تحت عنوان ترفیع خودتوان‌ها و حلقه‌های تبادل [۲۰]، حلقه‌ای را خوش‌ترکیب نامید که هر عضو آن را بتوان به صورت مجموع یک خودتوان و یک یکال نوشت. دبلیو.کیت.نیکلسون در آن مقاله نشان می‌دهد که هر حلقه‌ی خوش‌ترکیب یک حلقه‌ی تبادل است و یک حلقه با خودتوان‌های مرکزی حلقه‌ای خوش‌ترکیب است اگر و فقط اگر حلقه‌ی تبادل باشد .

به اعتقاد همه کسانی که بعدها به این زمینه علاقمند شدند و به بررسی این حلقه‌ها پرداختند، این مقاله اساسی‌ترین مقاله در این حوزه بوده است.

در سال ۱۹۹۴، ویکتور.پی.کامیلو[۲] و هو.پینگ.یو در مقاله‌ای تحت عنوان حلقه‌های تبادل، یکال‌ها و خودتوان‌ها [۷]، به دو نتیجه مهم و اساسی دست می‌یابند. اولین نتیجه این بود که: یک حلقه نیم‌تام است اگر و فقط اگر خوش‌ترکیب باشد وشامل ناشمارا خودتوان متعامد نباشد. دومین نتیجه این بود: هر حلقه‌ی یکال منظم یک حلقه خوش‌ترکیب است.

در سال ۱۹۹۸، دبلیو.کیت.نیکلسون و کی.وارادراجان [۲۲] به نتیجه بسیار مهمی دست می‌یابند که عملگرهای خطی شمارش‌پذیر خوش‌ترکیب هستند و این سؤال را مطرح می‌کنند که آیا عملگرهای خطی با هر بُعدی خوش‌ترکیب هستند؟ به این سؤال در سال ۱۹۹۷ ام.او.سیرکوید [۲۵] پاسخ داده بود.

---

[1] W.Keith Nicholson

[2] Victor P.Comillo

در سال ۱۹۹۹، دبلیو.کیت.نیکلسون در مقاله‌ای [۲۱] به معرفی حلقه‌های به‌طورقوی خوش‌ترکیب می‌پردازد و نشان می‌دهد که حلقه‌های به‌طورقوی $\pi$-منظم و حلقه‌های به‌طورقوی منظم، حلقه‌هایی خوش‌ترکیب هستند.

در سال ۲۰۰۱، چانچول هان و دبلیو.کیت.نیکلسون [۱۴] نشان می‌دهند که اگر $e$ یک خودتوان در حلقه‌ی $R$ باشد و اگر $eRe$ و $(1-e)R(1-e)$ هر دو حلقه‌ی خوش‌ترکیب باشند، آن‌گاه $R$ یک حلقه خوش‌ترکیب خواهد بود و از این حکم، نتیجه می‌گیرند که اگر $R$ حلقه‌ای خوش‌ترکیب باشد، آن‌گاه $M_n(R)$ حلقه‌ای خوش‌ترکیب است.

در سال ۲۰۰۲، دی.دی.اندرسون و وی.پی.کامیلو [۲] به بررسی حلقه‌های خوش‌ترکیب تعویض‌پذیر می‌پردازند و حلقه‌ی یکتا خوش‌ترکیب را معرفی می‌کنند.

در همان سال، ف.آذرپناه [۳] نشان می‌دهد که $C(x)$ چه هنگام خوش‌ترکیب است و نشان می‌دهد که $C(x)$ خوش‌ترکیب است اگر و فقط اگر دارای یک ایدآل اول خوش‌ترکیب باشد.
در سال ۲۰۰۳، وارن.دبلیو.مک گاورن[۳] [۱۳] حلقه‌ی تقریباً خوش‌ترکیب را معرفی می‌کند و به بررسی این حلقه می‌پردازد.

در سال ۲۰۰۴، دبلیو.کیت.نیکلسون[۴] و وای.ژو[۵] [۲۴] به بررسی حلقه‌های خوش‌ترکیب تعویض‌ناپذیر می‌پردازند و حلقه‌های یکتا خوش‌ترکیب تعویض‌ناپذیر را معرفی می‌کنند.

---

[۳] Warren Wm.McGoven

[۴] W.Keith.Nicholson

[۵] Y.Zhou

در سال ۲۰۰۵، دبلیو.کیت.نیکلسون و وای.ژوا [۲۳] حلقه‌ی عمومی خوش‌ترکیب را معرفی می‌کنند و به تحقیق در مورد این حلقه می‌پردازند و سعی بر این دارند که نتایج به‌دست آمده در مورد حلقه‌های خوش‌ترکیب را برای حلقه‌های عمومی خوش‌ترکیب تعمیم دهند.

در سال ۲۰۰۶، وی.پی.کامیلو، دی.خورانا، تی.وای.لم، دبلیو.کیت.نیکلسون و وای.ژو به تعمیم نتایجی که توسط نیکلسون و وارادراجان [۲۲] و سیرکوید [۲۴] به‌دست آمده بود پرداختند و نشان دادند که هر مدول پیوسته خوش‌ترکیب است.

در همان سال الکساندر جیمز دیزل[۶] [۸] حلقه‌های پوچ خوش‌ترکیب و به‌طورقوی پوچ خوش‌ترکیب را معرفی می‌کند و به بررسی این حلقه‌ها با حلقه‌های خوش‌ترکیب می‌پردازد و نیز در همان سال میونگ.سوک آهن و دی.دی.اندرسون حلقه‌های ضعیف خوش‌ترکیب را معرفی می‌کنند و به ارتباط بین حلقه‌های خوش‌ترکیب و حلقه‌های تقریباً خوش ترکیب با این حلقه‌ها می‌پردازند.

به همین ترتیب افراد دیگری در این ۳ دهه با موضوعات مختلف در رابطه با حلقه‌ی خوش‌ترکیب به رشد و توسعه‌ی این بخش از ریاضیات پرداختند که از این جمله افراد می‌توان به ژو وانگ[۷]، یو آن لین لی[۸]، اکسیانده یانگ[۹]، وی اکسینگ چن[۱۰]، توماس جان دورسی[۱۱]، مسعود طوسی[۱۲]، سیامک

[۶] Alexander James Diesl

[۷] Zhou Wang

[۸] Yuanlin Li

[۹] Xiande Yang

[۱۰] Weixing Chen

[۱۱] Thomas John Dorsey

[۱۲] Massoud Tousi

یاسمی[۱۳]، جیانلونگ چن[۱۴]، هونگبو ژانگ[۱۵]، گوآنگشی اکسیأ[۱۶]، فرانکویس کوچات[۱۷]، گاتام بروآه[۱۸] نام برد. در این پایان‌نامه سعی بر این شده است که به بررسی نتایج کلی به‌دست آمده از تحقیقات به عمل آمده روی حلقه‌های خوش‌ترکیب بپردازیم.

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم شده است.

در فصل اول به تعریف‌ها و قضیه‌های پیش‌نیاز می‌پردازیم.

در فصل دوم ابتدا حلقه‌های خوش‌ترکیب تعویض‌پذیر را معرفی و نتایج و قضایایی راجع به این حلقه‌ها بیان می‌کنیم و سپس به بررسی مفهوم‌های حلقه‌های یکتا خوش‌ترکیب، ضعیف خوش‌ترکیب و تقریباً خوش‌ترکیب خواهیم پرداخت.

در فصل سوم ابتدا حلقه‌های خوش‌ترکیب تعویض‌ناپذیر را معرفی و نتایج و قضایایی راجع به این حلقه‌ها بیان می‌کنیم و سپس به بررسی مفهوم‌های حلقه‌ی یکتا خوش‌ترکیب، به‌طورقوی خوش‌ترکیب و پوچ خوش‌ترکیب و به‌طورقوی خوش‌ترکیب خواهیم پرداخت و در آخر به این موضوع اساسی که عملگرهای خطی شمارش‌پذیر خوش‌ترکیب هستند می‌پردازیم.

---

[۱۳] Siamak Yassemi

[۱۴] Jianlong Chen

[۱۵] Hongbo Zhang

[۱۶] Guangshi Xiao

[۱۷] Francois Couchot

[۱۸] Gautam Borooah

در فصل چهارم ابتدا حلقه‌ی عمومی خوش‌ترکیب را معرفی و سپس به بررسی تعمیم قضایا و نتایج حلقه‌های خوش‌ترکیب در مورد حلقه‌های عمومی خوش‌ترکیب می‌پردازیم.

در فصل پنجم به معرفی حلقه‌ی زیبا که در سال ۲۰۰۹ پروفسور امید علی شهنی کرم‌زاده[۱۹] آن را معرفی کرده است خواهیم پرداخت و به بررسی ارتباط این حلقه با دیگر حلقه‌ها می‌پردازیم.

[۱۹] O.A.S.Karamzadeh

# ۱ مفاهیم اولیه

## ۱.۱ حلقه و حلقه‌ی کسرها

**تعریف۱-۱-۱.** یک مجموعه‌ی جزئی مرتب، مجموعه‌ای است ناتهی مانند $A$ همراه با رابطه‌ای چون $R$ بر $A \times A$ (به نام ترتیب جزئی از $A$) که:

انعکاسی: به ازای هر $a \in A$ $\quad (a,a) \in R$

پادمتقارن: $(a,b) \in R, (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

متعدی: $(a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

هرگاه $R$ یک ترتیب جزئی از $A$ باشد، آن‌گاه معمولاً به‌جای $(a,b) \in R$ می‌نویسیم $a \le b$.

عناصر $a,b \in A$ را قابل مقایسه گوییم اگر $a \le b$ یا $b \le a$.

فرض کنیم $(A, \le)$ یک مجموعه‌ی جزئی مرتب باشد. عنصر $a \in A$ در $A$ ماکسیمال است اگر به ازای هر $c \in A$، که با $a$ قابل مقایسه باشد، $c \le a$؛ به عبارت دیگر، به ازای هر $c \in A$، $a \le c \Rightarrow a = c$. کران بالای زیرمجموعه $B$ از $A$ عنصری مانند $d \in A$ است به طوری که به ازای هر $b \in B$، $b \le d$.

یک ترتیب جزئی از مجموعه‌ی $A$ که هر دو عنصرش قابل مقایسه باشند یک ترتیب خطی نامیده می‌شود.

زیرمجموعه‌ی ناتهی $B$ از $A$ که با $\le$ خطی مرتب باشد یک زنجیر در $A$ نام دارد.

**لم۱-۱-۲( لم زرن).** هرگاه $A$ یک مجموعه‌ی جزئی مرتب ناتهی باشد به‌طوری که هر زنجیر در $A$ کران بالایی در $A$ داشته باشد، آن‌گاه $A$ شامل عنصر ماکزیمال است.

**تذکر**.در این نگارش، لم زرن را به عنوان اصل موضوع درنظر می‌گیریم.

**تعریف۱-۱-۳.** یک حلقه مجموعه‌ای است ناتهی مانند $R$ همراه با دو عمل دوتایی(که معمولاً به صورت جمع (+) و ضرب (·) نموده می‌شوند) به‌طوری که:

۱. $(R,+)$ یک گروه آبلی است؛

۲. به ازای هر $a,b,c \in R$، $(ab)c = a(bc)$(ضرب شرکتپذیر است)؛

۳. $a(b+c) = ab + ac$ و $(a+b)c = ac + bc$(قوانین پخش‌پذیری از چپ و از راست)؛

هرگاه علاوه بر این،

به ازای هر $a,b \in R$، $ab = ba$؛

آن‌گاه گوییم $R$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر است. هرگاه $R$ شامل عنصری مانند $1_R$ باشد به‌طوری که به ازای هر $a \in R$، $1_R a = a 1_R$، آن‌گاه گوییم $R$ یک حلقه‌ی یکه‌دار است.

**تذکر.**در سراسر این نگارش، به‌جز فصل ۴، حلقه‌ها یکه‌دار فرض می‌شوند.

در این فصل ابتدا تعریف‌ها و قضیه‌های مورد نیاز را بیان می‌کنیم و با تعریف‌ها و ویژگی‌های حلقه‌هایی که در فصل‌های بعدی از آن‌ها صحبت خواهد شد، آشنا می‌شویم.

**تعریف ۱-۱-۴.** فرض کنیم $R$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و $S$ زیرمجموعه‌ای از $R$ باشد. $S$ را یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته $R$ گوییم اگر $1\in S$ و برای هر $x,y\in S$ نتیجه شود $xy\in S$.

**تعریف ۱-۱-۵.** فرض کنیم $R$ یک حلقه و $S$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از $R$ باشد که تحت جمع و ضرب در $R$ بسته است. هرگاه $S$ خود حلقه‌ای تحت این اعمال باشد، آن‌گاه $S$ را یک زیرحلقه‌ی $R$ می‌نامیم. زیرحلقه‌ی $I$ از حلقه‌ی $R$ یک ایدآل چپ است مشروط به این‌که

$$x\in I, r\in R \Rightarrow rx\in I$$

$I$ ایدآل راست است به شرط آن‌که

$$x\in I, r\in R \Rightarrow xr\in I$$

$I$ ایدآل است اگر هم ایدآل چپ و هم ایدآل راست باشد.

هر وقت حکمی در باب ایدآل‌های چپ داده شود فرض است که مشابه آن برای ایدآل‌های راست برقرار است.

**تعریف ۱-۱-۶.** ایدآل $P$ در حلقه‌ی $R$ را اول گوییم اگر $P\neq R$ و به ازای هر ایدآل $A,B$ در $R$

$$AB\subset P \Rightarrow B\subset P \quad \text{or} \quad A\subset P$$

**یادداشت.**در حلقه‌های تعویضپذیر می‌توان نتیجه گرفت که $P$ ایدآل اول است اگر $P \neq R$ و به ازای هر $a,b \in R$

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \quad \text{or} \quad b \in P$$

**تعریف ۱-۱-۷.**ایدآل (چپ) $M$ در حلقه‌ی $R$ را ماکسیمال(چپ) گوییم اگر $M \neq R$ و به ازای هر ایدآل (چپ) $N$ که $M \subseteq N \subseteq R$، یا $N = M$ یا $N = R$.

**قضیه ۱-۱-۸.** در حلقه‌ی ناصفر و یکه‌دار $R$ همواره ایدآل‌های (چپ)ماکسیمال وجود دارند. در واقع، هر ایدآل (چپ) در $R$(جز خود $R$) مشمول یک ایدآل (چپ) ماکسیمال است.

**برهان.** ر.ک.[۱۵] قضیه ۱۸-۲.■

**مثال ۱-۱-۹.**اگر $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از ایدآل‌های اول حلقه‌ی تعویضپذیر $R$ باشد، آن‌گاه $S := R - \bigcup_{i\in I} P_i$ یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از $R$ است.

**لم ۱-۱-۱۰.** فرض کنیم $S$ یک مجموعه‌ی ضربی بسته از حلقه‌ی تعویضپذیر $R$ باشد. رابطه‌ی $\sim$را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای $(a,s),(b,t) \in R \times S$

$$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow \exists u \in S : u(ta - sb) = ۰$$

در این صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

**برهان.** ر.ک. [۲۶] لم ۵-۱.■

**یادداشت.**

۱. به ازای $(a,s)\in R\times S$، رده هم‌ارزی شامل $(a,s)$ را با $a/s$ و مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $S^{-1}R$ تحت عمل‌های

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}, \qquad \frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{ta+sb}{st}$$

به ازای $a$ و $b$ های متعلق به $R$ و $t$ و $s$ های متعلق به $S$، حلقه‌ای تعویض‌پذیر است. این حلقه‌ی جدید، $S^{-1}R$ ، حلقه‌ی کسرهای $R$ نسبت به $S$ نامیده می‌شود.

۲. عضو صفر حلقه‌ی $S^{-1}R$، ۰/۱ و عضو همانی آن ۱/۱ است.

**تعریف ۱-۱-۱۱.** عنصر $a$ در حلقه‌ی $R$ منتظم‌نمای چپ است اگر $r\in R$ ی باشد به‌طوری که $r+a+ra=0$. عنصر $r$ را یک معکوس‌نمای چپ $a$ می‌نامند. گوییم ایدآل $I$ (راست، چپ، یا دوطرفه) از $R$ منتظم‌نمای چپ است اگر هر عنصر $I$ منتظم‌نمای چپ باشد. به‌همین نحو، گوییم $a\in R$ منتظم‌نمای راست است اگر $r\in R$ ی باشد به‌طوری که $r+a+ra=0$. معکوس‌نماهای راست و ایدآل‌های منتظم‌نمای راست به‌نحو مشابه تعریف می‌شوند.

**یادداشت.** گاهی شایسته است به‌جای $r+a+ra$ بنویسیم $r*a$. هرگاه $R$ یکه‌دار باشد، آن‌گاه $a$ منتظم‌نمای چپ (راست) است اگر و فقط اگر $1+a$ معکوس‌پذیر چپ (راست) باشد.

**تعریف ۱-۱-۱۲.** ایدآل چپ $I$ در حلقه‌ی $R$ منتظم(یا مدولی) است اگر $e\in R$ی موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $r\in R$، $r-re\in I$.به همین نحو، ایدآل راست $J$ منتظم است اگر $e\in R$ی موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $r\in R$، $r-er\in J$.

**قضیه ۱-۱-۱۳.** هرگاه $R$ حلقه باشد، آن‌گاه ایدآلی مانند $J(R)$ از $R$ وجود دارد به‌طوری که

۱. $J(R)$ اشتراک تمام ایدآل‌های چپ ماکسیمال منتظم $R$ است.

۲. $J(R)$ اشتراک تمام ایدآل‌های چپ ماکسیمال $R$ است.

۳. $J(R)$ یک ایدآل چپ منتظم‌نمای چپ است که شامل هر ایدآل چپ منتظم‌نمای چپ $R$ می‌باشد.

۴. احکام (۱) تا (۳) در صورت تعویض «چپ» با «راست» نیز برقرار هستند.

**برهان.** ر.ک. [۱۵] قضیه ۲-۳.■

**تعریف ۱-۱-۱۴.**ایدآل $J(R)$ ایدآل جیکوبسن حلقه‌ی $R$ نام دارد.

**تعریف ۱-۱-۱۵.**هر حلقه‌ی تعویض‌پذیر $R$ را که دقیقاً یک ایدآل ماکسیمال دارد حلقه‌ی شبه‌موضعی می‌نامیم. اگر $M$ تنها ایدآل ماکسیمال $R$ باشد، به‌جای حلقه‌ی شبه‌موضعی $R$ اغلب می‌نویسیم $(R,M)$.

**لم۱-۱-۱۶.** عضو $a$ از حلقه‌ی تعویض‌پذیر $R$ یکال است اگر و تنها اگر $a$ متعلق به هیچ ایدآل ماکسیمالی نباشد.

**برهان.** اگر $a \in R$ یکال باشد، آن‌گاه $(۱)=(a)$. لذا اگر ایدآل ماکسیمال $M$ از $R$ موجود باشد که $a \in M$، آن‌گاه $۱ \in M$ و این تناقض است.

برعکس، اگر $a \in R$ عضو یکال $R$ نباشد، آن‌گاه ایدآل $(a)$ ایدآل سره $R$ است و از قضیه ۱-۱-۸ نتیجه می‌شود که ایدآل ماکسیمالی مانند $M$ از $R$ وجود دارد که $(a) \subseteq M$ و این با این‌که $a$ بیرون هر ایدآل ماکسیمال است تناقض دارد.■

**لم۱-۱-۱۷.** فرض کنیم $R$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. در این صورت $R$ شبه‌موضعی است اگر و تنها اگر مجموعه عضوهای غیریکال $R$، ایدآل $R$ باشد.

**برهان.** ر.ک. [۲۶] لم ۱۳-۳.■

**لم و تعریف۱-۱-۱۸.** فرض کنیم $R$ یک حلقه تعویض‌پذیر باشد و $P \in spec(R)$.(مجموعه‌ی همه‌ی ایدآل‌های اول $R$ را طیف اول $R$ یا به اختصار طیف $R$ گوییم و با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.)فرض می‌کنیم $S := R-P$؛ توجه می‌کنیم که $R-P$ زیرمجموعه‌ی ضربی‌بسته از $R$ است. حلقه کسرهای $S^{-۱}R$ را با $R_P$ نمایش می‌دهیم. این حلقه یک حلقه‌ی شبه‌موضعی با ایدآل ماکسیمال

$$M = \left\{ \lambda \in R_P \mid \lambda = \frac{a}{s}, a \in P, s \in S \right\}$$

است. این حلقه را حلقه‌ی حاصل از موضعی‌سازی $R$ در $P$ می‌نامیم.

**برهان.** ایدآل بودن $M$ واضح است. بنا به لم ۱–۱–۱۷، کافی است نشان دهیم $M$ شامل همه عناصر غیریکال $R_P$ است. فرض کنیم $\lambda \in R_P - M$ و $\lambda = a/s$ که در آن $a \in R$ و $s \in S$. در این صورت $a \notin P$ و لذا $a/s$ در $R_P$ یکال و وارون آن $s/a$ است. از طرف دیگر اگر $\mu$ در $R_P$ یکال باشد و $\mu = b/t$ که در آن $b \in R$ و $t \in S$، آن‌گاه عضوهای $c \in R$ و $v \in S$ وجود دارند به‌طوری که در $R_P$ داریم:

$$\frac{b}{t}.\frac{c}{v} = \frac{۱}{۱}$$

بنابراین $w \in S$ وجود دارد به‌طوری که $w\,(bc - tv) = ۰$ و لذا $wbc = wtv$. بنابراین $b \notin P$ و چون این استدلال به ازای هر نمایش کسری $\mu$ مانند $\mu = b/t$ که $b \in R$ و $t \in S$ درست است، نتیجه می‌گیریم که $\mu \notin M$.

ایدآل ماکسیمال در حلقه‌ی شبه‌موضعی $R_P$ را با علامت $PR_P$ نمایش می‌دهیم.■

**مثال ۱–۱–۱۹.** فرض کنیم $Z_{(۲)} = \{a/b \in Q : ۲ \nmid b\}$. در این صورت $Z_{(۲)}$ زیرحلقه‌ی مجموعه‌ی اعداد گویا $Q$ است. ایدآل $M$ از $Z_{(۲)}$ که به‌صورت $M = \{a/b \in Q : ۲ | a\}$ تعریف می‌شود تنها ایدآل ماکسیمال $A$ است. زیرا عضوهای $M$ همگی غیریکال‌های $Z_{(۲)}$ هستند. لذا بنا به لم ۱–۱–۱۷، حلقه‌ی $Z_{(۲)}$ یک حلقه‌ی شبه‌موضعی است.

**تعریف ۱–۱–۲۰.** یک حلقه‌ی شرکتپذیر با واحد یا بدون واحد را حلقه‌ی عمومی گویند.