بسم الله الرحمن الرحیم

۱۱۲۰۵۴

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد فیزیک گرایش ذرات بنیادی

تعبیر نیرو در مکانیک کوانتمی

استاد راهنما:

دکتر امید حمیدی

مولف:

زهره محمودی میمند

تابستان ۱۳۸۷

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش فیزیک

دانشکده علوم

دانشگاه شهید باهنرکرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: زهره محمودی میمند

استاد راهنما: دکتر امید حمیدی

داور ۱: دکتر علی شجاعی

داور ۲: دکتر محمد رضا مطلوب

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر مجید رهنما

با سپاس و ستایش حضرت حق و لطف بیکرانش

و با تشکر از

استاد گرانقدرم آقای دکتر حمیدی به پاس راهنمایی های ازشمندشان

خانواده عزیز و دوستان مهربانم به پاس همراهی صمیمانه شان

چکیده

در این پایان‌نامه، نیروی کازیمیر میدان شرودینگر در دو مسئله ذره در جعبه یک بعدی و پله پتانسیل محاسبه می‌شود. همچنین نیروی وارد بر دیواره از طرف ذره در جعبه یک بعدی، از دو روش متفاوت محاسبه و مقایسه می‌شود. برای محاسبه نیرو از تئوری میدان کوانتمی استفاده می‌شود و نتایج با روش مکانیک کوانتمی معمولی مقایسه می‌شود. به این منظور مرور مختصری بر تئوری میدان‌های کلاسیک و کوانتمی، همچون تانسور انرژی-تکانه و کوانتیزه کردن مرتبه دوم، انجام می‌شود.

فهرست

فصل اول: مقدمه

فصل دوم: مروری بر تئوری میدان‌های کلاسیک و کوانتمی

فصل سوم: محاسبه نیرو در مسائل خاص با استفاده از تئوری میدان کوانتمی

فصل چهارم: بحث و نتیجه‌گیری

فصل اول

مقدمه

مقدمه :

هدفی که در این جستجوی علمی دنبال میشود، یافتن معادلی برای نیرو در مکانیک کوانتمی و همچنین بررسی این پرسش در مسائل خاص است. نیرو از مهمترین و اصلی‌ترین مفاهیم در مکانیک کلاسیک است. به طور کلی در مکانیک کلاسیک برای بررسی یک مسئله می‌توانیم همزمان دو دیدگاه داشته باشیم و مسئله را از حیث نیروها یا از حیث انرژی مورد بررسی قرار دهیم. اما در مکانیک کوانتمی انرژی و هامیلتونین مورد بحث هستند و مفهوم نیرو مورد بررسی نیست. اهمیت مفهوم نیرو در مکانیک کلاسیک باعث می‌شود هنوز هم این کنجکاوی وجود داشته باشد که مفهوم نیرو در مکانیک کوانتمی به چه نحوی امکان بروز دارد.

اگر دنبال سابقه‌ای از مفهوم نیرو در مکانیک کوانتمی معمولی باشیم به قضیه ارنفست[1] می‌رسیم. اگر بخواهیم یک تناظر دینامیکی بین مکانیک کوانتمی با مکانیک کلاسیک برقرار کنیم، باید تناظری بین مقدار قابل انتظار یک مشاهده‌پذیر کوانتمی و تابع کلاسیک متناظر با آن وجود داشته باشد.

$$< \beta, t\left|\hat{A}\right|\beta, t > \leftrightarrow A_{\text{کلاسیکی}}(t) \qquad (۱-۱)$$

به طور معادل انتظار داریم که معادله‌ی حرکت $< \hat{A} >_\beta$ ، که در اثر چرخش $|\beta, t >$ ایجاد شده است، شبیه به معادله‌ی حرکت تابع کلاسیکی $A(t)$ باشد.این شرط به قضیه ارنفست موسوم است. بنابراین با قیاس با شکل کلاسیکی معادله حرکت، معادله حرکت برای مقدار قابل انتظار یک عملگر به صورت زیر وضع می‌کنیم.

$$\frac{dG}{dt} = \{G, \mathcal{H}\} + \frac{\partial G}{\partial t} \qquad (۲-۱)$$

$$\frac{d}{dt} < A(t) >_\beta = < \beta, t\left|\frac{[\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}]}{i\hbar}\right|\beta, t > + < \beta, t\left|\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right|\beta, t > \qquad (۳-۱)$$

اگر عملگر $\hat{A} = \hat{p}_x$ وابستگی صریح به زمان نداشته باشد.

$$\frac{d}{dt} < \hat{p}_x >_\beta = < \beta, t\left|\frac{[\hat{p}_x, \hat{\mathcal{H}}]}{i\hbar}\right|\beta, t > \qquad (۴-۱)$$

هامیلتونین ذره را در پتانسیلی که تابعی منحصرا وابسته به مکان فرض می‌شود، در نظر می‌گیریم

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{۱}{۲m}\left(\hat{p}_x{}^{۲} + \hat{p}_y{}^{۲} + \hat{p}_z{}^{۲}\right) + \hat{V}(x, y, z) \qquad (۵-۱)$$

در نتیجه خواهیم داشت

---

[1] Ehrenfest

$$\frac{d}{\mathrm{dt}} < \hat{p}_x >_\beta = < \beta, t \left| \frac{[\hat{p}_x, \hat{\mathcal{H}}]}{i\hbar} \right| \beta, t > = < \beta, t \left| \frac{-i\hbar \frac{\partial \hat{\mathrm{V}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{\partial x}}{i\hbar} \right| \beta, t >$$

$$= -< \beta, t \left| \frac{\partial \hat{\mathrm{V}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{\partial x} \right| \beta, t > \qquad (١ - ٦)$$

که مشابه رابطه کلاسیکی زیر است

$$\frac{d\hat{p}_x}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \qquad (١ - ٧)$$

بنابراین طبق قضیه ارنفست که معادله‌ی تحول زمانی مشاهده‌پذیرهای کوانتمی شبیه معادله‌ی کلاسیک حرکت هستند، معادل کوانتمی نیرو به شکل زیر بدست می‌آید[٦] [١٢]

$$F_x = -< \beta, t \left| \frac{\partial \hat{\mathrm{V}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{\partial x} \right| \beta, t > \qquad (١ - ٨)$$

در این پایان‌نامه روش اصلی محاسبه نیرو، استفاده از تئوری میدان است که البته در موردی با فرم معادله‌ی (١ – ٦) مقایسه می‌شود.

در فصل دوم ما یک بررسی آموزشی خواهیم داشت، که شامل کوانتش میدان به روش کانونیک، معرفی تانسور انرژی-تکانه، کوانتیزه کردن میدان و به طور خلاصه تئوری میدان کلاسیک و کوانتمی است معنی عناصر تانسور انرژی-تکانه، که در ادامه بحث بسیار اساسی هستند، مورد بررسی قرار می‌گیرد و از آنجا که میدان مورد بررسی ما میدان شرودینگر است، با کوانتیزه کردن این میدان آشنا می‌شویم. همچنین در انتهای فصل نیروی کازیمیر مورد بررسی اجمالی قرار می‌گیرد.

در فصل سوم با بررسی چند مسئله‌ی خاص سعی می‌کنیم کمیتی که از آن به عنوان نیرو تعبیر می‌کنیم را محاسبه کنیم و از این دیدگاه به مسئله نگاه کنیم. در واقع دو مسئله‌ی کلی داریم، جعبه یک بعدی و پله پتانسیل. در هر دو مسئله نیروی کازیمیر را محاسبه میکنیم و در مسئله ذره در جعبه میخواهیم نیرویی که، ذره‌ای در جعبه به دیواره وارد می‌کند را حساب کنیم. برای این محاسبه از دو رهیافت مکانیک کوانتمی معمولی و نظریه میدان کوانتمی استفاده می‌شود. هدف این است که آیا برای میدان شرودینگر نیروی کازیمیر محدود، وجود دارد؟ تعبیر نیرو در دو دیدگاه چقدر بهم نزدیک است؟

در فصل چهارم، نتایج مورد بررسی دقیق‌تر قرار می‌گیرند، و در واقع میزان رسیدن به اهداف اولیه مورد ارزیابی خواهد شد.

فصل دوم

مروری بر تئوری میدان‌های کلاسیک و کوانتمی

۲-۱ مقدمه :

در ابتدای این بررسی آموزشی، مروری بر مفاهیم اولیه در تئوری میدان کلاسیک[۱] خواهیم داشت. در فیزیک کلاسیک «ذرات» و «میدانها» دو مفهوم متفاوت هستند که با پدیده‌های متفاوتی در ارتباط هستند. این دو موجود به ترتیب با مفاهیم گسستگی و پیوستگی در ارتباط هستند.

یک سیستم ممکن است شامل تعداد بسیار زیادی از ذرات باشد- مثل ملکول‌های یک گاز- ولی این تعداد هر چه قدر که زیاد باشند، شمارش‌پذیر هستند. در این مورد تئوری پایه «دینامیک کلاسیک» است. درصورتی که متغیرهای یک سیستم مانند شدت میدان الکتریکی، میدان سرعت در یک شاره و غیره شمارش پذیر نیستند و تئوری پایه «تئوری میدان» است.

تئوری اساسی در مکانیک کلاسیک، مکانیک نیوتنی است که می‌تواند در فرم‌های ریاضی متفاوتی بیان شود، مثل فرم لاگرانژی و فرم هامیلتونی. پدیده‌ها و قوانین میدان‌ها، معمولاً بوسیله معادلات دیفرانسیل جزئی بیان می‌شوند- مثل معادلات مرتبط با دینامیک شاره‌ها و میدان‌های الکترومغناطیس- اما این معادلات در فرم لاگرانژی و هامیلتونی هم بیان می‌شوند و این معادلات اخیر می‌توانند از فرم تابع چگالی لاگرانژی از طریق اصل وردش استخراج شوند.

---

[۱] Classical field theory

به عنوان مثال در فیزیک کلاسیک، میدان الکترومغناطیس به عنوان تابعی پیوسته از متغییرهای فضا-زمان است. یعنی تعداد بینهایت غیرقابل‌شمارش از متغیرها را در خود دارد. اگر همه پدیده‌های الکترومغناطیسی- شامل انتشار نور - پیوسته باشند، پس توصیف با معادلات ماکسول یا از طریق معادلات وردشی یکسان هستند.

اما طبق تئوری کوانتم تابش اینشتن در ۱۹۰۵، آزمایش‌های مستقیم مثل فتوالکتریک و کامپتون برای خواص ذره‌ای تابش الکترومغناطیس شواهد قوی ارائه می‌کنند. این ما را به جستجوی یک تئوری ریاضی برای توصیف خواص کوانتمی میدان‌های پیوسته رهنمون می‌سازد، که با کوانتیزه‌کردن[۲] پدیده‌های اتمی و ملکولی در مکانیک کوانتمی قابل مقایسه است. گسترش مکانیک کوانتمی به خواص کوانتیزه میدان‌ها، «تئوری میدانهای کوانتیزه»[۳] خوانده می‌شود.

مفهوم «کوانتم» برای تابش از تئوری فوتون اینشتین در ۱۹۰۵ نشات میگیرد، اما روش ریاضی رسمی «کوانتیزه کردن» برای دینامیک ذرات با تئوری اتم بوهر در ۱۹۱۳ شروع و در فرم شرایط کوانتمی توسط زیمرفیلد و ویلسون عمومیت داده شد.

$$\oint p_\kappa \, dq_\kappa = n_\kappa h \qquad (۱-۲)$$

[۲] Quantization
[۳] Theory of quantized fields

این «مکانیک کوانتمی قدیم» برای اتم هیدروژن نتایج موفق شگفت‌آوری داشت، اما بعد از آن با مشکلات بسیار اساسی با سایر سیستمها برخورد کرد. بنابراین مکانیک کوانتمی متولد شد و شرایط کوانتیزه کردن در فرم رابطه عدم قطعیت فرمول‌بندی شد.

$$pq - qp = \frac{\hbar}{i} \tag{۲ − ۲}$$

بر طبق این رابطه، مکانیک کوانتمی در فرم تئوری ماتریسی و تئوری شرودینگر بنا شده است. مکانیک کوانتمی همزمان خواص موجی و ذره ای را ارائه میکند، خواص دوجانبه جمع نشدنی حالا با روابط اینشتن و دوبروی به هم پیوند داده می‌شوند.

$$E = h\nu\,, \qquad p = \frac{h}{\lambda} \tag{۳ − ۲}$$

مکانیک کوانتمی به شکل موفقیت آمیزی همه پدیده‌های شناخته‌شده اتمی، ملکولی و حالت جامد و فیزیک ذرات را توجیه و بررسی می‌کند[۱].

مفهوم فوتون‌ها به عنوان کوانتم‌های میدان الکترومغناطیسی به آغاز قرن بیستم برمی‌گردد. در سال ۱۹۰۰، برای توضیح طیف تابش جسم سیاه، پلانک یک اصل موضوع را بیان کرد، اینکه جذب و گسیل تابش به وسیله اتمها به صورت کوانتم‌های گسسته اتفاق می‌افتد. اینشتن در سال ۱۹۰۵ به تفسیر اساسی‌تری رسید. او از تحلیل آماری قانون تابش پلانک و از انرژی‌های اثر فوتوالکتریک نتیجه گرفت که این مکانیزم اتمی جذب و گسیل تابش نبوده که کوانتیزه شده است،

بلکه خود میدان الکترومغناطیسی از فوتون‌ها تشکیل شده‌است. اثر کامپتون نیز بر این تفسیر صحه گذاشت.

پایه‌های یک تئوری سیستماتیک از میدان‌ها در سال ۱۹۲۷ توسط دیراک در مقاله معروفش[4] بنیان گذاشته شد. کوانتش میدان الکترومغناطیسی نمونه‌ای از کوانتش میدان است که کوانتم‌های این میدان به خوبی با خواص ذره‌ای تعریف می‌شوند. برهمکنش بین این ذرات توسط میدان‌های دیگری که کوانتم‌های آنها ذرات دیگری هستند بیان می‌شود.

برای مثال می‌توانیم به برهمکنش ذرات باردار الکتریکی فکر کنیم، مثل الکترون‌ها و پوزیتون‌ها، که با میدان الکترومغناطیسی یا از طریق مبادله فوتون‌ها به وجود آمده‌اند. الکترون‌ها و پوزیترون‌ها خودشان می‌توانند به عنوان ذرات میدان الکترون-پوزیترون تصور شوند. یک دلیل مهم برای کوانتش چنین میدان‌هایی این است که امکان تغییر تعداد ذرات وجود داشته باشد. برای مثال در تولید و نابودی جفت الکترون و پوزیترون تعداد ذرات تغییر می‌کند. [۲]

در یک روش میدان را -به عنوان مثال میدان الکترومغناطیسی- با تجزیه میدان کلاسیک به مدهای طبیعی[5] و وضع کردن روابط جابجایی نوسانگر هماهنگ بر مختصات طبیعی، کوانتیزه می‌کنند. اما میتوان میدان‌ها را در هر نقطه از فضا به عنوان متغییرهای دینامیکی گرفت و آنها را

[4] The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation
[5] Normal modes

مستقیماً کوانتیزه کرد. این دیدگاه، مکانیک کلاسیک از سیستمی از ذرات را، به سیستم پیوسته یعنی میدان‌ها عمومیت می‌بخشد. لاگرانژین (در واقع خواهیم دید که چگالی لاگرانژین) را با معادله میدانی که از اصل هامیلتون بدست می‌آید، معرفی می‌کنیم. می‌توان با معرفی اندازه‌حرکت مزدوج[۶] از میدان‌ها، روابط جابجایی کانونیک[۷] را مستقیماً روی میدان‌ها و تکانه‌های مزدوج آنها وضع کرد. این روش، کوانتش سینماتیک را برای هر میدان کلاسیک منتج از لاگرانژین، فراهم می‌کند. این روش در این فصل برای بوزون‌ها بکار می‌رود و برای فرمیون‌ها روش متفاوتی نیاز است.[۲]

۲-۲ معادله میدان کلاسیک:

در دینامیک کلاسیک، حالت یک سیستم متشکل از N ذره، از طریق ۳N جفت از مختصه‌های تعمیم یافته q_k و تکانه همیوغ آنها p_k توصیف می‌شود.

در تئوری‌های میدان کلاسیک، یک میدان با یک تابع پیوسته از متغیرهای حقیقی، $\varphi(X,t)$ توصیف می‌شود و n میدان با n تا از چنین توابعی به شکل $\varphi_r(X,t)$ که $r = ۱,۲,۳,..,n$ توصیف می‌شوند. هر میدان با معادلات دیفرانسیل جزئی از متغیرهای مستقل t و X توصیف می‌شود، که معادلات میدان نامیده می‌شوند. مثلاً در تئوری میدان الکترومغناطیس کلاسیک، ٤میدان وجود دارد که بردار میدان با ٤ مولفه را تشکیل می‌دهند..

[۶] Momentum conjugate
[۷] Canonical commutation relations

معادله های حرکت ذرات در دینامیک کلاسیک می‌توانند از اصل وردش بدست آیند. ما می‌توانیم این دیدگاه را به میدان گسترش دهیم.

یک میدان به عنوان یک سیستم دینامیکی که درجات آزادی آن بی‌نهایت شمارش‌ناپذیر هستند، در نظر گرفته می‌شود. اینجا X ها مختصه نبوده و تنها پارامترهای مستقل هستند

۲-۲-۱ روش نشانه‌گذاری :

x^{μ} $(\mu = 0,1,2,3)$ را برای چهاربردار فضا-زمان به ترتیب با مولفه زمانی و مختصات فضایی بکار می‌بریم $x^{\mu} = (ct,X)$ یعنی

$$x^{j}\ (j = 1,2,3)\,,\ x^{0} = ct \qquad (2-4)$$

مولفه‌های چهاربردار، با اندیس‌های یونانی و مولفه‌های سه‌بردار فضایی با اندیس‌های لاتین برچسب گذاشته می‌شوند. مولفه‌های تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ به شکل زیر خواهند بود

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1 \qquad g_{\mu\nu}=0\ ,\ \mu\neq\nu \qquad (2-5)$$

ما بردار هموردا[8] را به شکل زیر از بردار پادوردا[9] تعریف می‌کنیم

[8] covariant
[9] contravariant

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}$$

که در آخرین عبارت از قرارداد جمع استفاده شده است. از روابط قبل نتیجه می‌شود که

$$x_\mu = (ct, -x) \qquad (۲ - ۷)$$

ما همچنین ماتریس متریک پادوردا را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = g^{\lambda}_{\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \qquad (۲ - ۸)$$

که δ^{λ}_{ν} همان دلتای کرونیکر معمولی است. پس

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

در تبدیلات لورنتس $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \; x^\nu$

کمیت زیر ناوردا می‌ماند، یعنی این کمیت اسکالر است

$$x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - X^2 \qquad (۲ - ۹)$$

ضرب اسکالر هم به این شکل نوشته می‌شود که تحت تبدیلات لورنتس ناورداست

$$ab = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} \qquad (۲ - ۱۰)$$

تعمیم چهاربعدی از عملگر گرادیان مثل چهاربردار تبدیل می‌شود. اگر $\varphi(x)$ یک تابع اسکالر باشد، پس

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \qquad (۲ - ۱۱)$$