بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه ملایر

دانشکده علوم پایه – گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
(گرایش آنالیز عددی)

بکارگیری تجزیه دامنه در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی (با استفاده از روش تفاضلات متناهی و روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی)

بوسیله‌ی :

مهدی سالاری نسب

استاد راهنما:

دکتر محسن اسماعیل بیگی

استاد مشاور:

دکتر خسرو سایوند

بهمن ۹۲

به نام خدا

بکارگیری تجزیه دامنه در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی (با استفاده از روش تفاضلات متناهی و روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی)

بوسیله‌ی

مهدی سالاری نسب

پایان نامه
ارائه شده به تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی
از فعالیت‌های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته
ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)
از دانشگاه ملایر

ارزیابی و تایید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه ....

دکتر محسن اسماعیل بیگی، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد راهنما) ....

دکتر خسرو سایوند، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد مشاور) ....

دکتر حمید اسمعیلی، دانشیار ریاضیات کاربردی (استاد داور) ....

دکتر فرشید میرزائی، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد داور) ....

دکتر سعید باقری، استادیار ریاضیات محض (نماینده تحصیلات تکمیلی) ....

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به خانواده عزیزم به ویژه پدر و مادر عزیز و مهربانم که دلسوزانه مرا در این راه یاری نمودند و وجود مقدسشان مایه دلگرمی من در زندگی است.

تقدیم به روح پاک و معصوم برادر عزیزم محسن که یاد و خاطره اش هیچ گاه از ذهنم بیرون نخواهد رفت و همیشه در قلبم جا دارد.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محسن اسماعیل‌بیگی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر خسرو سایوند که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از ایشان به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند. همچنین از مادر بزرگ عزیزم که همیشه لطفش شامل حال من بوده و زحمات زیادی برای من کشیده است، سپاسگزاری می کنم.

نام خانوادگی دانشجو: سالاری نسب نام: مهدی
عنوان پایان نامه: بکارگیری تجزیه دامنه در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی (با استفاده از روش تفاضلات متناهی و روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی)
استاد راهنما: محسن اسماعیل بیگی
استاد مشاور: خسرو سایوند
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر ــ گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۸۸
کلید واژه ها:معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، توابع پایه شعاعی، روش هم محلی و تفاضلات متناهی، روش تجزیه دامنه

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی توابع پایه شعاعی پرداخته و سپس با استفاده از روش تفاضلات متناهی و روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی به حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پرداخته می شود. در حل این معادلات بر روی دامنه های بزرگ با استفاده از روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی، احتمال بدوضعی ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی حاصل بالا می رود. برای غلبه بر این مشکل، روشی تحت عنوان روش تجزیه دامنه ارایه می شود که در این روش دامنه مسأله به چندین زیر دامنه تقسیم می شود و سپس جواب مسأله بر روی هریک از این زیر دامنه ها بدست می آید. این کار باعث کوچکتر شدن مرتبه ماتریس ضرایب و به دنبال آن کاهش بد وضعی ماتریس ضرایب می شود. در انتها با ذکر مثالهای متنوع و ارایه نتایج عددی قابلیت ساختار معرفی شده بررسی می گردد.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

پدیده‌های طبیعی را می توان توسط مدل‌های ریاضی توصیف کرد و از آنجایی که نمی‌توان برای بسیاری از این مدل‌ها جواب واقعی یافت از روش‌های عددی بهره می‌گیریم. تعداد زیادی از این مدل‌ها به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی منجر می‌شوند.

بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی یا دامنه حل آنها، به اندازه‌ای پیچیدگی دارند که دستیابی به جواب دقیق برای آنها دشوار بوده و یك روش عددی مناسب مورد نیاز است. روش‌های سنتی موجود (نظیر تفاضلات متناهی[۱] و اجزاء محدود[۲]) برای حل این معادلات عمدتاً وابسته به شبکه‌بندی دامنه حل مسأله می‌باشند. از جمله مشکلات روش‌های وابسته به شبکه[۳] می‌توان به دشواری‌های تولید یك شبکه مناسب (هزینه محاسباتی بالا) در برخی مسائل اشاره کرد.

به دلیل مشکلات فوق‌الذکر، روش‌های بدون‌شبکه[۴] جایگزینی برای روش‌های سنتی وابسته به شبکه به حساب می‌آیند. به منظور تعریف یك روش تحت عنوان بدون‌شبکه، معیار ارایه شده در مرجع [۱] بکار می‌رود. یك روش را بدون‌شبکه گوییم هر گاه معادلات اصلی که گسسته‌سازی مساله مقدار مرزی را به عهده دارند وابسته به یك شبکه خوش‌رفتار نباشند (مستقل از ارایه یك شبکه خوش‌رفتار باشند).

روش توابع پایه شعاعی[۵]، یك روش بدون‌شبکه بوده و به‌دلیل خاصیت شعاعی بکارگیری آن در ابعاد بالا با دشواری‌های کمتری همراه است و دقت طیفی[۶] برای انواع معینی از آنها دست‌یافتنی است[۲]. به‌علاوه این روش بر روی دامنه‌های نامنظم به خوبی قابل استفاده است. به‌هرحال وجود برخی چالش‌ها و مبحث پایداری، همچنان مانع بکارگیری گسترده این روش است. روش توابع پایه شعاعی یکی از ابزارهای اساسی برای درونیابی داده‌های پراکنده چند متغیره است. بعضی از کاربردهای آن در نقشه‌برداری، شبکه‌های عصبی، تصویر برداری پزشکی و حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی می‌باشد.

۲.۱ تاریخچه توابع پایه‌ای شعاعی

مفهوم و متدولوژی توابع پایه‌ای شعاعی در سال ۱۹۷۱ توسط رولند هاردی[۷] ارایه شد. او این روش را برای توابع پایه‌ای شعاعی چندربعی[۸] ارایه کرد[۳].

---

[۱] Finite Differences
[۲] Finite Elements
[۳] Mesh
[۴] Mesh Free
[۵] Radial Basis Functions
[۶] Spectral
[۷] Rolland Hardy
[۸] Multiquadric

هاردی در مطالعات خود، با درونیابی دو متغیره از داده‌های پراکنده و تنک سر و کار داشت. هیچ یک از روش‌های درونیابی موجود (نظیر فوریه، چندجمله‌ای‌ها و اسپلاین‌های دو متغیره) برای این منظور رضایت‌بخش نبودند، زیرا این روش‌ها یا خیلی هموار بودند یا از نوسانات زیادی برخوردار بودند. به‌علاوه نامنفرد بودن ماتریس درونیاب آنها تضمین شده نبود. قضیه هار[۱] می‌گوید، که برای هر مجموعه از توابع پایه غیر وابسته به گره، مجموعه‌ای از گره‌های متمایز وجود دارد که در ابعاد دو یا بالاتر ماتریس درونیاب نظیر به آنها منفرد است[۴].

نکته کلیدی روش هاردی آن بود که بر روی مسائل با ابعاد بیش از یک هم به‌خوبی کار می کرد، چرا که تنها مفهوم فاصله در آن مطرح بود که در هر بعدی به‌راحتی قابل محاسبه بوده و در واقع یک مفهوم تک‌بعدی است.

در سال ۱۹۸۲ ، ریچارد فرانک[۲] روش چندربعی را شهرت بخشید. او در گزارش خود ۳۲ روش مشهور و معمول درونیابی را بر روی برخی مثال‌های متنوع مورد بررسی و مطالعه قرار داد [۵]. ریچارد دریافت که روش چندربعی بهترین روش است. همچنین او ایده نامنفرد بودن غیر مشروط ماتریس درونیاب نظیر به روش چندربعی را ارایه کرد، اما تا سالها بعد یعنی تا سال ۱۹۸۶ ، که کارلس میچلی[۳] آنرا اثبات کرد [۶]، تنها به‌عنوان یک ایده مطرح بود. یک ویژگی اصلی روش چندربعی آن است که تابع درونیاب، یک ترکیب خطی از انتقال‌های یک تابع پایه است که هر کدام از آنها تنها به فاصله اقلیدسی نقاط از مرکزش بستگی دارد. بنابراین هر کدام از این توابع پایه، متقارن شعاعی نسبت به مرکزش می‌باشد. روش چندربعی به دیگر توابع پایه نظیر اسپلاین‌های صفحه باریک[۴] [۷] و گاوسی[۵] تعمیم داده شد و به عنوان روش توابع پایه‌ای شعاعی نام گرفت.

در سال ۱۹۹۰ ، روش و مفهوم توابع پایه‌ای شعاعی یک‌بار دیگر مطرح شد و آن زمانی بود که کانزا[۶] روشی را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی ارایه کرد [۸، ۹]. از آن زمان تا به حال روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی به‌طور گسترده در عرصه‌های مختلف علوم و مهندسی به‌کار گرفته شده‌اند.

۳.۱ ضرورت استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی در درونیابی ابعاد بالا

منطبق کردن داده‌های پراکنده یک مسأله اساسی در نظریه تقریب و به‌طور کلی در مدل‌بندی داده‌ها است. چالش ریاضی در این مسأله آن است که یک فرمول‌بندی منجر به یک مسأله خوش‌وضع داشته باشیم. ابتدا

[۱] Haar
[۲] Richard Franke
[۳] Charles Micchelli
[۴] Thin Plate Splines
[۵] Gaussian
[۶] Kansa

مسأله را در یک نگاه کلی مطرح می‌کنیم:

یک مجموعه از داده‌ها (مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها و موقعیت‌هایی که این اندازه‌ها در آن ثبت شده‌اند) داریم. می‌خواهیم قاعده‌ای بیابیم که به ما اجازه بدهد تا اطلاعات بدست آمده درباره فرایندی را که در حال مطالعهٔ آن بوسیله ابزار اندازه‌گیری بوده‌ایم، به سایر موقعیت‌ها امتداد بخشیم.

به‌عنوان مثال به موارد زیر می‌توان اشاره کرد[۱۰]:

حالت یک بعدی: مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها را در اختیار داریم که در یک دورهٔ زمانی معین بدست آمده‌اند.

حالت دو بعدی: داده‌هایی که از موقعیت و ایستگاه‌های هواشناسی گردآوری شده است و در جهت تولید نقشه‌های هواشناسی استفاده می‌شوند.

حالت سه بعدی: بررسی دمای توزیع شده در مجموعه‌ای از حجم‌های جامد.

ابعاد بالاتر: در بهینه‌سازی، اقتصاد، آمار، هوش مصنوعی و در نظریهٔ یادگیری با آن مواجه می‌شویم.

می‌خواهیم یک تابع S_f بیابیم که به خوبی بر داده‌های ارایه شده منطبق شود. یا به عبارت بهتر می‌خواهیم یک S_f بیابیم که دقیقاً بر داده‌ها منطبق شود (درونیابی داده‌های پراکنده) یا می‌خواهیم یک S_f بیابیم که تقریباً بر داده‌ها منطبق شود (تقریب داده‌های پراکنده نظیر کمترین مربعات خطا). در اکثر موارد، زمانی که با داده‌های مختل‌شده سر و کار نداریم، تمرکز ما بر مفهوم درونیابی است.

مسأله: (درونیابی داده‌های پراکنده)

مجموعه داده‌های $(x_j, y_j),\ j = ۱, \dots, N$ با $x_j \in \mathbb{R}^s$ و $y_j \in \mathbb{R}$ داده شده‌اند، یک تابع (پیوسته) S_f از یک خانوادهٔ خاص را پیدا کنید به گونه‌ای که؛

$$S_f(x_j) = y_j, \qquad j = ۱, \dots, N.$$

که $\chi = \{x_j,\ j = ۱, \dots, N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^s$ در برگیرنده موقعیت‌های اندازه‌گیری (موقعیت داده‌ها) و $y_j \in \mathbb{R}$ ها در حقیقت اندازه‌های نظیر به این موقعیت‌ها می‌باشند (مقادیر داده‌ها).

اگر S_f یک ترکیب خطی از توابع پایه B_k در نظر گرفته شود، یعنی:

$$S_f(x) = \sum_{k=۱}^{N} c_k B_k(x). \tag{۱.۱}$$

آنگاه مسألهٔ درونیابی به حل یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر منجر می‌شود.

$$AC = Y,$$

که درایه‌های ماتریس A به صورت $A_{j,k} = B_k(x_j),\ j, k = ۱, \dots, N$ داده می‌شوند و $C = [c_۱, \dots, c_N]^T$ و $Y = [y_۱, \dots, y_N]^T$.

دستگاه دارای جواب یکتا خواهد بود اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد.

در حالت یک بعدی می‌دانیم که می‌توان N جفت داده متمایز را با استفاده از یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $N-1$ درونیابی کرد. امّا برای ابعاد بالاتر دیگر این نتیجه همواره برقرار نیست.

قضیه ۱.۳.۱. (میرهوبر[۱] ــ کورتیس[۲]). *اگر* $s \geq 2$ *و* $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ *(شامل حداقل یک نقطه داخلی باشد) آن‌گاه هیچ فضای هاری از توابع پیوسته وجود ندارد* [۱۱، ۱۲].

به منظور درک بهتر قضیه لازم است تا فضای هار تعریف شود.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید فضای تابعی خطی متناهی‌البعد $B \subseteq C(\Omega)$ دارای یک پایهٔ $\{B_1, \ldots, B_N\}$ باشد. آنگاه B یک فضای هار روی Ω است اگر برای هر مجموعه از نقاط متمایز $x_1, x_2, \ldots, x_N$ در Ω، $detA \neq 0$، که در آن $A_{jk} = B_k(x_j), j, k = 1, \ldots, N$.

وجود یک فضای هار، وارون‌پذیری ماتریس درونیاب A را تضمین می‌کند، یعنی وجود و یکتایی یک درونیاب به صورت (۱.۱) را برای داده‌های مشخص $x_1, \ldots, x_N$ از فضای B فراهم می‌کند.

مثال ۲.۳.۱. چند جمله‌ای‌های یک متغیره از درجهٔ $N-1$ یک فضای هار N بعدی برای مقادیر داده شده در $x_1, \ldots, x_N$ هستند.

قضیهٔ ۱.۳.۱ بیان می‌کند، اگر می‌خواهیم یک مسأله درونیابی چند متغیره داده‌های پراکنده خوش‌وضع داشته باشیم، نمی‌توانیم همیشه از یک مجموعه از توابع پایه ثابت استفاده کنیم، بلکه انتخاب پایه باید به موقعیت داده‌ها بستگی داشته باشد. در حقیقت همان‌طور که در ادامه نشان داده می‌شود، توابع پایه‌ای شعاعی در مقایسه با توابع پایه ثابت، شخص را از خوش‌وضعی مسأله درونیابی داده‌های پراکنده در ابعاد بالا مطمئن می‌سازند.

پیش از آنکه در بخش بعدی به معرفی انواع توابع پایه‌ای شعاعی همراه با جزئیات بیشتر پرداخته شود، مفهوم تابع پایه‌ای شعاعی تعریف می‌شود:

تعریف ۳.۳.۱. یک تابع $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ را شعاعی نامند هرگاه تابع یک متغیرهٔ $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\phi(x) = \varphi(r),$$

که $r = \|x\|$ و $\|.\|$ یک نرم بر روی $\mathbb{R}^s$ است (معمولاً نرم اقلیدسی).

[۱] Mairhuber
[۲] Curtis

از تعریف ۳.۳.۱ نتیجه می‌شود که برای یک تابع شعاعی ϕ؛ اگر $x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}^s$ باشند، آنگاه

$$\|x_۱\| = \|x_۲\| \Longrightarrow \phi(x_۱) = \phi(x_۲).$$

یک خانواده $\{\phi_i(x)\}_{i=۱}^n$ از توابع پایه‌ای شعاعی وابسته به تابع $\varphi : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_i(x) = \varphi(\|x - x_i\|), \qquad i = ۱, \ldots, n,$$

که $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ بوده، s بعد مسأله و x_i ها مراکز توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشند. به‌علاوه x و x_i ها از بعد s بوده و $\|.\|$، نرم اقلیدسی است.

توابع پایه‌ای شعاعی عمدتاً به سه دسته مهم توابع **معین مثبت**[۱]، توابع **معین مثبت مشروط**[۲] و توابع پایه‌ای شعاعی با **محمل فشرده**[۳] تقسیم‌بندی می‌شوند، که نمونه‌هایی از آنها با برخی ویژگی‌هایشان در جدول ۱.۱ آمده است. این توابع از لحاظ همواری به توابع بی‌نهایت هموار[۴] و توابع هموار تکه‌ای[۵] و از لحاظ نوع محمل به توابع با محمل سراسری[۶] و محمل فشرده[۷] دسته‌بندی می‌شوند،

نوع تابع	نوع همواری	نوع محمل	نام	ضابطه $\varphi(r)$
معین مثبت	بی‌نهایت هموار	سراسری	گاوسی	$e^{-(\varepsilon r)^۲}$
معین مثبت مشروط	بی‌نهایت هموار	سراسری	چندربعی	$\sqrt{۱ + (\varepsilon r)^۲}$
معین مثبت	بی‌نهایت هموار	سراسری	چندربعی معکوس	$\dfrac{۱}{\sqrt{۱ + (\varepsilon r)^۲}}$
معین مثبت مشروط	هموار تکه‌ای	سراسری	اسپلاین صفحه باریک	$r^۲ \log r$
معین مثبت	بی‌نهایت هموار	فشرده	وندلاند	$(۱ - r)_+^۴(۴r + ۱)$

جدول ۱.۱: نمونه‌هایی از توابع پایه‌ای شعاعی همراه با برخی از ویژگی‌های آنها.

که $r = \|x - x_k\|$ فاصله شعاعی بوده و $\varepsilon > ۰$ پارامتر شکل[۸] است.

در ضمن $(\cdot)_+$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x \geq ۰, \\ ۰, & x < ۰. \end{cases}$$

[۱] Positive Definite
[۲] Conditionally Positive Definite
[۳] Compact Support
[۴] Infinitely Smooth
[۵] Piecewise Smooth
[۶] Global
[۷] Compact
[۸] Shape Parameter

۴.۱ معرفی انواع توابع پایه‌ای شعاعی و برخی قضایای اساسی

در این بخش توابع پایه‌ای شعاعی از سه منظر متفاوت دسته‌بندی می‌شود. در ابتدا اصلی‌ترین دسته‌بندی موجود در مورد توابع پایه‌ای شعاعی معرفی می‌شود. در این دسته‌بندی با توابع معین مثبت و توابع معین مثبت مشروط مواجه خواهیم بود.

از قضیهٔ میرهوبر ـ کورتیس می‌دانیم که فضاهای هار در موقعیت چند متغیره وجود ندارند و چنانچه خواهان درونیابی مقادیر داده $f_1, \dots, f_N$ در موقعیت‌های داده $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ هستیم، ناچاریم که این نکته را مدنظر داشته باشیم.

یک راه ساده برای غلبه بر این معضل، انتخاب یک تابع مناسب $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ و درونیابی توابع به صورت زیر است:

$$s_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(x - x_j), \tag{۲.۱}$$

که ضرایب α_j بوسیله اِعمال شرایط درونیابی زیر بدست می‌آیند.

$$s_{f,X}(x_j) = f(x_j), \qquad 1 \leq j \leq N. \tag{۳.۱}$$

اگر ϕ را بتوان به گونه‌ای انتخاب کرد که برای هر نوع از مجموعه داده‌ها یعنی برای هر تعداد N و هر ترکیب ممکن از $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ قابل استفاده باشد، بسیار مطلوب خواهد بود.

واضح است که به منظور یافتن جواب یکتا $s_{f,X}(x)$ برای مسألهٔ درونیابی حاصل از شرایط درونیابی (۳.۱) لازم است که ماتریس درونیاب زیر وارون‌پذیر باشد:

$$A_{\phi,X} = (\phi(x_j - x_k))_{1 \leq j,k \leq N}.$$

از منظر عددی مطلوب‌تر خواهد بود که شرایط بیشتری بر $A_{\phi,X}$ لحاظ شود. مثلاً معین مثبت بودن این ماتریس خواسته شود. چون مقادیر ویژهٔ یک ماتریس معین مثبت همگی مثبت هستند، یک ماتریس معین مثبت، نامنفرد نیز هست.

حال به معرفی توابع پایه‌ای تمرکز می‌کنیم که ماتریس‌های معین مثبت تولید می‌نمایند.

تعریف ۱.۴.۱. یک تابع پیوسته $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ نیمه معین مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر $N \in \mathbb{N}$، هر مجموعه از مراکز دو به دو متمایز $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}^N$، صورت درجه دو زیر غیر منفی باشد.

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha_k} \phi(x_j - x_k).$$

تابع ϕ معین مثبت نامیده می‌شود اگر صورت درجه دو فوق برای هر $\alpha \in \mathbb{C}^N - \{0\}$ مثبت باشد.

بنا به دلایل نظری در تعریف فوق توابع مختلط مقدار لحاظ شده‌اند. ولی در همهٔ کاربردهای مورد نظر در این رساله تنها توابع حقیقی‌مقدار مد نظر خواهند بود.

لازم به ذکر است که یک تابع معین مثبت نامیده می‌شود اگر ماتریس‌های درونیاب نظیرش معین مثبت باشند و به همین ترتیب یک تابع نیمه معین مثبت نامیده می‌شود هر گاه ماتریس‌های درونیاب نظیر به آن نیمه معین مثبت باشند. البته در متون مرتبط با نظریه توابع پایه‌ای شعاعی، بدلایل تاریخی این عبارت‌ها به صورت‌های دیگری نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه برخی از نویسندگان یک تابع را معین مثبت می‌گویند هر گاه ماتریس‌های نظیرش نیمه معین مثبت بوده و تابع را معین مثبت اکید گویند هر گاه ماتریس‌های نظیرش معین مثبت باشند [۱۳].

برخی از خواص اولیه توابع معین مثبت به صورت زیر هستند.

قضیه ۱.۴.۱. *فرض کنید ϕ یک تابع نیمه معین مثبت باشد. آنگاه ویژگی‌های زیر محقق می‌گردند* [۱۴].

۱. $\phi(0) \geq 0$؛

۲. $\phi(0) = 0$ *اگر و تنها اگر* $\phi \equiv 0$؛

۳. *برای هر* $x \in \mathbb{R}^d$، $\phi(-x) = \overline{\phi(x)}$؛

۴. ϕ *کراندار است یعنی برای هر* $x \in \mathbb{R}^d$، $|\phi(x)| \leq \phi(0)$؛

۵. *اگر* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *نیمه معین مثبت و* $c_j \geq 0$، $1 \leq j \leq n$، *باشند آنگاه* $\phi = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j$ *نیز نیمه معین مثبت است. به‌علاوه اگر یکی از* ϕ_j *ها معین مثبت باشد و* c_j *نظیرش هم مثبت باشد آنگاه* ϕ *نیز معین مثبت است.*

حال به معرفی توابع معین مثبت حقیقی مقدار می‌پردازیم.

قضیه ۲.۴.۱. [۱۴] *فرض کنید* $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *پیوسته باشد. آنگاه* ϕ *معین مثبت است اگر و تنها اگر* ϕ *زوج بوده و برای هر* $N \in \mathbb{N}$، *برای هر* $\alpha \in \mathbb{R}^N - \{0\}$ *و برای همهٔ عناصر دو به دو متمایز* $x_1, \ldots, x_N$ *داشته باشیم:*

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha_j \alpha_k \phi(x_j - x_k) > 0.$$

تاکنون هر چه گفته شد بر شعاعی بودن تابع ϕ استوار نبود، اما در ادامه خاصیت شعاعی بودن را نیز، که به سادگی ساختار و راحتی استفاده از ϕ کمک می‌کند، در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۴.۱. یک تابع یک متغیره $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ را معین مثبت روی $\mathbb{R}^d$ گویند هر گاه تابع چند متغیره نظیرش $\phi(x) = \varphi(\|x\|_2)$، که $x \in \mathbb{R}^d$، معین مثبت باشد.

حال روش اساسی توابع پایه‌ای شعاعی را تعریف می‌کنیم که بر استفاده از توابع شعاعی معین مثبت استوار است:

تعریف ۳.۴.۱. (روش اساسی توابع پایه‌ای شعاعی) . یک مجموعه از N نقطهٔ متمایز $\{x_۱,\dots,x_N\}$ در $\mathbb{R}^d$ و مقادیر داده نظیر به آنها $f_۱,\dots,f_N$ داده شده‌اند. درونیاب اساسی تابع f بر حسب توابع پایه‌ای شعاعی بصورت زیر داده می‌شود.

$$S(x)=\sum_{j=۱}^{N}\lambda_j\varphi(\|x-x_j\|),$$

که φ یک تابع شعاعی است.

ضرایب بسط λ_j از شرایط درونیابی $S(x_j)=f_j$، $j=۱,\dots,N$ ، بدست می‌آیند، که به دستگاه معادلات خطی متقارن زیر منجر می‌شود:

$$[A][\lambda]=[f],$$

که درآیه‌های A بصورت زیر داده شده‌اند:

$$A_{jk}=\varphi(\|x_j-x_k\|).$$

برای درک بهتر قضیهٔ ۴.۴.۱ (که تضمین کننده نامنفرد بودن ماتریس A است) آشنایی با توابع کاملاً یکنوا ضروری است.

تعریف ۴.۴.۱. (توابع کاملاً یکنوا). تابع φ روی $(۰,\infty)$ کاملاً یکنوا گفته می‌شود اگر در شرایط زیر صادق باشد:

۱. $\varphi\in C^{\infty}(۰,\infty)$؛

۲. برای هر $r>۰$ و برای هر $l\in\mathbb{N}_۰$ ، $(-۱)^l\varphi^{(l)}(r)\ge ۰$ ؛

تابع φ روی $[۰,\infty)$ کاملاً یکنوا گفته می‌شود هر گاه علاوه بر شرایط فوق، $\varphi\in C[۰,\infty)$.

مثال ۵.۴.۱. تابع $\varphi(r)=e^{-cr},\ c\ge ۰$ روی $[۰,\infty)$ کاملاً یکنوا است، چرا که برای $l=۰,۱,۲,\dots$ داریم:

$$(-۱)^l\varphi^{(l)}(r)=c^le^{-cr}\ge ۰.$$

مثال ۶.۴.۱. تابع $\varphi(r)=\dfrac{۱}{(۱+r)^{\beta}},\ \beta\ge ۰$ نیز کاملاً یکنوا روی $[۰,\infty)$ است. چرا که برای $l=۰,۱,۲,\dots$ داریم:

$$(-۱)^l\varphi^{(l)}(r)=(-۱)^{۲l}\beta(\beta+۱)\cdots(\beta+l-۱)(۱+r)^{-\beta-l}\ge ۰.$$