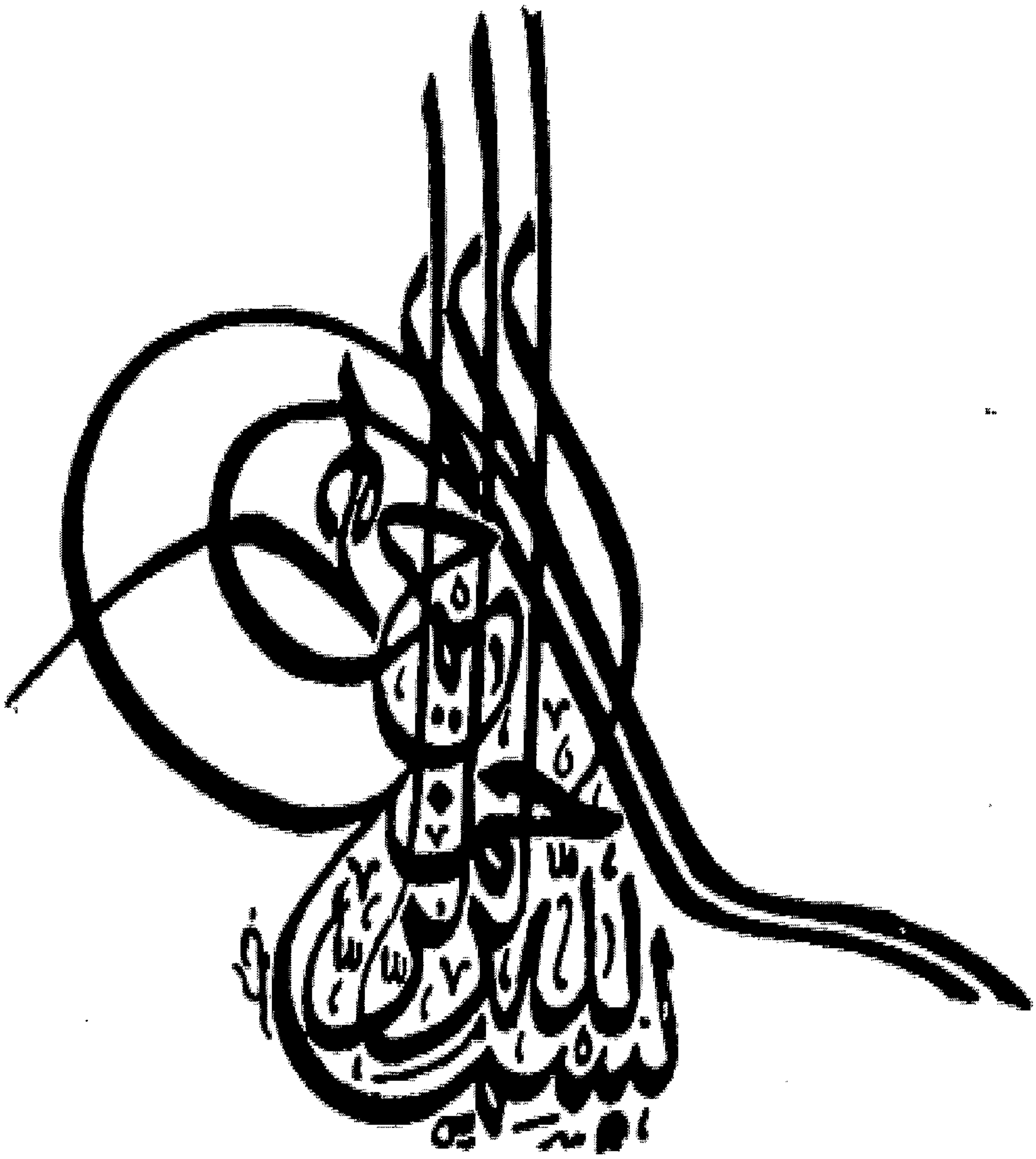

١٣٨٤٢٥

دانشگاه ارومیه

گروه ریاضی

خودریختی های بعضی از p -گروه ها

محمود همه مرادی کردکندی

ریاضی محض – جبر- نظریه گروههای متناهی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما

دکتر هوشنگ بهروش

خرداد ۱۳۸۸

پایان نامه آقای/خانم محمد هاشم مرادی کردکندی به تاریخ ۱۱ / ۳ / ۸۸

شماره   مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸٫۴ (هیجده/۴)

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر هوشنگ بهروش

۲- استاد مشاور : دکتر X

۳- داور خارجی : دکتر محمد علی ایلدری

۴- داور داخلی : دکتر رضا سرپیره

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سمیه اسکندرباشی

در آغاز هیچ نبود،« کلمه» بود، و آن کلمه خدا بود.
و کلمه، بی زبانی که بخواندش، و بی اندیشه‌ای که بداندش، چگونه می‌تواند بود؟
و خدا یکی بود و جز خدا هیچ نبود،
و با نبودن، چگونه می‌توان بودن؟
و خدا بود، و با او، عدم،
و عدم گوش نداشت،
حرف‌هایی هست برای گفتن،
که اگر گوشی نبود، نمی‌گوییم.
و حرف‌هایی هست برای نگفتن:
حرف‌هایی که هرگز سر به ابتذال گفتن فرود نمی‌آرند.
حرف‌هایی شگفت، زیبا و اهورایی همین‌هایند،
و سرمایه‌ی ماورایی هر کسی به اندازه‌ی حرف‌هایی است که برای نگفتن دارد....
«دکترعلی شریعتی»

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

دیگر اعضای خانواده ام

تقدیرو تشکر

سپاس **خداوندی** که ما را آفرید و اندیشیدن را به ما آموخت.

پشتیبان و حامی اصلی من در تمام طول تحصیل **خانواده ام** بوده اند و من هرچه دارم از لطف وجود آنها دارم.

با کلمات نمی توان از عزیزان خود قدردانی کرد. اما می گویم من خاک پای اعضای خانواده ام هستم.

استاد راهنمای عزیزم

جناب آقای دکتر **هوشنگ بهروش** در طول مدتی که افتخار شاگردی ایشان را داشتم زحمات زیادی را برایم کشیدند و همیشه به من لطف داشتند.

استاد محترم

دکتر **رضا سزیده** که داور داخلی پایان نامه را بر عهده گرفتند و در طول این دو سال مانند برادر بزرگتر مرا در مشکلات راهنمایي کرده اند، مشوق بنده و زحمات زیادی را برایم کشیده اند.

استاد بزرگوار دکتر **محمد علی اسدی** که داور خارجی پایان نامه بودند.

اساتید بزرگوار گروه ریاضی دانشگاه ارومیه .

دوستان وهمکلاسیهای خوبم

آقایان: عبدالرحمن درویش پور-امیر ویسی- پیام عباسی– اثبات ابراهیمی–رحمان درگاهی- زاهدعبدی- حسن امینی –

صلاح زرین- ساعد اصلانی- محرم بختیاری-ایوب مهربانی-اسماعیل عینعلی–بهرام امیرسرداری–صمد نورآبادی-محمد خزای-سعید لایموت و...

خانمها: خانم بهناز بهروزپور که زحمات زیادی را کشیدند جا دارد که از زحمات ایشان قدردانی کنم. -اعلایی-محمدی- جلایر- شیخ الاسلامی و..

چکیده

ما در این پایان نامه شرط کافی برای این گروههای متناهی از رده پوچ‌توانی ۲ که $\mathrm{Aut_c(G)} = \mathrm{Inn(G)}$ باشد بیان می‌کنیم. در آن $\mathrm{Aut_c(G)}$ و $\mathrm{Inn(G)}$ به ترتیب خودریختیهای رده پایدار و خودریختیهای داخلی G باشند. سپس ثابت می‌کنیم که اگر G و H دو گروه ایزوکلینیک باشند، آنگاه $\mathrm{Aut_c(G)} \cong \mathrm{Aut_c(H)}$. ودر آخر خودریختیهای رده پایدار را برای گروههای از مرتبه p^5 (p عدد اول است.) بررسی می‌کنیم.

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱

۲ لم ها و تعریفهای که کاربرد بیشتری دارند ۲۸

۳ گروههای از رده پوچ توانی ۲ . . . . ۳۷

۴ ایزوکلینیک ۴۱

۵ گروههای از مرتبه p^5 . . . . ۵۴

کتاب مال خریدارش نیست. کتاب ملکیت بردار نیست، کتاب مال کسی که پولش را پرداخته و معامله‌ای کرده و آن را آورده و در قفس قفسه‌ی خانه‌اش گذاشته، نیست. کتاب مال خواننده‌اش است، هر که آن را باز کند و بخواند و بفهمد و احساس کند و لذت ببرد و در او اثر کند. مال هر که با کلمات آن بیشتر انس دارد، با سطور آن بیشتر آشنا است، با حرفهای آن خویشاوندی پنهانی روح دارد... «دکترعلی شریعتی»

مقدمه

مطالعه رابطه بین یک گروه متناهی و گروه خودریختیهای آن یکی از مهمترین موضوعات تحقیقی در نظریه گروه‌ها است. ممکن است دو گروه غیر یکریخت، دارای گروه‌های خودریختی یکریختی باشند. آشناترین مثالهای نابدیهی S_3 و $C_2 \times C_2$ هستند که گروه‌های خودریختی آنها با S_3 یکریخت هستند. هر چند، این مثال ارتباط گروه خودریختی یک گروه با خود آن گروه را کم رنگ جلوه می‌کند، اما در برخی موارد از روی ساختار گروه خودریختی‌های یک گروه، اطلاعاتی در مورد خود گروه به دست می‌آید، یا به عکس، گاهی با دانستن ساختار یک گروه، می‌توانیم بسیاری از خواص گروه خودریختی‌های آن گروه را مشخص کنیم.

فرض کنیم G یک p-گروه متناهی و $|G| = p^n$، که p یک عدد اول و n یک عدد صحیح مثبت است. برای هر $x \in G$، x^G رده مزدوجی x در G، و $\mathrm{Aut(G)}$ گروه خودریختی‌های G را نشان دهند. یک خودریختی α از $\mathrm{Aut(G)}$ را خودریختی رده پایدار می نامیم اگر برای هر $x \in G$، $\alpha(x) \in x^G$. مجموعه خودریختی‌های رده پایدار G را با $\mathrm{Aut_c(G)}$ نشان می‌دهیم. همچنین $\mathrm{Inn(G)}$ گروه خودریختی‌های داخلی G

باشد. با توجه به تعریف $\mathrm{Aut_c(G)}$ واضح است $\mathrm{Inn(G)} \leq \mathrm{Aut_c(G0}$.

در سال ۱۹۱۱ برونساید این مساله را مطرح کرد، آیا می‌توان گروهی یافت که گروه $\mathrm{Aut_c(G)}$ آن داری عناصری باشد که خودریختی داخلی نباشند. به عبارتی دیگر آیا می‌توان گروهی یافت که مجموعه $\mathrm{Aut_c(G)} - \mathrm{Inn(G)}$ غیر تهی باشد. یا $\mathrm{Out_c(G)} = \mathrm{Aut_c(G)/Inn(G)} \neq ۱$ باشد. خود برونساید در مقاله‌ای تحت عنوان

«On the outer automorphism of a group»

به این سوال جواب مثبت داد. او گروهی از مرتبه $p^{۶}$ معرفی کردکه دارای این خاصیت بود. وبعد از آن نیز توسط نویسنده‌های مختلف گروههای با این خاصیت کشف شدند، از جمله مثالی از این نوع در [۳] آمده است. اما همه این گروهها از مرتبه $p^{۶}$ بودند. از طرفی در مقاله زیر

Kumar M and Vermani L R, Hasse principle for groups of order $p^{۴}$, proc. Japan Acad. A77(6) (2001) 95-98.

ثابت شده است که برای هر گروه از مرتبه $p^{۴}$ داریم:

$$\mathrm{Aut_c(G)} = \mathrm{Inn(G)}.$$

و در [۷]، که این پایان نامه بر اساس آن صورت گرفته گروه $\mathrm{Out_c(G)}$ را برای گروههای از مرتبه $p^{۵}$ بررسی شده است.

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است.

در فصل اول بعضی تعاریف و قضایای مقدماتی در مورد نظریه گروههای متناهی آمده است.

در فصل دوم بعضی تعاریف و قضایا در مورد گروه $\mathrm{Aut(G)}$ و زیر گروههای $\mathrm{Inn(G)}$، $\mathrm{Aut_c(G)}$ و $\mathrm{Autcent(G)}$ آمده، که $\mathrm{Autcent(G)}$ عبارت است عناصری از مجموعه

$f \in \mathrm{Aut(G)}$هایی که برای هر $g \in G$، $g^{-1}f(g) \in Z(G)$.

در فصل سوم بعضی تعاریف و قضایا در مورد گروه‌های از رده پوچ‌توانی ۲ آمده است.

در فصل چهارم مفهوم ایزوکلینیک مطرح، و هدف از به وجود آمدن آن بیان می‌شود، و خواصی از آن را بررسی می‌کنیم. همچنین ثابت شده است که اگر G و H دو گروه ایزوکلینیک باشند، آنگاه داریم:

$$\mathrm{Aut_c(G)} \cong \mathrm{Aut_c(H)}.$$

در فصل آخر جدول طبقه‌بندی گروه‌های از مرتبه p^n $(n \leq ۵)$ آورده شده است و $\mathrm{Out_c(G)}$ برای گروه‌های از مرتبه $p^۵$ بررسی شده است.

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

ما در این فصل به‌طور خلاصه قضایا و تعاریف اساسی از نظریه‌ی گروه‌ها، را که در دو فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ گروه G را یک گروه متناهی[۱] می‌نامیم، هرگاه تعداد متناهی عضو داشته باشد. تعداد اعضای گروه متناهی G را با $|G|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه‌ای از G باشد. گوییم H یک زیرگروه[۲] G است هرگاه H با عمل G (تحدید عمل G بر H) خود یک گروه باشد و آن‌را با نماد $H \leq G$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۱ **(لاگرانژ)** هرگاه G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$ آنگاه $|H|$ ، $|G|$ را می‌شمارد.

اثبات : [[۱۷]، قضیهٔ ۱۱.۳.۴]. ■

تعریف ۴.۱ فرض کنید $H \leq G$ باشد. در این صورت زیر مجموعه‌های $Hg = \{hg : h \in H\}$ با $g \in G$ را هم‌دسته‌های راست H در G می‌نامیم. به همین ترتیب $gH = \{gh : h \in H\}$ هم‌دسته‌های چپ H در G نامیده می‌شوند.

تعریف ۵.۱ شاخص زیرگروه H در G، تعداد هم‌دسته‌های (چپ یا راست) H در G است و آن را با $|G : H|$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶.۱ اگر G یک گروه از مرتبه زوج[۳] باشد آنگاه G شامل عضوی از مرتبه ۲ است.

---

[۱] Finite Group
[۲] Subgroup
[۳] even

اثبات : [[۱۰]، ۱۳.۱]. ■

لم ۷.۱ فرض می کنیم G گروهی غیر دوری از مرتبه p^2 باشد که در آن p عدد صحیح و اول می باشد. در این صورت مرتبه هر عضو غیر همانی G، برابر p است.

اثبات : [[۱۷]، تمرین ۱.۳.۴]. ■

تعریف ۸.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. دو عضو $g_1, g_2 \in G$ را تعویض‌پذیر[۴] گوییم هرگاه $g_1 g_2 = g_2 g_1$. اگر هر دو عضو G تعویض‌پذیر باشند، G را یک گروه آبلی[۵] می‌نامیم.

تعریف ۹.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. همچنین فرض کنیم $H \leq G$. H را یک زیر گروه نرمال[۶] G گوییم هرگاه به‌ازای هر $x \in G$، $xH = Hx$. زیرگروه نرمال را با نماد $H \trianglelefteq G$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنیم $H \leq G$. دراین‌صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $h \in H$ و هر $g \in G$، $g^{-1}hg \in H$.

اثبات : [[۱۷]،قضیهٔ ۳.۴.۴]. ■

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم $K \trianglelefteq G$ و G/K مجموعه‌ی تمام هم‌مجموعه‌های K در G باشد. دراین‌صورت G/K را گروه خارج قسمتی[۷] G توسط K می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد. در این صورت تعداد همدسته‌های متمایز چپ (یا راست) H در G،که می‌نویسیم [G : H]، اندیس H در G

---

[۴] Commute
[۵] Abelian Group
[۶] Normal Subgroup
[۷] Quotient Group

نامیده می‌شود.

تعداد همدسته‌های چپ و راست زیر گروه H از یک گروه G ، برابرند.

قضیه ۱۳.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$. دراین‌صورت

$$[G : H] = |G|/|H|.$$

اثبات : [[۱۷]، قضیه ۱۱.۳.۴]. ■

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. مجموعه‌ی

$$Z(G) = \{g \in G : xg = gx, \quad \text{برای هر } x \in G\}.$$

را مرکز گروه G[8] می‌نامیم.

قضیه ۱۵.۱ $Z(G)$ یک زیرگروه آبلی G است.

اثبات : [[۱۱]، لم ۲۶.۲]. ■

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. گروه G را گروه دوری[9] می‌نامیم هرگاه عنصر $a \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in G$ و $n \in \mathbb{N}$،

$$a^n = x.$$

عنصر a را مولّد گروه G می‌نامیم. معمولاً گروه دوری را با نماد $G = \langle a \rangle$ نمایش می‌دهیم.

---

[8] Centre of G

[9] Cyclic Group

قضیه ۱۷.۱ هر گروه دوری، آبلی است.

اثبات : فرض کنیم G گروهی دوری و $g_1, g_2 \in G$. دراین‌صورت اعداد صحیح m و nای وجود دارند به‌طوری‌که $g_1 = a^n$ و $g_2 = a^m$. دراین‌صورت داریم:

$$g_1 g_2 = a^n a^m = a^{m+n} = a^m a^n = g_2 g_1.$$

بنابراین G آبلی است. ■

قضیه ۱۸.۱ هر گروه از مرتبه‌ی عدد اول، گروهی دوری است.

اثبات : [[۱۷]، قضیهٔ ۱۳.۳.۴] . ■

قضیه ۱۹.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد. دراین‌صورت هر زیرگروه G، در G نرمال است.

اثبات : [[۱۰]، قضیهٔ ۵.۳]. ■

قضیه ۲۰.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq G$ و $H \leq K$. اگر $[K:H]$ و $[G:K]$ متناهی باشند، آنگاه $[G:H]$ متناهی است و

$$[G:H] = [G:K][K:H].$$

اثبات : [[۱۸]، قضیه ۱۶.۱۲.۳]. ■

لم ۲۱.۱ فرض کنیم $H \leq G$ و $|G:H| = 2$. دراین‌صورت داریم: $H \trianglelefteq G$.

اثبات : [[۱۷]، تمرین ۴.۴.۱(۲)]. ■

لم ۲۲.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. دراین‌صورت داریم: $Z(G) \trianglelefteq G$.

اثبات : فرض کنیم $g \in G$، در اینصورت چون g با هر عضو $Z(G)$ جابه‌جا می‌شود $g^{-1}Z(G)g = Z(G)$.لذا $Z(G)$ در G نرمال است. ■

تعریف ۲۳.۱ گروه G را گروه ساده گوییم هرگاه زیرگروه نرمال غیربدیهی نداشته باشد.

تعریف ۲۴.۱ به ازای هر دو زیرمجموعه‌ی ناتهی $X,Y \in G$، مجموعه‌ی حاصل‌ضرب را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$XY = \{xy \ : \ x \in X, y \in Y\}.$$

لم ۲۵.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H, K \leq G$. دراین‌صورت

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |KH|.$$

اثبات : [[۱۸]، قضیه ۱۵.۱۲.۳]. ■

لم ۲۶.۱ فرض کنیم $H \leq G$. اگر G گروه آبلی باشد، آنگاه G/K نیز آبلی است.

قضیه ۲۷.۱ اگر $G/Z(G)$ دوری باشد، آنگاه G آبلی است.

اثبات : [[۱۷]، تمرین ۴.۴.۱(۷)]. ■

لم ۲۸.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. اگر $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \leq G$. به‌طور مشابه اگر $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \trianglelefteq G$.

اثبات : [[۱۰] ۳۸.۳]. ■

قضیه ۲۹.۱ فرض کنیم H و K دو زیرگروه نرمال G باشند. دراین‌صورت $K \trianglelefteq HK$ و $K \cap H \trianglelefteq H$.

اثبات : [[۱۰] ۴۰.۳]. ■

تعریف ۳۰.۱ فرض کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه غیر تهی G باشد. مرکزساز[۱۰] H در G شامل آن عناصری از G است که با تمام عناصر H جابجا می‌شوند. مرکزساز H در G را با نماد $C_G(H)$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$C_G(H) = \{g \in G : hg = gh, \quad \text{برای هر } h \in H\}$$

تذکر ۳۱.۱ هرگاه $H = G$، آنگاه $C_G(G) = Z(G)$. همچنین اگر $H = \{a\}$ انتخاب شود، آنگاه $C_G(a)$ شامل آن عناصری از G است که با عضو a جابجا می‌شوند؛ یعنی

$$C_G(a) = \{g \in G : g = ga\}.$$

درنتیجه

$$C_G(H) = \bigcap_{h\in H} C_G(h).$$

قضیه ۳۲.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی و H زیرگروه آن باشد، در اینصورت $H \subseteq Z(G)$ اگر و تنها اگر $C_G(H) = G$.

اثبات : بلافاصله از تعریف مرکز گروه و مرکزساز H در G حاصل می‌شود.

تعریف ۳۳.۱ فرض کنیم H زیرمجموعه غیر تهی G باشد. نرمال‌ساز[۱۱] H در G را با $N_G(H)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_G(H) = \{x \in G : x^{-1}Hx = H\}.$$

---

[۱۰] Centralizer
[۱۱] Normalizer

قضیه ۳۴.۱ فرض کنیم G گروه باشد. اگر H زیرگروه G باشد، آنگاه $H \trianglelefteq N_G(H)$.

اثبات : [[۱۰]، قضیه ۵۵.۳]. ■

قضیه ۳۵.۱ فرض کنیم H زیرگروه G باشد، آنگاه H نرمال است در G اگروتنهااگر $G = N_G(H)$.

اثبات : [[۱۰]، قضیه ۵٦.۳]. ■

قضیه ۳٦.۱ فرض کنیم G یک گروه و H و K دو زیرگروه G باشند به‌طوری‌که $H \leq K$. دراین‌صورت

$$N_K(H) = N_G(H) \cap K.$$

اثبات : [[۱٦]، قضیه ۴.۳.۲]. ■

تعریف ۳۷.۱ اگر X و Y دو مجموعه باشند، مجموعه همهٔ زوجهای مرتب (x, y) را که در آن $x \in X$ و $y \in Y$، را حاصلضرب دکارتی X و Y می‌نامیم.

تعریف ۳۸.۱ اگر H و K دو گروه باشند، در این صورت $H \times K$ حاصلضرب مستقیم H و K نامیده می‌شود،

قضیه ۳۹.۱ اگر به ازای هر $h, h' \in H$ و $k, k' \in K$ تعریف کنیم

$$(h, h')(k, k') = (hk, h'k'),$$

مجموعه $H \times K$ تشکیل گروه می دهد.

اثبات : [[۱۰] ۳۱.۲،]. ■

تعریف ۴۰.۱ فرض کنیم G و H دو گروه دلخواه باشند. نگاشت

$$\phi : G \longrightarrow H$$

را یک همریختی [۱۲] گوییم اگر به‌ازای هر $g_1, g_2 \in G$،

$$(g_1g_2)\phi = (g_1\phi)(g_2\phi).$$

هرگاه ϕ دو سویی باشد، دراین‌صورت ϕ را یکریختی می‌گوییم.

تعریف ۴۱.۱ هر همریختی مانند $f : G \to G$ را یک درونریختی G می‌نامند.مجموعهٔ تمام درونریختیهای G را با $\mathrm{End(G)}$ نشان می‌دهیم. هر درونریختی یک به یک و پوشا را خودریختی نامیده و با نماد $\mathrm{Aut}G$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۲.۱ فرض کنیم G یک گروه بوده و $g \in G$ ثابت باشد. برای هر $x \in G$ خودریختی داخلی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi : G \to G$$

$$x\phi = g^{-1}xg$$

و آن‌را با نماد $\mathrm{Inn}G$ نمایش می‌دهیم. هر خودریختی که داخلی نباشد آن را خارجی می‌نامیم.

قضیه ۴۳.۱ (قضیهٔ نرمالساز– مرکزساز) اگر H زیرگروه G باشد، آنگاه $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ و $C_G(H)/N_G(H)$ را می‌توان در $\mathrm{Aut(H)}$ نشانید.

اثبات : [[۱۰]، قضیه ۳۶.۴]. ■

[۱۲] Homomorphism