بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترای

دوبعدی نوع دوم

سخنران: بهاره نوری

زمان: یکشنبه ۱۵ /۱۰ /۹۲ ساعت ۱۴ بعدازظهر
مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر مهدی تاتاری

۲– دکتر حمیدرضا مرزبان

۳– دکتر رضا مختاری

۴– دکتر محمدتقی جهاندیده

چکیده

در این پایان‌نامه به کمک چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر روش‌هایی برای حل عددی دسته‌ای از معادلات انتگرال معرفی کرده و با ارایه‌ی چند مثال و آنالیز خطای موجود، کارایی و دقت این روش‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: انتگرال فردهلم، انتگرال ولترا، چندجمله‌ای چبیشف، چندجمله‌ای لژاندر

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترای دوبعدی نوع دوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

بهاره نوری

استاد راهنما

دکتر مهدی تاتاری

دی ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم بهاره نوری
تحت عنوان

یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترای
دوبعدی نوع دوم

در تاریخ ۱۵ /۱۰ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما دکتر مهدی تاتاری

۲– استاد مشاور دکتر حمیدرضا مرزبان

۳– استاد داور۱ دکتر رضا مختاری

۴– استاد داور۲ دکتر محمدتقی جهاندیده

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر فرید بهرامی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان‌نامه به کمک چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر روش‌هایی برای حل عددی دسته‌ای از معادلات انتگرال معرفی کرده و با ارایه‌ی چند مثال و آنالیز خطای موجود، کارایی و دقت این روش‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: انتگرال فردهلم، انتگرال ولترا، چندجمله‌ای چبیشف، چندجمله‌ای لژاندر

فصل ۱

مقدمه

نظریه‌ی معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های علم ریاضی است. این دسته از معادلات به عنوان مدل ریاضی در علم فیزیک و شیمی و علوم فنی کاربردهای فراوانی دارند. معادلات انتگرال، معادلاتی هستند که یک تابع مجهول در انتگرالی معین دیده می‌شود. معادلات انتگرال خطی به دو دسته‌ی معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا تقسیم می‌شوند. اگر بازه‌ی انتگرال‌گیری در دو طرف، عدد ثابت باشد به آن معادله‌ی انتگرال فردهلم و اگر از یک طرف به متغیر محدود شود به آن معادله‌ی انتگرال ولترا گفته می‌شود. معادله‌ی انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b k(x,t)U(t)dt = g(x). \tag{۱.۱}$$

معادله‌ی (۱.۱)، یک معادله‌ی انتگرال فردهلم یک‌بعدی نوع اول است که در آن U تابع مجهول، g تابع معلوم و $k(x,t)$ به عنوان تابع هسته، دیگر تابع معلوم معادله است. اگر تابع مجهول، هم درون انتگرال هم بیرون از آن ظاهر شود، به معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم یک‌بعدی می‌رسیم

$$U(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)U(t)dt = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

دراین‌جا λ عامل مجهول است که در جبرخطی نقش مقدارویژه را بازی می‌کند و تابع هسته، $k(x,t)$، باید یکی از شرایط زیر را داشته باشد [۳۸]

(۱) تابع هسته در دامنه‌ی $\Omega = \{(x,t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ پیوسته باشد.

(۲) در صورت ناپیوستگی تابع هسته برای تعدادی نقاط، انتگرال زیر موجود باشد

$$\int_a^b \int_a^b \mid k(x,t) \mid^2 dxdt < \infty.$$

به‌طور مشابه

$$\int_a^x k(x,t)U(t)dt = g(x),$$

معادله‌ی انتگرال ولترای نوع اول یک‌بعدی و

$$U(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)U(t)dt = g(x),$$

معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم یک‌بعدی است.

معادلات انتگرال ارتباط نزدیکی با معادلات دیفرانسیل دارند. بسیاری از مسایل با مقادیر اولیه و یا با مقادیرمرزی را می‌توان به شکل معادلات انتگرال بازنویسی کرد و برعکس. در اصل مساله‌ی مقدار اولیه و دستگاه‌های دینامیکی قابل تبدیل به معادله‌ی ولترا و مساله‌ی با مقدار مرزی قابل تبدیل به معادله‌ی فردهلم است [۲۹].

ایوار فردهلم ریاضیدان سوئدی به حل مساله‌ای پرداخت که به نام خودش شهرت دارد، معادله‌ی انتگرال فردهلم. پس از آن شرایطی برای این نوع معادلات تعریف کرد تا قابل حل باشند و همچنین فرمولی برای حل آن در صورت وجود جواب ارایه داد. این کار انقلاب بزرگی در آنالیز تابعی و تئوری معادلات انتگرال بود [۳۵]. این معادلات کاربرد فراوانی در فیزیک، مهندسی و مکانیک دارد، به عنوان مثال در محاسبه‌ی فیزیک پلاسما [۱۷]. بیشتر معادلات انتگرال که در عمل اتفاق می‌افتند حل تحلیلی ندارند، به همین دلیل علاقه‌ی ویژه‌ای برای حل عددی اینگونه مسایل هست.

کارهای بسیاری در زمینه‌ی توسعه و آنالیز روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم انجام گرفته‌است [۲–۵، ۹، ۱۵].

در سال‌های اخیر الگوریتم‌هایی برای حل عددی سریع معادلات انتگرال نوع دوم انجام شده‌است. به عنوان مثال مراجع [۲، ۱۱، ۲۰، ۲۱، ۳۲، ۳۹، ۴۰] را ببینید. روش چندقطبی سریع که در [۲۰] بیان شده به ترکیب چندجمله‌ای درونیاب با درجه‌ی پایین برای توابع هسته با استراتژی تقسیم و تسخیر می‌پردازد. در [۱۱] الگوریتمی با حجم عملیاتی از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(N \log N)$ با استفاده از ارتباط میان موجک‌ها و کاربردشان در عملگرهای کالدرون–زیگموند ارایه شده‌است. در [۳۲] یک روش برای به‌دست‌آوردن تقریبی با رتبه‌ی پایین از ماتریس گسسته‌سازی شده با استفاده از روش‌های تکراری خوش‌حالت‌ساز مانند روش تصحیح باقیمانده (RC) یا روش گرادیان مزدوج خوش‌حالت ساز (PCG) پیشنهاد شده، به‌طوری‌که هزینه‌ی نهایی برای حل معادله‌ی انتگرال با تابع هسته‌ی هموار از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(N)$ است.

مقاله‌های [۲۱، ۳۹، ۴۰] مربوط به الگوریتم‌هایی سریع برای معادلات انتگرال دوبعدی با توابع هسته‌ای است که به طور ضعیف تکین هستند. در [۲۱] و [۳۹] حالت متفاوتی از روش‌های چندقطبی سریع برای حل معادلات انتگرال با اینگونه توابع هسته بیان شده‌است. نویسندگان مقاله‌ی [۴۰] به معرفی یک روش هم‌مکانی با کمک موجک‌ها برای معادلات انتگرال تعریف‌شده بر روی چندضلعی‌ها می‌پردازد.

به غیر از ارایه‌ی الگوریتم‌های سریع، بررسی دقت حل عددی معادلات انتگرال نیز بسیار مهم است. به عنوان مثال مراجع [۲۴] و [۴۱] را ببینید. در [۲۴] برای معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی نوع دوم از روش نیشتروم و در [۴۱] به کمک روش عناصر متناهی، یک روش تصحیح تکراری بیان‌شده به‌طوری‌که نشان می‌دهد در صورت هموار بودن تابع هسته، دقت به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

ویتو ولترا فیزیکدان و ریاضیدان ایتالیایی است. کارهای او در زمینه‌ی انتگرال، منجر به توسعه‌ی آنالیز تابعی شده‌است. وی با ارایه‌ی قضیه‌ای در تابعک‌ها، شاخه‌ی جدیدی را در آنالیز، شامل کاربردهایی مهم برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال، توسعه بخشید [۲۲].

مسایل انتقال تابشی و معادله‌ی تلگراف از جمله مسایلی هستند که به شکل معادلات انتگرال ولترا ظاهر می‌شوند [۳۷].
در این پایان‌نامه ابتدا به حل عددی معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی نوع دوم و سپس به حل عددی معادلات انتگرال ولترای غیرخطی دوبعدی می‌پردازیم.
برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی نوع دوم به شکل

$$U(x,t) - \int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱} k(x,t,u,v)U(u,v)dudv = g(x,t), \quad (x,t) \in [-۱,۱] \times [-۱,۱],$$

با تابع هسته‌ی $k(x,t,u,v)$ و با فرض هموار بودن آن در $([-۱,۱])^۴$ و تابع معلوم $g(x,t)$ به عنوان تابعی در فضای $L^۲([-۱,۱])^۲$، ابتدا به کمک قاعده‌ی گاوس برای انتگرال به یک دستگاه خطی گسسته‌سازی شده می‌رسیم. سپس با استفاده از تقریب نیشتروم، معادله‌ای تقریبی به‌دست می‌آوریم که در آن تابع هسته به کمک چندجمله‌ای‌های چبیشف درونیابی می‌شود. با ارایه‌ی یک روش تکراری با نام تصحیح باقیمانده یا بهبود تکرار، الگوریتمی جدید برای حل سریع معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی از نوع اول بیان می‌کنیم.

در بخش (۲.۲.۳) به محاسبه‌ی خطای حاصل از به‌کارگیری چندجمله‌ای‌های درونیاب در شبکه‌ی چبیشف می‌پردازیم.
در بخش (۴.۳) تعداد عملیات لازم برای پیاده‌سازی این الگوریتم محاسبه شده و در آخر در بخش (۵.۳) چند مثال ارایه کرده و به کمک نرم‌افزار MATLAB 2010 به حل عددی آن‌ها می‌پردازیم [۴۲].
در فصل سوم به حل عددی معادلات انتگرال ولترای غیرخطی نوع دوم به شکل

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \int_۰^t \int_۰^x k_۱(x,t,y,z)H(y,z,U(y,z))dydz + \int_۰^x k_۲(x,t,y)G(y,t,U(y,t))dy \\ &+ \int_۰^t k_۳(x,t,z)F(x,z,U(x,z))dz + R(x,t), \quad (x,t) \in [۰,l] \times [۰,T], \end{aligned}$$

می‌پردازیم، به‌طوری‌که U تابع مجهول، R، $k_۱$، $k_۲$ و $k_۳$ توابع هموار داده شده و H، G و F نیز توابعی داده شده، پیوسته و غیر خطی در U هستند. با معرفی و بیان برخی ویژگی‌های توابع لژاندر انتقال‌یافته‌ی دوبعدی، برای توابع مطرح شده در معادله‌ی انتگرال، تقریبی ارایه می‌دهیم. سپس به کمک عملگرهای ضرب و انتگرال و نقاط هم‌مکانی، حل معادله‌ی انتگرال به حل دستگاه معادلات غیر خطی منجر می‌شود. در بخش (۳.۴) به بررسی خطای تقریب یک تابع می‌پردازیم. در مقاله‌ی [۳۷]، تخمینی برای نرم خطای بهترین تقریب آورده شده که با نتیجه‌گیری از آن، به بیان قضیه‌ای مبنی بر این موضوع می‌پردازد که تقریب یک تابع با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته نیز یک

بهترین تقریب است. نتیجه‌گیری اشتباهی که در این پایان‌نامه از بیان آن صرف‌نظر شده‌است. بخش بعد با آوردن دو مثال، به ارتباط معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل اختصاص می‌یابد. در آخر چند مثال آورده‌ایم که به کمک روش نقطه ثابت و با استفاده از نرم‌افزار MATLAB 2010 به حل عددی آن‌ها پرداخته‌ایم [۳۷].

فصل ۲

مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی مفاهیم و قضایای مورد نیاز، برای درک بهتر مطالب ارایه شده در این پایان‌نامه می‌پردازیم.

تقریب نیشتروم

روش نیشتروم یا قواعد انتگرال‌گیری عددی معادله‌ی انتگرال

$$U(x) = f(x) - \int_a^b k(x,y)U(y)dy,$$

را به صورت

$$U(x) \approx f(x) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i k(x,y_i)U(y_i)dy$$

تقریب می‌زند. در این تقریب y_iها نقاط گره‌ای و ω_iها وزن‌های متناظر با این نقاط هستند.

چندجمله‌ای‌های چبیشف

چندجمله‌ای چبیشف نوع اول، $c_n(x)$، یک چندجمله‌ای تعریف شده نسبت به x از درجه‌ی n به صورت زیر است

$$c_n(x) = \cos(n\theta), \tag{۲.۱}$$

به‌طوری‌که $x = \cos(\theta)$. اگر متغیر x روی بازه‌ی $[-1,1]$ تعریف شده باشد، آنگاه برای متغیر θ بازه‌ی $[0,\pi]$ اختیار می‌شود. چندجمله‌ای‌های چبیشف به شکل بازگشتی به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$c_0(x) = 1,$$
$$c_1(x) = x,$$
$$c_{n+1}(x) = 2xc_n(x) - c_{n-1}(x).$$

ریشه‌های $c_{n+1}(x)$ نقاط زیر هستند

$$x_j = \cos(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}), \quad j = 0, 1, ..., n.$$

اگر این ریشه‌ها را در چندجمله‌ای مقیاس شده‌ی زیر قراردهیم

$$c_j(x) = \delta_j \cos(j \arccos(x)), \quad j = 0, 1, ..., n, \quad x \in [-1, 1], \tag{۲.۲}$$

خواهیم داشت

$$C = [c_i(x_j^{(n)})]_{i,j=0}^{n} = [\delta_i \cos(\frac{i(2j+1)\pi}{2(n+1)})]_{i,j=0}^{n}.$$

ماتریس C، همان ماتریس تبدیل کسینوسی است.

فرض می‌کنیم $T_n(x)$ یک چندجمله‌ای درونیاب، ساخته شده در $n+1$ نقطه‌ی گره‌ای x_j در بازه‌ی $[-1, 1]$ باشد به‌طوری‌که تابع $f(x)$ را در $[-1, 1]$ تقریب بزند. خطا در $T_n(x)$ برابر است با

$$f(x) - T_n(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

مقدار $f^{(n+1)}(\xi_x)$ به x و x_jها بستگی دارد ولی این بستگی چنان نیست که بتوان به صراحت به آن پرداخت. پس برای کوچک ساختن $\| f - T_n \|_\infty$ در حد ممکن، فقط کمیت

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} | (x - x_0)...(x - x_n) | \tag{۳.۲}$$

را درنظر می‌گیریم. چندجمله‌ای (۳.۲) از درجه‌ی $n+1$ و ضریب بزرگترین درجه‌ی x در آن برابر یک است. طبق قضیه‌ای در [۱]، چندجمله‌ای (۳.۲) وقتی می‌نیمم می‌شود که آن را $c_{n+1}(x)/2^n$ انتخاب کنیم که در این صورت مقدار می‌نیمم آن برابر $1/2^n$ خواهدبود. با انتخاب این گره‌ها نامساوی زیر حاصل می‌شود

$$\| f - T_n \|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)! 2^n} \| f^{(n+1)} \|_\infty .$$

استفاده از ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به عنوان نقاط گره‌ای برای درونیابی، باعث کمرنگ شدن پدیده‌ی رانگ و یافتن تقریبی مناسب برای یک تابع پیوسته تحت نرم بینهایت می‌شود.

چندجمله‌ای‌های لژاندر

توابع لژاندر، جواب‌های عمومی حاصل از حل معادله‌ی دیفرانسیل زیر هستند

$$P_\lambda^\mu(x) = (1 - x^2)y'' - 2xy' + [\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1 - x^2}]y = 0, \quad | x | < 1, \ \lambda > 0, \ 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda,$$

به‌طوری‌که اعداد حقیقی λ و μ به ترتیب درجه و مرتبه‌ی مربوط به تابع لژاندر هستند. به ازای $\mu = ۰$، چندجمله‌ای‌های لژاندر به‌دست می‌آیند. فرمول بازگشتی این چندجمله‌ای‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم [۳۰]

$$\begin{aligned} L_۰(x) &= ۱, \\ L_۱(x) &= x, \\ L_{m+۱}(x) &= \frac{۲m+۱}{m+۱} x L_m(x) - \frac{m}{m+۱} L_{m-۱}(x), \quad m = ۱, ۲, ۳, ..., \quad -۱ \leqslant x \leqslant ۱. \end{aligned}$$

فرض کنید $X = L^۲(\Omega)$، ضرب داخلی را در این فضا این‌گونه تعریف می‌کنیم

$$\langle f, g \rangle = \int_۰^T \int_۰^l f(x,t) g(x,t) dx dt, \quad \forall f, g \in X. \tag{۴.۲}$$

نرم نیز در این فضا چنین تعریف می‌شود

$$\| f \|_۲ = \langle f, f \rangle^{\frac{۱}{۲}} = (\int_۰^T \int_۰^l | f(x,t) |^۲ dx dt)^{\frac{۱}{۲}}. \tag{۵.۲}$$

با توجه به چنین ضربی، چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه‌ی $-۱ \leq x \leq ۱$ با یکدیگر متعامد هستند

$$\int_{-۱}^{۱} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} \frac{۲}{۲n+۱}, & m = n, \\ ۰, & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

این چندجمله‌ای‌ها یک پایه‌ی کامل برای بازه‌ی $[-۱, ۱]$ تشکیل می‌دهند.

توابع لژاندر انتقال‌یافته‌ی دوبعدی، تعریف شده روی Ω عبارتند از

$$\psi_{mn}(x,t) = L_m(\frac{۲}{l} x - ۱) L_n(\frac{۲}{T} t - ۱), \quad m, n = ۰, ۱, ۲, ..., \quad -۱ \leqslant x \leqslant ۱,$$

به‌طوری‌که L_m و L_n چندجمله‌ای‌های لژاندر، به ترتیب از درجه‌ی m و n، تعریف شده‌ی روی بازه‌ی $[-۱, ۱]$ هستند.
چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته‌ی دوبعدی با یکدیگر متعامدند

$$\int_۰^T \int_۰^l \psi_{ij}(x,t) \psi_{mn}(x,t) dx dt = \begin{cases} \frac{lT}{(۲m+۱)(۲n+۱)}, & i = m \text{ و } j = n, \\ ۰, & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases} \tag{۶.۲}$$

روش تکراری

روش تکراری، روشی برای حل دستگاه خطی زیر هستند

$$Ax = b,$$

به‌طوری که A و b به ترتیب ماتریس و بردار داده شده‌اند. روش‌های تکراری را می‌توان به شکل ساده‌ی زیر بیان کرد

$$x_{k+1} = Mx_k + c. \tag{۷.۲}$$

در معادله‌ی (۷.۲)، M ماتریسی $N \times N$ به نام ماتریس تکرار است. اگر در هر گذر از x_k به x_{k+1} به گام قبل وابسته نباشیم به آن روش تکراری ایستا گویند. چهار روش اصلی از روش‌های تکراری ایستا، روش تکراری ژاکوبی، روش تکراری گاوس-سایدل، روش SOR و روش SSOR هستند [۲۸].

تعریف ۱.۰.۲ فرض کنیم $\sigma(A)$ مجموعه‌ی مقادیرویژه‌ی ماتریس A باشد. شعاع طیفی ماتریس A با اندازه‌ی $N \times N$ را این‌گونه تعریف می‌کنیم

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \mid \lambda \mid .$$

شعاع طیفی یک ماتریس، مستقل از نرم ماتریسی است. در حقیقت برای هر نرم ماتریسی القاشده

$$\rho(A) \leq \parallel A \parallel .$$

قضیه ۲.۰.۲ فرض کنید M یک ماتریس $N \times N$ باشد. تکرار (۷.۲) به ازای تمام $c \in \mathbb{R}^N$ همگراست اگر و تنها اگر $\rho(M) < 1$.

روش حذفی گاوس

روش حذفی گاوس نام روش حل دستگاه‌های معادلات خطی با حذف تدریجی مجهولات و تبدیل آن‌ها به دستگاه‌های مرتبه‌ی کمتر است. برای حل $Ax = b$، آن را به دستگاه هم ارز $Ux = g$ تبدیل می‌کنیم به‌طوری‌که U یک ماتریس بالا مثلثی است. برای این منظور با افزودن مضاربی به یک معادله و جمع آن با سایر معادلات، مجهولی از آن‌ها را حذف می‌کنیم. این دستگاه با فرآیند جایگذاری پسرو به راحتی حل می‌شود. تعداد عملیات برای این روش در حدود $\frac{1}{3}N^3$ است.

پیدا کردن وارون ماتریس A هم‌ارز حل معادله‌ی $AX = I$ است که X یک ماتریس $n \times n$ مجهول است. اگر X و I را برحسب ستون‌های آن‌ها بنویسیم، به حل n دستگاه می‌رسیم که ماتریس A در همه‌ی آن‌ها به عنوان ضریب، مشترک است. محاسبه‌ی A^{-1} چهار برابر حل $Ax = b$ برای یک بردار تنهای b هزینه خواهد داشت [۱].

روش گرادیان مزدوج

روش گرادیان مزدوج یک روش برای حل دستگاه خطی معین، مثبت و متقارن $Ax = b$ است. این روش به لحاظ نظری، روشی مستقیم ولی در عمل تکراری است.

قضیه ۳.۰.۲ اگر A یک ماتریس معین مثبت متقارن حقیقی باشد، آنگاه حل $Ax = b$ هم‌ارز با مینیمم کردن تابع درجه‌ی دوم $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ است.

به عبارت دیگر مقدار مینیمم $\phi(x)$ برابر $-\frac{1}{2}b^T A^{-1}b$ است که با انتخاب $x = A^{-1}b$ به‌دست‌می‌آید.

در این روش تکراری، تقریب‌های پیاپی x_k به بردار جواب، x، به صورت بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k.$$

بردارهای $\{p_k\}$ بردار هادی نامیده می‌شوند و مقدار اسکالر α_k برای مینیمم کردن $\phi(x)$ در جهت بردار هادی p_k است. به عبارت دیگر α_k برای مینیمم کردن تابع $\phi_\alpha(x_k + \alpha p_k)$ انتخاب شده است. می‌توان نشان داد اگر

$$\alpha = \alpha_k = \frac{p_k^T(b - Ax_k)}{p_k^T Ap_k} = p_k^T r_k / p_k^T Ap_k,$$

که

$$r_k = b - Ax_k,$$

این اتفاق خواهدافتاد. تعداد عملیات در این روش به ازای هرتکرار برابر $\mathcal{O}(n^2)$ است [۱۴].

ضرب تانسوری کرونکر

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $r \times s$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب تانسوری کرونکر این دو ماتریس، $A \otimes B$، یک ماتریس بلوکی از اندازه‌ی $mr \times ns$، به صورت زیر خواهدبود

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

برخی ویژگی‌های این ضرب عبارتند از [۳۱]

اگر $A \in (R)^{m\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$، $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ و $D \in \mathbb{R}^{s\times t}$، آنگاه

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (\in \mathbb{R}^{mr\times pt}).$$

به ازای تمام ماتریس‌های A و B،

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

اگر ماتریس‌های A و B نامنفرد باشند، آنگاه

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

فرمول شرمان-موریسون

در بسیاری از مسایل کاربردی، مانند حل دستگاه $Ax = B$، معکوس ماتریس A محاسبه می‌شود. فرمول شرمان موریسون به ما نشان می‌دهد که می‌توان معکوس ماتریس دیگری همچون B را به کمک معکوس A که در اختیار است و ماتریسی با رتبه‌ی یک پیداکرد [۱۴].

قضیه ۴.۰.۲ (فرمول شرمان-موریسون): اگر u و v دو بردار n-تایی و A یک ماتریس نامنفرد باشد آنگاه

$$(A - uv^T)^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}uv^TA^{-1}),$$

اگر $v^TA^{-1}u \neq 1$ آنگاه

$$\alpha = \frac{1}{(1 - v^TA^{-1}u)}.$$

ماتریس حاصل از ضرب uv^T، ماتریسی با رتبه‌ی یک است.

اگر u و v ماتریس باشند، می‌توان از تعمیم این فرمول با نام فرمول وودبری استفاده کرد.

تعریف ۵.۰.۲ (فرمول وودبری): اگر U و V دو ماتریس $n \times n$ باشند آنگاه

$$(A - UV^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(I - V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1},$$

اگر $I - V^TA^{-1}U$ ماتریسی نامنفرد باشد.

ماتریس تبدیل کسینوسی

تبدیل کسینوسی، دنباله‌ی متناهی از داده‌ها را به صورت مجموع توابع کسینوسی با فرکانس‌های مختلف نمایش می‌دهد. فشرده‌سازی فایل‌های صوتی و تصویری و روش‌های طیفی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای از مهمترین کاربردهای این تبدیل است.

تبدیل کسینوسی تابع خطی و وارون‌پذیر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یا به‌طور معادل یک ماتریس مربعی معکوس‌پذیر با اندازه‌ی n است. این ماتریس n داده‌ی $x_1, ..., x_n$ را به داده‌های $X_1, ..., X_n$ تبدیل می‌کند. داده‌های جدید به کمک این تبدیل به صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_j x_j \cos(\frac{(i-1)(2j-1)}{2n}\pi), \quad i = 1, ..., n,$$

به‌طوری که

$$\delta_j = \begin{cases} \sqrt{1/n}, & j = 1, \\ \sqrt{2/n}, & j = 2, ..., n-1. \end{cases}$$

بنابراین درایه‌های ماتریس تبدیل کسینوسی به صورت زیر خواهندبود

$$c_{ij} = \delta_{i-1} \cos(\frac{(i-1)(2j-1)}{2n}\pi), \quad i, j = 1, ..., n.$$

با تعریف $\mathbf{c}_i^T = (c_{i1}, ..., c_{in})$ به عنوان i–امین سطر از ماتریس تبدیل کسینوس $n \times n$، می‌توان این ماتریس را به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \cdots \\ \mathbf{c}_n^T \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T.$$

بردارهای $\mathbf{c}_i^T$ متعامد و یکه هستند یعنی

$$(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

در نتیجه ماتریس $\mathbf{C}$، یک ماتریس متعامد بوده و

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T.$$

نرم فربنیوس

نرم فربنیوس ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\| A \|_F^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{i,j} |^2 = trace(A^* A)$$

به‌طوری‌که A^* ترانهاده‌ی مزدوج ماتریس A است.

فصل ۳

حل عددی معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی نوع دوم

۱.۳ مقدمه

در این فصل به ارایه‌ی روشی برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم دوبعدی نوع دوم در بازه‌ی $[-۱,۱]$ برای هر متغیر، به صورت

$$U(x,y)-\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱}k(x,y,u,v)U(u,v)dudv=g(x,y),\quad (x,y)\in[-۱,۱]\times[-۱,۱], \tag{۱.۳}$$

می‌پردازیم، به گونه‌ای که تابع هسته‌ی $k(x,y,u,v)$ در بازه‌ی $[-۱,۱]^۴$ تابعی هموار و تابع مجهول $U(x,y)$ و تابع معلوم $g(x,y)$ متعلق به $L^۲([-۱,۱]^۲)$ باشند. معادله‌ی انتگرال (۱.۳) را گسسته‌سازی کرده و به کمک چندجمله‌ای‌های درونیاب برای توابع چهار متغیره، تقریبی برای تابع هسته بیان می‌کنیم.
بازه‌ی انتگرال‌گیری را $[-۱,۱]$ انتخاب کرده‌ایم که در غیر این صورت می‌توان به کمک تبدیل خطی زیر از بازه‌ی دلخواه $[\alpha,\beta]$ به بازه‌ی $[-۱,۱]$ رسید

$$\begin{cases} x'=(۲x-\alpha-\beta)/(\beta-\alpha),\\ y'=(۲y-\alpha-\beta)/(\beta-\alpha).\end{cases}$$

به این صورت که با قراردادن نقطه‌ای دلخواه از بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ به جای x یا y، به نقطه‌ی متناظر با آن در بازه‌ی $[-۱,۱]$ می‌رسیم. حال به کمک یک قاعده‌ی انتگرال‌گیری مشخص مانند گاوس یا قاعده‌ی نیوتن-کاتس، معادله‌ی (۱.۳) را گسسته‌سازی می‌کنیم، برای مثال [۱۵] را ببینید.
ابتدا برای حالت یک‌بعدی