دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی‌ارشد

رشته ریاضی کاربردی

روش موجک لژاندر برای حل مسائل مقدار اولیه از نوع براتو

استاد راهنما

دکتر ناصر آقازاده

پژوهشگر

پریسا نورس

تیر ۱۳۹۲
تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادرم

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظات شادی شکرگزارش باشم و فراموش نکنم که تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از اوست.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و مساعدت‌های استاد راهنمای خود، **جناب آقای دکتر ناصر آقازاده**، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید و همچنین سپاس‌گزارم از جناب آقای دکتر **مجتبی رنجبر** و دکتر **علی خانی** که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند.

بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و سپاس‌گزارم از برادرم افشین که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بوده است.

و در پایان از جناب آقای **یاسر قلی‌زاده**، به خاطر هم‌فکری در برنامه‌نویسی صمیمانه تشکر می‌کنم.

پریسا نورس

تیر ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه، هدف مطالعه‌ی موجک‌های لژاندر برای حل مسائل مقدار اولیه از نوع براتو است، که در نظریه‌ی احتراق حرارتی، احتراق سوخت و انتقال گرما بسیار کاربرد دارد. از ویژگی‌های موجک لژاندر همراه با روش انتگرال‌گیری گاوس برای کاستن مشکل حل معادلات جبری غیرخطی استفاده می‌شود. هم‌چنین یک روش مطمئن برای همگرایی روش موجک لژاندر برای حل رده‌ای از معادلات ولترای غیرخطی و تقریب خطای این روش نیز بحث شده است. مثال‌های نمونه برای نشان دادن درستی و کاربرد این تکنیک آورده شده است و نتایج با جواب‌های دقیق مقایسه شده است. سرانجام ما دقت بالا و مؤثر بودن این روش را نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: معادلات از نوع براتو - انتگرال‌گیری گاوس - چندجمله‌ای‌های لژاندر - موجک‌های لژاندر - روش موجک لژاندر.

پیشگفتار

در سال‌های اخیر مطالعه‌ی مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی[۱] از مرتبه‌ی دوم نظر محققان زیادی را به خود جلب کرده است که یکی از این معادلات، معادلات از نوع براتو[۲] می‌باشد که به صورت زیر می‌باشد

$$u'' + \lambda e^u = ۰, \quad ۰ < x < ۱, \quad u(۰) = u'(۰) = ۰ \qquad (۱)$$

که λ یک مقدار ثابت است.

مساله‌ی استاندارد براتو (۱) برای مدل‌بندی احتراق سوخت در شکل عددی استفاده شده است [۳]. معادله‌ی براتو [۱۳] هم‌چنین در کاربردهای زیادی مثل مدل احتراق سوخت نظریه‌ی احتراق حرارتی [۱۴] استفاده می‌شود . تعداد زیادی کارهای تحقیقی برای مساله‌ی براتو انجام گرفته است [۴، ۵]. از جمله سیام[۳] و هامدان [۴][۶، ۷] روش تجزیه‌ی لاپلاس ادومیان[۵] را برای حل معادله‌ی براتو نشان دادند.[۸] وازواز [۶] روش تجزیه‌ی ادومیان را برای حل معادله‌ی براتو به کار گرفت [۹]. در سال‌های اخیر، موجک‌ها در بسیاری از زمینه‌های علوم ومهندسی [۱۰] جا باز کردند. بسیاری از محققان استفاده از موجک‌های گوناگون [۱۱] را برای تجزیه و تحلیل مسائل با پیچیدگی محاسباتی بالا شروع کردند و اثبات کردند موجک ابزار قدرتمندی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در این پایان‌نامه ما روش موجک لژاندر[۷] را برای پیدا کردن جواب تقریبی معادلات از نوع براتو [۲] به

[۱] Ordinary differential equations (ODEs)
[۲] Bratu
[۳] Syam
[۴] Hamdan
[۵] Adomian
[۶] Wazwaz
[۷] Legendre wavelet method (LWM)

کار می‌بریم. روش به کار برده شده در این پایان‌نامه مبتنی بر پایه‌ی تبدیل معادلات از نوع براتو به معادلات انتگرال و بسط جواب با موجک لژاندر با ضرایب مجهول می‌باشد. از ویژگی موجک‌های لژاندر همراه با فرمول انتگرال‌گیری گاوس به کار گرفته شده‌اند تا ضرایب مجهول محاسبه گردند تا جواب تقریبی معادله‌ی (۱) مشخص شود.

خلاصه‌ی این پژوهش به شرح زیر است:

در بخش اول برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

در بخش دوم موجک را معرفی کرده و ویژگی‌های آن را توضیح داده‌ایم.

در بخش سوم موجک لژاندر را معرفی کرده و انواع آن را همراه با شکل‌شان آورده‌ایم و ویژگی‌هایشان را توضیح داده‌ایم. در بخش چهارم حل معادلات از نوع براتو را همراه با چند مثال نمونه آورده‌ایم و در آخر با مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق نتیجه‌گیری کرده‌ایم.

فهرست مطالب

چکیده ث

پیشگفتار ج

فهرست مطالب ح

۱ تعاریف ۱

۲ مقدمه‌ای بر موجک ۱۱

۱.۲ معرفی موجک ۱۱

۲.۲ توابع مقیاس ۱۱

۳.۲ موجک‌ها ۱۳

۴.۲ بسط توابع بر حسب موجک‌ها ۱۵

۵.۲ روابط بازسازی و تجزیه ۱۷

۶.۲ الگوریتم‌های بازسازی و تجزیه ۱۹

۷.۲ خواص مطلوب موجک‌ها ۲۰

۸.۲ موجک هار ۲۲

۳ موجک لژاندر ۲۸

۱.۳ موجک‌های لژاندر خطی ۲۹

۱.۱.۳ توابع مقیاس ۲۹
۲.۱.۳ موجک‌ها ۳۲
۳.۱.۳ روابط تجزیه ۳۶
۲.۳ موجک‌های لژاندر مرتبه‌ی دوم ۳۶
۱.۲.۳ توابع مقیاس ۳۶
۲.۲.۳ موجک‌ها ۳۹
۳.۳ موجک‌های لژاندر از مرتبه‌ی کلی ۴۴
۱.۳.۳ توابع مقیاس ۴۴
۲.۳.۳ موجک‌ها ۴۵
۴.۳ موجک‌های لژاندر مکعبی $m = 3$ ۴۵
۵.۳ تقریب تابع ۴۷
۶.۳ استفاده از موجک لژاندر برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم ۴۹

۴ حل معادله براتو ۵۲
۱.۴ یافتن یکتایی و آنالیز همگرایی ۵۳
۲.۴ تقریب خطا ۵۶
۳.۴ مثال‌های نمونه ۵۷

نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۶۲

مراجع ۶۷

×

فصل ۱
تعاریف

تعریف ۱.۱. مجموعه‌ی V را یک فضای برداری روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ گویند، هرگاه

۱. $\forall a, b \in \mathcal{R}, \quad \forall u, v \in V \Longrightarrow au + bv \in V$

۲. $\exists 0 \in V : \forall u \in V \quad 0 \times u = 0, \quad 0 + u = u$ که صفر فضا منحصر بفرد است.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم Xفضای خطی وتابع $||.|| : X \to \mathbb{R}^{+}$ به ازای هر x و y و هر اسکالر α (حقیقی یا مختلط) دارای خواص زیر باشد:

$$||x|| \geq 0$$

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

در این صورت تابع فوق را نرم روی فضای خطی X و X را فضای خطی نرم‌دار می‌نامند.

تعریف ۳.۱. دنباله‌ی $\{x_n\}$ را در فضای خطی نرم‌دار X دنباله‌ی کوشی[۱] می‌نامند هرگاه

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N(\epsilon); \quad \forall n, m > N(\epsilon) \Rightarrow ||x_n - x_m|| < \epsilon. \tag{۱.۱}$$

به عبارت دیگر $\lim ||x_n - x_m|| = 0$ وقتی که n و m به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

[۱] Cauchy

تعریف ۴.۱. فضای خطی نرم‌دار که هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد، فضای باناخ[۲] می‌نامند.

تعریف ۵.۱. فضای باناخ H را فضای هیلبرت[۳] گوییم هرگاه تابع $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ که آن را ضرب داخلی می‌نامیم موجود باشد به طوری که

۱. $\langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad y, x_1, x_2 \in H$

۲. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad x, y \in H$

۳. $||x||^2 = \langle x, x\rangle, \quad x \in H$

تعریف ۶.۱. فضای $L^2(D)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L^2(D) = \left\{ f : D \longrightarrow (-\infty, \infty) \,\middle|\, \int_D |f|^2 < \infty \right\}$$

تعریف ۷.۱. اگر یک مجموعه‌ی متعامد نرمال از توابع مانند $\{\phi_i\}$ در فضای X طوری یافت شود که هر عضو دیگر این فضا را بتوان به صورت ترکیب خطی از آن‌ها نوشت آن‌گاه $\{\phi_i\}$ را **پایه‌ی متعامد نرمال** این فضا گویند.

دو مفهوم **پایه‌ی متعامد نرمال** و **مجموعه‌ی کامل از توابع متعامد نرمال**، هم‌ارزند. البته با هر یک از آزمون‌های زیر می‌توان پی برد که مجموعه‌ی متعامد نرمال $\phi_1, \dots, \phi_d, \dots$ کامل است یا خیر:

۱. $\forall \psi \in X, \quad \psi = \Sigma_i \langle \psi, \phi_i\rangle \phi_i$

۲. $\forall \psi \in X, \quad ||\psi||^2 = \Sigma_{i=1}^{\infty} |\langle \psi, \phi_i\rangle|^2$ که این همان اتحاد پارسوال است.

۳. تنها تابع ψ موجود در X که تمامی ضرایب فوریه‌ی آن صفر است، خود تابع صفر است.

۴. هیچ تابعی مانند ψ در X موجود نیست به‌طوری‌که مجموعه‌ی $\psi, \phi_1, \dots, \phi_d, \dots$ متعامد نرمال باشد.

تعریف ۸.۱. **فرآیند گرام اشمیت** با استفاده از این فرآیند با در دست داشتن یک مجموعه‌ی مستقل خطی متناهی یا نامتناهی (حتی شمارای نامتناهی) از توابع مانند $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d, \dots$ می‌توان یک مجموعه‌ی متعامد نرمال مانند $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d, \dots$ ساخت. این فرآیند به صورت زیر انجام می‌گیرد:

[۲] Banach
[۳] Hilbert

قرار می‌دهیم $\psi_۱ = \frac{\phi_۱}{||\phi_۱||}$ ، برای به دست آوردن $\psi_۲$ تعریف می‌کنیم:

$$\omega_۲(s) = \phi_۲(s) - \langle \phi_۲, \psi_۱ \rangle \psi_۱$$

تابع $\omega_۲$ عمود بر $\psi_۱$ است. حال قرار می‌دهیم $\psi_۲ = \frac{\omega_۲}{||\omega_۲||}$ و روند را به صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$\omega_k(s) = \phi_k(s) - \sum_{i=۱}^{k-۱} \langle \phi_k, \psi_i \rangle \psi_i$$
$$\psi_k = \frac{\omega_k}{||\omega_k||}$$

با اتمام روند مجموعه‌ای از توابع متعامد نرمال به دست آورده ایم.

تعریف ۹.۱. تابعی را که تمامی مشتقات آن (از هر مرتبه‌ای) پیوسته باشد، **تابع هموار** گویند.

تعریف ۱۰.۱. **محمل** یک تابع عبارت است از بستار مجموعه نقاطی از دامنه‌ی تابع که مقدار تابع در آن غیر صفر باشد. به عبارت دیگر، اگر محمل تابع f را با $supp(f)$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$supp(f) = \{\overline{x : f(x) \neq ۰}\}$$

تعریف ۱۱.۱. اگر V زیرمجموعه‌ای از فضای برداری U باشد، V را زیرفضای U گویند هرگاه V نیز یک فضای برداری باشد.

فرض کنید فضای برداری U داده شده باشد و V زیرفضایی از آن باشد، همیشه یک زیرفضایی از U مانند W هست بطوریکه

۱.هر عضو U بتواند به صورت ترکیب خطی از یک عضو V و یک عضو W نوشته شود. یعنی

$$U = V + W$$

۲.نحوه‌ی نمایش مورد قبلی منحصر بفرد است اگر و فقط اگر $V \cap W = \{۰\}$ که این همان تجزیه‌ی مستقیم U نامیده می‌شود و با $U = V \oplus W$ نشان داده می‌شود.

در کل W یکتا نیست. در واقع برای فضای برداری داده شده U و زیرفضایی از آن مانند V می‌توان W را چنان انتخاب کرد که $W \perp V$ یعنی هر عضو V عمود بر هر عضو W باشد و این به تجزیه‌ی متعامد U معروف است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = V \dotplus W$$

تعریف ۱.۱۲. زیر مجموعه‌ی شمارش‌پذیر $\{f_k\}$ از یک فضای هیلبرت، یک **پایه‌ی ریس** [۴] نامیده می‌شود هرگاه هر عضو دلخواه مانند f را بتوان به صورت ترکیب خطی منحصر بفردی از اعضای $\{f_k\}$ نوشت. یعنی:

$$f = \sum_k c_k f_k$$

و اعداد ثابت و مثبت A, B موجود باشند که

$$A||f||^{۲} \leq \sum_k |c_k|^{۲} \leq B||f||^{۲}$$

در صورتی که $\{f_k\}$ یک پایه‌ی متعامد برای فضای هیلبرت مورد نظر باشد، آنگاه

$$A = B = ۱$$

یعنی

$$||f||^{۲} = \sum_k |c_k|^{۲}$$

تعریف ۱.۱۳. **چندجمله‌ای چبیشف**[۵] بر بازه‌ی $[-۱, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-۱} x) \qquad (۱.۲)$$

از این تعریف داریم

$$T_{۰}(x) = ۱, \quad T_{۱}(x) = x$$

[۴] Rise
[۵] Chebychev

قضیه ۱۴.۱. [۱] *چندجمله‌ای‌های چبیشف در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کنند:*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

توجه کنید که $T_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی n است و به استقرا می‌توان نشان داد که ضریب x^n در آن 2^{n-1} است.

صفرهای $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = 0 \Rightarrow n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

در نتیجه ریشه‌های $T_n(x)$ عبارتند از:

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

توجه کنید که ریشه‌ها در بازه‌ی $[-1, 1]$ قرار دارند و متمایز هستند.

یادآوری ۱۵.۱. *از تعریف چندجمله‌ای‌های چبیشف نتیجه می‌شود که*

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

همچنین توجه کنید که به ازای

$$\bar{x}_k = \cos(\frac{k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

داریم:

$$T_n(\bar{x}_k) = (-1)^k$$

در نتیجه

$$||T_n||_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1$$

اگر $x_۰, x_۱, \dots, x_{n-۱}$ ریشه‌های $T_n(x)$ باشند، می‌توان نوشت

$$T_n(x) = ۲^{n-۱}(x - x_۰)(x - x_۱)\dots(x - x_{n-۱})$$

اگر تعریف کنیم

$$\psi(x) = (x - x_۰)(x - x_۱)\dots(x - x_{n-۱})$$

آن‌گاه

$$\psi(x) = \frac{۱}{۲^{n-۱}} T_n(x)$$

و

$$\max_{-۱\le x\le ۱} |\psi(x)| = \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

قضیه ۱.۱۶. *فرض کنید $x_۰, x_۱, \dots, x_{n-۱}$ ریشه‌های $T_n(x)$ باشند و فرض کنید $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای تکین باشد، یعنی یک چندجمله‌ای درجه‌ی n که ضریب x^n در آن برابر ۱ است، آن‌گاه*

$$\max_{-۱\le x\le ۱} |\psi(x)| \le \max_{-۱\le x\le ۱} |P_n(x)|$$

برهان. [۱] □

چندجمله‌ای‌های چبیشف در بازه‌ی دلخواه

چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n(t)$، $n = ۰, ۱, \dots$ را در بازه‌ی $-۱ \le t \le ۱$ در نظر بگیرید. تبدیل خطی زیر را نیز در نظر بگیرید

$$x = \frac{(b-a)t}{۲} + \frac{b+a}{۲}, \quad -۱ \le t \le ۱$$

این تبدیل بازه‌ی $[a, b]$ از محور x را به بازه‌ی $[-۱, ۱]$ از محور t نقش می‌کند، و برعکس.

اکنون چندجمله‌ای درجه‌ی n، $\tilde{T}_n(x)$ را بر بازه‌ی $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{T}_n(x) = T_n(t) = \cos(n \cos^{-۱} t) \quad , \quad n = ۰, ۱, \dots$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\tilde{T}_0(x) &= T_0(t) = 1\\ \tilde{T}_1(x) &= T_1(t) = \frac{2x-(a+b)}{b-a}\\ \tilde{T}_2(x) &= T_2(t) = 2t^2 - 1 = 2\left[\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right]^2 - 1\end{aligned} \tag{3.1}$$

با توجه به رابطه‌ی بازگشتی برای چندجمله‌ای‌های $T_n(t)$، رابطه‌ی بازگشتی زیر برای چندجمله‌ای‌های $\tilde{T}_n(x)$ برقرار است.

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = 2\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)\tilde{T}_n(x) - \tilde{T}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

صفرهای $T_n(t)$ عبارتند از

$$t_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

پس صفرهای $\tilde{T}_n(x)$ چنین‌اند

$$x_k = \frac{(b-a)t_k}{2} + \frac{b+a}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

از آن‌جا که $-1 \le t_k \le 1$، پس $a \le x_k \le b$، برای $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

تعریف ۱.۱۷. معادله‌ی انتگرالی هر معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد، یک معادله‌ی انتگرالی نامیده می‌شود. مثلا معادله‌ی انتگرالی زیر

$$g(s) = f(s) + \int_{\Omega} K(s,t)g(t)dt$$

که در آن، s و t بردارهای nبعدی هستند و Ω ناحیه‌ی انتگرال‌گیری است. یک معادله‌ی انتگرال، خطی است اگر داشته باشیم

$$L\left[c_1 g_1(s) + c_2 g_2(s)\right] = c_1 L\left[g_1(s)\right] + c_2 L\left[g_2(s)\right]$$

که L عملگر انتگرال و $c_۱$ و $c_۲$ اعداد ثابت دلخواه هستند. اگر شرط بالایی برای معادلات انتگرالی برقرار نباشد، معادله‌ی انتگرال غیرخطی گفته می‌شود. بیشتر معادلات انتگرال خطی به صورت زیر می‌باشند:

$$h(s)g(s) = f(s) + \lambda \int_a K(s,t)g(t)dt$$

که f و h و K توابع معلوم هستند ولی g باید مشخص شود، λ غیر صفر است و می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد. $K(s,t)$ هسته یا کرنل گفته می‌شود.

تعریف ۱.۱۸. معادلات انتگرالی فردهلم اگر در معادلات انتگرالی، حد بالایی انتگرال، ثابت باشد، در این صورت این معادلات انتگرالی، معادلات انتگرالی فردهلم گفته می‌شوند.

قضیه ۱.۱۹. ***تبدیل انتگرال چندگانه به انتگرال یگانه***

$$\int_a^s \int_a^{s_n} ... \int_a^{s_۳} \int_a^{s_۲} F(s_۱)ds_۱ ds_۲ ... ds_{n-۱} ds_n = \left[\frac{۱}{(n-۱)!}\right] \int_a^s (s-t)^{n-۱} F(t)dt \quad (۱.۴)$$

برهان. [۱۲] □

روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیر خطی

دستگاه غیرخطی $F(x) = \bar{۰}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_۱(x_۱, x_۲, ..., x_n) = ۰ \\ f_۲(x_۱, x_۲, ..., x_n) = ۰ \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ f_n(x_۱, x_۲, ..., x_n) = ۰ \end{cases} \quad (۱.۵)$$

فرض کنیم $X^{(۰)} = [x_۱^{(۰)}, x_۲^{(۰)}, \dots, x_n^{(۰)}]^T$ داده شده باشد و $\alpha = [\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n]^T$ جواب دستگاه معادلات باشد، در این صورت داریم $\alpha = X^{(۰)} + H^{(۰)}$ که در آن $H^{(۰)} = [h_۱^{(۰)}, h_۲^{۰}, \dots, h_n^{(۰)}]$ می‌باشد و با توجه به این که α جواب دستگاه معادلات است پس بایستی در معادلات بالا صدق کند.

پس

$$\begin{aligned}
0 &= f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\
&= f_i\left(x_1^{(0)} + h_1^{(0)}, x_2^{(0)} + h_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} + h_n^{(0)}\right) \\
&= f_i\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \\
&+ \left[h_1^{(0)} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2^{(0)} \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \cdots + h_n^{(0)} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right]_{X=X_0} + \cdots
\end{aligned}$$

با صرف‌نظر از جملات بعدی بسط داریم:

$$\left[h_1^{(0)} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2^{(0)} \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + h_n^{(0)} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right]_{X=X_0} = -f_i\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$$

برای $i = 1, \ldots, n$. بنابراین به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}
\left[h_1^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + h_n^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right]_{X=X_0} = -f_1\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \\
\left[h_1^{(0)} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2^{(0)} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + h_n^{(0)} \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right]_{X=X_0} = -f_2\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \\
\quad\quad\quad\quad\vdots \\
\left[h_1^{(0)} \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + h_2^{(0)} \frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \cdots + h_n^{(0)} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right]_{X=X_0} = -f_n\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)
\end{cases} \tag{۶.۱}$$

و یا به فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{bmatrix}_{X=X_0}
\begin{bmatrix} h_1^{(0)} \\ \vdots \\ h_n^{(0)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -f_1\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \\ \vdots \\ -f_n\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \end{bmatrix} \tag{۷.۱}$$

یا

$$J\left(X^{(0)}\right) . H^{(0)} = -F\left(X^{(0)}\right)$$

که J نشان دهنده‌ی ژاکوبین[۶] است. از اینجا نتیجه می‌شود:

$$H^{(0)} = -J^{-1}\left(X^{(0)}\right) . F\left(X^{(0)}\right)$$

jacobian[۶]

حال تقریب بعدی $X^{(1)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$X^{(1)} = X^{(0)} + H^{(0)}$$

برای به دست آوردن تقریب‌های بعدی به همین ترتیب عمل می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + H^{(k)}, \quad H^{(k)} = -J^{-1}\left(X^{(k)}\right) F\left(X^{(k)}\right) \tag{8.1}$$

این روند برای $k = 0, 1, 2, \ldots$ آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا به اندازه‌ی کافی $X^{(k+1)}$ به α نزدیک شود. رابطه‌ی بالا را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{F\left(X^{(k)}\right)}{J\left(X^{(k)}\right)} \tag{9.1}$$

در عمل سعی نمی‌کنیم معکوس $J\left(X^{(k)}\right)$ را محاسبه کنیم و رابطه‌ی بالا فقط برای تغییر روش نیوتن است.

در عمل روش حل به صورت زیر است. در هر مرحله:

۱.$F\left(X^{(k)}\right)$ محاسبه می‌گردد.

۲.$J\left(X^{(k)}\right)$ محاسبه می‌شود.

۳.از حل دستگاه خطی

$$J\left(X^{(k)}\right) H^{(k)} = -F\left(X^{(k)}\right) \tag{10.1}$$

$H^{(k)}$ به روش حذفی گاوس تعیین می‌شود.

۴.تقریب جدید $X^{(k+1)}$ از رابطه‌ی $X^{(k+1)} = X^{(k)} + H^{(k)}$ محاسبه می‌شود.

شرط توقف معمولا به صورت $\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\| < \varepsilon$ می‌باشد.

فصل ۲

مقدمه‌ای بر موجک

۱.۲ معرفی موجک

سابقه‌ی استفاده از موجک[1] تقریبا به سه دهه‌ی اخیر برمی‌گردد. اما در همین مدت کوتاهی که این بحث وارد عرصه‌ی ریاضی شده، کاربردهای متنوعی از جمله پردازش سیگنال و فشرده سازی داده‌ها و تصاویر، آنالیز عددی و ... برای خود یافته است. موجک‌ها در بسیاری از زمینه‌های فنی و مهندسی، علوم و ... ابزاری موفق و مفید هستند.

۲.۲ توابع مقیاس

ساختار پایه‌ای موجک‌ها با استفاده از توابع مقیاس[2] به صورت زیر است:

یک تابع مقیاس اساسا تابعی مانند $\phi(x)$ است که می‌تواند به صورت ترکیب خطی از $\phi(۲x-k)$ها که حالت انتقال $\frac{k}{۲}$ و اتساع $\frac{۱}{۲}$ از $\phi(x)$ است، نوشته شود. یعنی

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(۲x-k) \qquad (۱.۲)$$

که رابطه‌ی دومقیاسی[3] برای تابع مقیاس یا همان موجک پدر[4] نامیده می‌شود و دنباله‌ی p_k به دنباله‌ی دومقیاسی ϕ مشهور است. در این‌جا ما اغلب با روابط دومقیاسی که دنباله‌ی دومقیاسی آن‌ها، تنها

---

[1] Wavelet
[2] Scaling function
[3] Two-scale relation
[4] Father wavelet