



دانشکده علوم

پایان نامه‌ی دکتری در رشته‌ی فیزیک - اپتیک و لیزر

پدیده فروهش و نمو در درهم‌تنیدگی اتم‌های سه ترازه
V شکل و دو مد فوتونی در یک کاواک غیرخطی

به کوشش

مهیار ماهجویی

استاد راهنما

دکتر محمد مهدی گلشن

اسفندماه ۱۳۹۱

به نام خداوند بخشنده مهربان

به نام خدا

اظهار نامه

اینجانب مهیار ماهجویی (۸۴۴۲۰۹) دانشجوی رشته فیزیک گرایش اپتیک و لیزر دانشکده علوم اظهار می‌کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده‌ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آنرا نوشته‌ام. همچنین اظهار می‌کنم که تحقیق و موضوع پایان‌نامه‌ام تکراری نیست و تعهد می‌نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آنرا منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین‌نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: مهیار ماهجویی

تاریخ و امضا:

به نام خدا

پدیده فروهش و نمو در درهم‌تنیدگی اتم‌های سه ترازه V شکل و دو مد فوتونی در
یک کاواک غیرخطی

به کوشش

مهیار ماهجویی

پایان‌نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان
بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه دکتری

در رشته‌ی

فیزیک

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی کمیته پایان‌نامه با درجه‌ی: **خوب**

.....دکتر محمد مهدی گلشن، دانشیار بخش فیزیک (رئیس کمیته).

.....دکتر عبدالناصر ذاکری، استاد بخش فیزیک

.....دکتر حمید نادگران، استاد بخش فیزیک

به همسر **نیکو**

به پاس محبت‌های بی دریغش

سپاسگزاری

اکنون که این پایان نامه به اتمام رسیده است بر خود لازم میدانم از راهنمایی های روشنگرانه و زحمات بی دریغ استاد گرانقدر خود جناب آقای محمدمهدی گلشن طی هدایت این رساله، تشکر فراوان نمایم. همچنین از اساتید بزرگوار آقایان دکتر عبدالناصر ذاکری، دکتر حمید نادگران و دکتر محمود حسینی فرزاد که در این مدت مرا از راهنمایی های خود بهره مند ساختند، سپاس فراوان دارم.

چکیده

پدیده فروهش و نمو در درهم‌تنیدگی اتم‌های سه ترازه V شکل و دو مد فوتونی در یک کاواک غیرخطی

به کوشش

مهیار ماهجویی

در این پایان نامه رفتار زمانی آنتروپی فون نویمن به عنوان سنجه‌ای برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی بین اتم‌های سه ترازه V شکل و مجموعه‌ای از فوتون‌های یک میدان الکترومغناطیسی دو مد مطالعه شده است. برهمکنش اتم-فوتون را در یک کاواک غیر خطی کرمانند با وجود جفت‌شدگی وابسته به شدت در نظر گرفته و به کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیسی در این محیط می‌پردازیم. با معرفی یک عملگر کازیمیر، N ، که ویژه‌مقیاراش تعداد برانگیختگی‌های کل سیستم می‌باشد و با هامیلتونی جابجا می‌شود نشان می‌دهیم که هامیلتونی به شکل قطعه‌ای قطری بوده و تشکیل شده است از دو قطعه 2×2 و $N-1$ قطعه 3×3 . سپس برای قطعات 2×2 به روش تحلیلی به محاسبه عملگر تحول زمانی پرداخته و نشان می‌دهیم که این عملگر نیز به شکل قطعه‌ای قطری بوده و خصوصیتی شبیه هامیلتونی دارد. بررسی رفتار زمانی درهم‌تنیدگی و وابستگی آن به حالت اولیه سیستم به روش عددی برای دو حالت مجزا انجام شده است، نخست برای حالت‌های اولیه غیر آماری و سپس برای حالت‌های اولیه فوتونی با توزیع‌های آماری مشخصی همچون دوجمله‌ای، همدوس و همدوس چلانده. در آخر تاثیر پارامترهای مختلفی همچون اثر کر، ثابت جفت‌شدگی و جفت‌شدگی وابسته به شدت بر رفتار زمانی و بیشینه درهم‌تنیدگی بررسی شده است.

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول: مقدمه ۲

فصل دوم: مفهوم درهمتنیدگی و کاربردهایی از آن

۱-۲ مفهوم درهم تنیدگی ۷

۲-۲ کاربردهایی از درهمتنیدگی ۱۰

۱-۲-۲ فرابرد کوانتومی ۱۰

۲-۲-۲ کد گذاری چگال ۱۲

۳-۲-۲ رمزنگاری کوانتومی ۱۳

۱-۳-۲-۲ توزیع کلید کوانتومی ۱۴

۲-۳-۲-۲ امنیت ۱۷

۳-۳-۲-۲ درهمتنیدگی و توزیع کلید کوانتومی ۱۸

فصل سوم: برهمکنش نور و ماده در یک محیط غیر خطی

۱-۳ توصیف سیستم ۲۱

۲-۳ کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیس در یک محیط غیر خطی ۲۲

۳-۳ کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیس در یک دی الکتریک با تقارن مرکزی ۲۵

۴-۳ هامیلتونی سیستم ۲۹

فصل چهارم: دینامیک درهم‌تنیدگی سیستم اتم-فوتون

- ۱-۴ توصیف هامیلتونی سیستم ۳۲
- ۲-۴ عملگر کازیمیر برای سیستم اتم V شکل و دو مد فوتونی ۳۳
- ۳-۴ شکل ماتریسی هامیلتونی برای برانگیختگی واحد ۳۵
- ۴-۴ عملگر تحول زمانی برای سیستم اتم V شکل و دو مد فوتونی ۳۷
- ۵-۴ بررسی تحلیلی درهم‌تنیدگی اتم-فوتون برای برانگیختگی واحد،
به عنوان پایه برای مراتب بالاتر برانگیختگی ۴۰

فصل پنجم: نتایج عددی I: بررسی رفتار زمانی درهم‌تنیدگی برای حالت های اولیه

متفاوت غیر آماری

- ۱-۵ حالتی که برانگیختگی کل یک باشد ۵۱
- ۲-۵ حالتی که برانگیختگی کل دو باشد ۵۸
- ۳-۵ حالتی که برانگیختگی کل سه باشد ۶۵
- ۴-۵ بررسی تاثیر مقدار ثابت های مختلف بر الگوی فروهش و نمو درهم‌تنیدگی ۷۰
- ۱-۴-۵ اثر جفت شدگی وابسته به شدت بر پدیده فروهش و نمو درهم‌تنیدگی ۷۰
- ۲-۴-۵ اثر ناکوکی بر پدیده فروهش و نمو درهم‌تنیدگی ۷۱
- ۳-۴-۵ اثر ثابت جفت شدگی بر پدیده فروهش و نمو درهم‌تنیدگی ۷۲
- ۴-۴-۵ اثر ثابت کر بر پدیده فروهش و نمو درهم‌تنیدگی ۷۳

فصل ششم: نتایج عددی II: بررسی رفتار زمانی درهم‌تنیدگی

برای حالت های اولیه فوتونی با توزیع های آماری مختلف

- ۱-۶ حالت اولیه فوتونی به صورت توزیع دو جمله ای ۷۷
- ۲-۶ حالت اولیه فوتونی به صورت توزیع همدوس ۷۸

۱-۲-۶ بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر الگوی فروهش و نمو.....	۷۸
۲-۲-۶ بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر الگوی فروهش	
و نمودر توزیع دو جمله ای.....	۸۲
۳-۶ حالت اولیه فوتونی به صورت توزیع همدوس چلانده.....	۸۸
۱-۳-۶ بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر الگوی فروهش و نمو.....	۸۸
۲-۳-۶ بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر الگوی فروهش و نمودر توزیع همدوس.....	۸۹
۴-۶ توزیع همدوس چلانده حالت اولیه فوتونی	۹۳
۱-۴-۶ مفهوم آماری توزیع همدوس چلانده.....	۹۳
۲-۴-۶ بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر الگوی فروهش	
و نمودر توزیع همدوس چلانده.....	۹۴

فصل هفتم: نتیجه گیری و پیشنهادات

۱-۷ نتیجه گیری.....	۱۰۰
۲-۷ پیشنهاد.....	۱۰۳
فهرست منابع.....	۱۰۴

فهرست اشکال

صفحه	عنوان
۲۱	شکل (۱-۳): اتم سه ترازه V شکل ومیدان دو مد
۵۳	شکل (۱-۵): رفتار زمانی آنترویی برای N=1 و حالت اولیه $ \psi(0)\rangle = 0,0,A\rangle$
	شکل (۲-۵): رفتار زمانی آنترویی برای N=1 و حالت اولیه
۵۵	$ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,C\rangle + 0,1,C\rangle)$
۵۷	شکل (۳-۵): از چپ به راست به ترتیب تبدیل فوریه شکل‌های (۱-۵) و (۲-۵)
	شکل (۴-۵): به ترتیب از چپ به راست رفتار زمانی آنترویی و تبدیل فوریه آن برای
۵۸	$ \psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(1,0,C\rangle + 0,0,A\rangle + 0,1,C\rangle + 0,0,B\rangle)$
۶۰	شکل (۵-۵): رفتار زمانی آنترویی برای N=2 و حالت اولیه $ \psi(0)\rangle = 2,0,C\rangle$
	شکل (۶-۵): رفتار زمانی درهم‌تنیدگی برای N=2 و حالت اولیه
۶۱	$ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2,0,C\rangle + 1,0,A\rangle)$
	شکل (۷-۵): رفتار زمانی آنترویی برای N=2 و حالت اولیه
۶۲	$ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2,0,C\rangle + 0,2,C\rangle)$
	شکل (۸-۵): رفتار زمانی آنترویی برای N=2 و حالت اولیه
۶۳	$ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}}(2,0,C\rangle + 1,0,A\rangle + 1,1,C\rangle + 0,1,A\rangle + 1,0,B\rangle + 0,2,C\rangle + 0,1,B\rangle)$

شکل (۵-۹): تبدیل فوریه رفتار زمانی آنتروپی نمایش داده شده در شکل (۵-۸)..... ۶۴

شکل (۵-۱۰): رفتار زمانی آنتروپی برای $N=3$ و حالت‌های اولیه به ترتیب

از چپ به راست و از بالا به پایین: (۵-۳۷)، (۵-۳۸)، (۵-۳۹) و (۵-۴۰)..... ۶۷

شکل (۵-۱۱): رفتار زمانی آنتروپی هنگامی که همه اعضا قطعات 2×2 شرکت دارند

به ترتیب از چپ به راست و از بالا به پایین برای $N=1,2,3,4$ ۶۹

شکل (۵-۱۲): رفتار زمانی آنتروپی برای $N=2$ و حالت اولیه (۵-۴۱) از چپ به راست

به ترتیب برای $1, \sqrt{n+1}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ۷۱

شکل (۵-۱۳): رفتار زمانی آنتروپی برای $N=2$ و حالت اولیه (۵-۴۱) از چپ به راست

و از بالا به پایین به ترتیب برای $\Delta = 2, 10, 100, 1000$ ۷۲

شکل (۵-۱۴): رفتار زمانی آنتروپی برای $N=2$ و حالت اولیه (۵-۴۱) از چپ به راست

و از بالا به پایین به ترتیب برای $g = 0.1, 0.15, 0.25, 0.5$ ۷۳

شکل (۵-۱۵): رفتار زمانی آنتروپی برای $N=2$ و حالت اولیه (۵-۴۱) از چپ به راست

و از بالا به پایین به ترتیب برای $\chi_{A(B)} = 0.1, 0.5, 0.7, 0.9$ ۷۴

شکل (۶-۱): نمودار توزیع دوجمله ای ($P(n)$) بر حسب n به ازاء $\eta = 0.5$

برای تعداد متفاوت فوتون..... ۸۰

شکل (۶-۲): رفتار زمانی آنتروپی به ازاء $\eta = 0.5$ و به ترتیب از چپ به راست و از بالا

به پایین برای $M = 4, 6, 8, 12, 16, 20$ ۸۲

شکل (۶-۳): رفتار زمانی آنتروپی به ازاء ضریب جفت شدگی و به ترتیب از چپ به راست

و از بالا به پایین برای $g_A = g_B = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ ۸۳

شکل (۶-۴): رفتار زمانی آنتروپی به ازاء ضریب غیر خطی کر و به ترتیب از چپ به راست

و از بالا به پایین برای $\chi_A = \chi_B = 0.25, 0.5, 0.9, 1.5$ ۸۴

شکل (۵-۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازای تابع جفت شدگی وابسته به شدت $f(n)$

و به ترتیب از بالا به پایین برای $1, \sqrt{n+1}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $f(n) = \dots$ ۸۵

شکل (۶-۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازای ناکوکی Δ و به ترتیب از چپ به راست

و از بالا به پایین برای $\Delta = 5, 10, 100, 1000$ ۸۶

شکل (۷-۶): رفتار زمانی آنتروپی ($M=8$) به ازای η و به ترتیب از چپ

به راست و از بالا به پایین برای $\eta = 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$ ۸۷

شکل (۸-۶): شکل $P(n)$ توزیع همدوس برای مقادیر مختلف α ۸۸

شکل (۹-۶): رفتار زمانی آنتروپی برای $M=8$ به ازای مقادیر مختلف α از چپ

به راست و از بالا به پایین به ترتیب $\alpha = 0.5, 2, 2.5, 4$ ۸۹

شکل (۱۰-۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازای مقادیر مختلف ضریب جفت شدگی، g ،

از چپ به راست و از بالا به پایین به ترتیب $g = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ ۹۰

شکل (۱۱-۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازای مقادیر مختلف ضریب اثر غیر خطی کر، χ ،

از چپ به راست و از بالا به پایین به ترتیب $\chi = 0.15, 0.5, 0.7, 0.9, 1.5, 2$ ۹۱

شکل (۱۲-۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازای تابع جفت شدگی وابسته به شدت $f(n)$

و به ترتیب از چپ به راست و از بالا به پایین برای $1, \sqrt{n+1}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $f(n) = \dots$ ۹۲

شکل (۱۳-۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازای ناکوکی Δ و به ترتیب از چپ به راست و از بالا

به پایین برای $\Delta = 5, 10, 100, 1000$ ۹۲

شکل (۱۴-۶): شکل $P(n)$ توزیع همدوس برای مقادیر مختلف α ۹۴

شکل (۱۵-۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازای مقادیر مختلف ضریب جفت شدگی، g ،

از چپ به راست و از بالا به پایین به ترتیب $g = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ ۹۵

شکل (۶-۱۶): رفتار زمانی آنتروپی به ازاء مقادیر مختلف ضریب اثر غیر خطی کر، χ ،

از چپ به راست و از بالا به پایین به ترتیب $\chi = 0.25, 0.5, 0.9, 1.5$ ۹۶

شکل (۶-۱۷): رفتار زمانی آنتروپی به ازاء تابع جفت شدگی وابسته به شدت $f(n)$

و به ترتیب از چپ به راست و از بالا به پایین برای $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, 1, \sqrt{n+1}$ ۹۷

شکل (۶-۱۸): رفتار زمانی آنتروپی به ازاء ناکوکی Δ و به ترتیب از چپ به راست

و از بالا به پایین برای $\Delta = 5, 10, 100, 1000$ ۹۸

فصل اول

مقدمه

حدود ۴۰ سال قبل فردی به نام گوردون مور^۱ اظهار کرد که طی سال‌های قبل از آن میزان پیچیدگی مدارهای میکرو الکترونیک، هر ۱۸ ماه دو برابر شده است. معیار اندازه گیری این پیچیدگی تعداد ترانزیستورها در واحد سطح بود. بدان معنا که هر ۱۸ ماه تراشه‌هایی به بازار می‌آمدند که تعداد ترانزیستورهای آنها در واحد سطح دو برابر قبل بود. طبیعی است که دو برابر شدن تعداد ترانزیستورها به این معناست که ابعاد ترانزیستورها در حال نصف شدن است و این امر بدان معناست که به سرعت به جایی می‌رسیم که عناصر منفرد از یک اتم بزرگتر نخواهند بود. در اینجا مشکلی که پیش می‌آید، این است که در مقیاس اتمی خواصی که سیستم از خود نشان می‌دهد را نمی‌توان با قوانین فیزیک کلاسیک توجیه کرد. بلکه باید از اصول مکانیک کوانتومی برای فهم چنین سیستم‌های میکروسکوپی استفاده کرد.

ریچارد فایمن^۲ در اوایل دهه ۱۹۸۰ در مقاله‌ی خود نشان داد که شبیه سازی یک سیستم کوانتومی توسط یک کامپیوتر کلاسیکی کار پیچیده‌ای است [۱]، اظهارات وی لزوم ساخت کامپیوترهای کوانتومی که اساس کارشان مکانیک کوانتومی است را روشن کرد.

به طور کلی زمان لازم برای انجام یک محاسبه با افزایش پردازنده‌های موازی کاهش می‌یابد. در یک سیستم کلاسیکی برای اینکه این زمان را به طور نمایی کم کنیم، باید تعداد پردازنده‌ها را به طور نمایی زیاد کنیم. ولی در سیستم‌های کوانتومی، به دلیل برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی تعداد پردازنده‌های موازی به طور نمایی با اندازه‌ی سیستم زیاد می‌شود. بنابراین با افزایش اندازه سیستم به صورت خطی، تعداد عملیاتی که به صورت موازی انجام می‌شوند، به

¹ Gordon Moore

² R. P. Feynman

طور نمایی زیاد می‌شوند. در سال ۱۹۹۴ پیتز شور^۱ الگوریتمی برای تجزیه یک عدد مرکب به عامل‌های اولش ارائه داد که در آن زمان قابل اجرا شدن بود [۲].

تا اینجا دلیل ارجحیت کامپیوتر کوانتومی بر مشابه کلاسیکی برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی بود. پدیده مهم دیگری که مختص فیزیک کوانتومی است درهم‌تنیدگی است که هیچ مشابه کلاسیکی ندارد. در سال ۱۹۳۵ انیشتین^۲، پودولسکی^۳ و روزن^۴ برای اولین بار به بررسی حالت-های درهم‌تنیده پرداختند و سعی کردند با متغیرهای نهان، خواص این حالت‌ها را توجیه کنند [۳]. تا اینکه بل^۵ در سال ۱۹۶۰ نامساوی‌ای ارائه داد که بیان‌کننده محدوده اعتبار کلاسیکی بود [۴]، ولی نتایج حاصل از اندازه‌گیری روی زوج‌های درهم‌تنیده، نامساوی بل را نقض می‌کردند. به این ترتیب درهم‌تنیدگی به عنوان خاصیتی که یکی از وجوه تمایز بین فیزیک کلاسیک و کوانتوم است، تعبیر شد.

یکی از سیستم‌های فیزیکی که می‌تواند گزینه مناسبی برای تولید و کنترل درهم‌تنیدگی باشد سیستم اتم - فوتون است که در زمینه اپتیک کوانتومی و انتقال اطلاعات کوانتومی اهمیت ویژه‌ای دارد. از آنجا که درهم‌تنیدگی بین اتمها (به عنوان منبع اطلاعات کوانتومی) و فوتونها (به عنوان منتقل‌کننده اطلاعات در فواصل زیاد) اجازه می‌دهد که اطلاعات کوانتومی در فواصل زیاد توزیع شوند به دنبال تولید و کنترل درهم‌تنیدگی بین اتم و فوتون هستیم. در چنین سیستمی برهمکنش اتم و فوتون باعث ایجاد این درهم‌تنیدگی می‌شود.

برهمکنش یک اتم دوترازه با یک میدان اکترومغناطیسی یک مد ساده‌ترین مساله در برهمکنش میدان و ماده است. برهمکنش اتم دوترازه و میدان اکترومغناطیسی کوانتیده معمولاً توسط الگوی جینز-کامینگز^۶ توصیف می‌شود [۵و۶]. در این الگو علاوه بر تقریب دو قطبی الکتریکی از تقریب امواج چرخان^۷ نیز استفاده می‌شود. با توجه به اینکه معمولاً برهمکنش ماده و میدان در یک کاواک محتوی دی‌الکتریک انجام می‌شود [۷]، بایستی اثرات

¹ Schur

² Einstein

³ Podolsk

⁴ Rosen

⁵ Bell

⁶ Jaynes-Cummings

⁷ Rotating Wave Approximation

غیرخطی ناشی از حضور دی‌الکتریک را نیز در نظر گرفت و برای این منظور عامل غیر خطی کر^۱ به هامیلتونی افزوده می‌گردد. اثر کر را میتوان ناشی از تغییر نوسانگرهای هماهنگ (مدل کوانتومی میدان الکترومغناطیسی) به نوسانگرهای ناهماهنگ در چنین موادی دانست [۸].

مدل‌های مختلف برهمکنش اتم و میدان الکترومغناطیسی تاکنون بصورت مبسوطی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند: اتم دوترازه و میدان تک مد [۹]، اتم سه ترازه V شکل و میدان الکترومغناطیسی تک مد [۱۰]، اتم سه ترازه Λ شکل و میدان تک مد [۱۱] و اتم سه ترازه Λ شکل و میدان دو مد [۱۲].

هدف ما در این پایان‌نامه این است که یک اتم سه ترازه V شکل را در یک کاواک غیر خطی (که مدل کامل‌تری نسبت به مدل خطی است) که شامل یک میدان الکترومغناطیس دو مدی است در نظر می‌گیریم و رفتار زمانی در هم‌تنیدگی بین مجموعه فوتونها و اتمها را بدست آوریم. از آنجایی که حالت چنین سیستمی عبارت است از یک حالت فوتونی (مجموعه فوتونها^۲) و یک حالت اتمی و در نتیجه یک حالت خالص^۳ است، بنابراین سنجه^۴ آنتروپی برای میزان درهم‌تنیدگی سنجه مناسبی میباشد.

ساختار این پایان‌نامه به این صورت است که در فصل بعد (فصل دوم) مفهوم درهم‌تنیدگی و کاربردهایی از آن در مباحث مختلف اطلاعات کوانتومی ذکر میشود. در فصل سوم اختصاص دارد به بدست آوردن هامیلتونی سیستم با کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیس در یک محیط غیر خطی. فصل چهارم اختصاص دارد به آنتروپی فون نویمان^۵ سیستم که آنرا به عنوان سنجهای برای میزان درهم‌تنیدگی معرفی کرده ایم البته معیارهای متعددی برای کمی کردن درهم‌تنیدگی وجود دارند مانند آنتروپی فون نویمان، منفی بودن^۶، تجزیه اشمیت^۷ و توافق^۸ که از بین آنها دو مورد اول متداول‌تر می‌باشند و اولی برای آنسامبل‌های خالص و دومی برای آنسامبل‌های آمیخته مناسب هستند. فصلهای پنجم و ششم به نتایج عددی اختصاص دارد و در

¹ Kerr

² Union of Photons

³ Pure

⁴ Measure

⁵ Von Neumann Entropy

⁶ Negativity

⁷ Schmidt Decomposition

⁸ Concurrence

آنها رفتار زمانی درهم‌تنیدگی را به‌دست آوردیم با این تفاوت که در فصل پنجم حالت‌های اولیه متفاوت و تاثیر آنها بر روی رفتار زمانی درهم‌تنیدگی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در فصل ششم تاثیر توزیع‌های مختلف آماری که برای حالت اولیه فوتونی مورد استفاده قرار گرفته مطالعه می‌شود، و در نهایت فصل هفتم اختصاص دارد به نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی در جهت بهبود و ادامه این تحقیق.