بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

مطالعه ای بر توابع باور و برخی از کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر محمد حسین علامت ساز

پژوهشگر:

محیا لطفی

شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

خانم محیا لطفی

تحت عنوان

مطالعه ای بر توابع باور و برخی از کاربردهای آن

در تاریخ ۹۰/۶/۲۳ توسط هیأت داوران زیر با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه ی علمی استاد　　امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر افشین پرورده با مرتبه ی علمی استادیار　　امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر صفیه محمودی با مرتبه ی علمی استادیار　　امضاء

امضای مدیر گروه

چکیده

باورها از عدم اطمینان نتیجه می‌شوند. عدم اطمینان گاهی اوقات از یک فرایند تصادفی وگاهی به دلیل کمبود اطلاعات نتیجه می‌شود. در گذشته تنها راهکار در شرایط عدم اطمینان، نظریه احتمال بوده است. اما از چند دهه گذشته تا کنون، نظریه‌های گوناگون دیگری برای بررسی متغیرها و سیستم‌هایی که اطلاع نسبت به آنها کافی و دقیق نیست، ارائه شده اند. یکی از این راهکارها نظریه شواهد است. در سال‌های اخیر نظریه توابع باور یا نظریه دمپستر–شفر به عنوان تعمیمی از نظریه احتمال مورد توجه قرار گرفته است که امکان نمایش حالت‌های مختلفی از اطلاعات، یقین کامل تا عدم آگاهی کامل، را فراهم می‌کند. با توجه به نظریه، تابع باور یک روش برای استفاده احتمال ریاضی در قضاوت‌های ذهنی عرضه می‌کند. به طور کلی، تابع باور می‌تواند به عنوان یک تابع احتمال باشد که اصل‌های کلموگروف به جز اصل جمع پذیری را دارا است. تابع باور روی یک دامنه متناهی Ω به هر زیر مجموعه از آن اعددی در فاصله $[0,1]$ را اختصاص می‌دهد. یک مدل برای نمایش توابع باور مدل انتقال باور است. این مدل از نظر مفهومی مانند مدل بیز است. در این مدل باورها در دو سطح قرار دارند، یکی سطح باوری که باورها قبول می‌شوند توسط تابع باور اندازه گیری می‌شوند، و دیگری سطح شرط بندی که باورها می‌توانند برای تصمیم گیری استفاده شوند و توسط توابع احتمال اندازه گیری شوند. تفاوت این مدل با مدل بیزی در سطح باوری است. مدل بیزی این سطح را ندارد. قضیه بیز را می‌توان در چارچوب مدل انتقال باور تعمیم داد. قضیه بیز تعمیم یافته همان قضیه بیز کلاسیک است با این تفاوت که توابع باور جایگزین احتمالات می‌شوند. توسط قضیه بیز تعمیم یافته (GBT) می‌توان باورهای تحت یک فضای Θ را وقتی مشاهده $x \subseteq X$ در دسترس است را محاسبه کرد در صورتی که فقط باورهای تحت X برای هر $\theta_i \in \Theta$ معلوم است. همچنین توسط قانون ترکیب جدا سازنده می‌توان باور تحت فضای X را برای هر $\theta \in \Theta$ محاسبه کرد. مدل انتقال باور را می‌توان تعمیم داد به صورتی که چارچوب تشخیص آن (دامنه) به مجموعه ای از اعداد حقیقی گسترش یابد. در این صورت تمام جمع‌ها در تعاریف اولیه به انتگرال تبدیل می‌شوند. سپس می‌توان مفهوم ترتیب‌های باوری را روی توابع باور تعمیم یافته بیان کرد.

به طور کلی هدف این پایان نامه معرفی تابع باور و ارائه کاربردهای آن است. برای نیل به این هدف معرفی برخی تعاریف اولیه و اصطلاحات اولیه مورد نیاز است که به آن‌ها خواهیم پرداخت. همچنین به بحث پیرامون قانون جدا سازنده و نظریه بیز تعمیم یافته می‌پردازیم. در نهایت مفهوم انواع ترتیب بندی‌ها را روی توابع باور تعریف شده روی اعداد حقیقی بیان می‌کنیم. ترتیب‌های تصادفی در چارچوب مدل انتقال باور را ترتیب‌های باوری می نامند.

واژگان کلیدی: تابع باور، تابع موجه نمایی، قضیه بیز تعمیم یافته، قانون ترکیب جداسازنده، مدل انتقال باور، رابطه ترتیبی، ترتیب باوری

فهرست مطالب

عنوان صفحه

عنوان **صفحه**

فصل چهارم: توابع باور روی محور حقیقی

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه و تعاریف اولیه

۱-۱ معرفی موضوع و پیشینهٔ تحقیق

باورها شواهد[1] و مدارکی هستند که از یک حادثه طبیعی و یا آزمایش تصادفی بدست می آیند. باورها شامل عدم اطمینان[2] هستند. عدم اطمینان گاهی اوقات از یک فرایند تصادفی وگاهی به دلیل کمبود اطلاعات نتیجه می‌شود. در گذشته تنها راهکار در شرایط عدم اطمینان، نظریه احتمال بوده است. اما از چند دهه گذشته تا کنون، نظریه‌های گوناگون دیگری برای بررسی متغیرها و سیستم‌هایی که اطلاع نسبت به آنها کافی و دقیق نیست، ارائه شده‌اند. یکی از این راهکارها نظریه شواهد است. در نظریه شواهد۳، شواهد (مدارک) را در قالب توابع شواهدی بیان می کنیم. توابع گوناگونی به طور معمول در این نظریه استفاده می شوند، تابع جرم یا تخصیص باور پایه[4]، تابع باور[5]، تابع مشترکات[6] و تابع موجه‌نمایی[7] در ارتباط یک به یک با یکدیگرند و همگی اطلاعات یکسانی را شامل می شوند.

---

[1] - Evidence
[2] - Uncertainty
[3] - Evidence theory
[4] - Basic belief assignment
[5] - Belief function
[6] - Commonality function
[7] - Plausibility function

در سال‌های اخیر نظریه توابع باور یا نظریه دمپستر–شفر[1] به عنوان تعمیمی از نظریه احتمال مورد توجه قرار گرفته است که امکان نمایش حالت‌های مختلفی از اطلاعات، یقین کامل تا عدم آگاهی کامل[2]، را فراهم می‌کند.

به طور کلی در مسائل استنباط آماری وقتی مشاهده x را داشته باشیم، می‌توان توزیع پسین $p(\theta|x)$ (که توزیع شرطی پارامتر به شرط مشاهده است)را با استفاده از قضیه بیز بدست آورد:

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)f(x;\theta)}{\int p(\theta)f(x;\theta)d\theta}$$

که $p(\theta)$ تابع چگالی (توزیع پیشین) پارامتر است. در تئوری برای استفاده از این فرمول هیچ چیز اشتباهی وجود نداشت اما در عمل پیدا کردن احتمال پیشین $p(\theta)$ مشکل ساز می‌شد. برای غلبه بر این مشکل روش‌های گوناگونی در طی سال‌ها برای بدست آوردن احتمال پسین بدون استفاده از پیشین‌ها معرفی شد. به عنوان مثال فیشر[3](۱۹۷۱) روش بحث اعتماد[4] را بیان کرد. در این روش یک متغیر محوری U تعریف می‌شود که دارای توزیع یکنواخت $U(0,1)$ است، اگر $u = F(x,\theta)$ آنگاه برای هر مقدار x، $F(x,\theta)$ یکنواخت در u است. معادله بالا یک جواب منحصر بفرد $\theta = \theta(u,x)$ برای هر $u \in (0,1)$ دارد. اما این روش از نظر فهم ضعیف بود و اغلب منجر به ناسازگاری می‌شد. در ادامه دمپستر[5](۱۹۶۲) مفهوم احتمال‌های مستقیم[6] را ارائه کرد و سپس دمپستر (۱۹۶۷) احتمال‌های بالایی و پایینی[7] را تعریف کرد. احتمال‌های بالایی و پایینی به صورت دو اندازه ترتیبی و غیر جمع پذیر ارائه می‌شوند که بیانگر محدوده احتمال هستند. بعد از دمپستر، شفر[8] (۱۹۷۱) نظریه تابع باور را ارائه داد. شفر مجموعه کارهایش را در کتاب ریاضیات شواهدی[9] گردآوری کرد، که این کتاب هنوز کامل‌ترین مرجع در زمینه تابع باور می‌باشد. مجموعه این نتایج را، با هر دو تعبیر ممکن، نظریه دمپستر – شفر یا همان نظریه شواهد می‌نامند. در واقع تابع باور تعریف شده توسط شفر همان حد پایین احتمال دمپستر است اما توجه به این نکته حائز اهمیت است که نظریه شواهد، به لحاظ پایه‌های نظری، کاملاً مستقل از نظریه دمپستر است. تعبیر تابع باور به عنوان حد پایین احتمال چیزی نیست که از ساختار نظریه شواهد شفر نتیجه شود بلکه

---

[1] - Theoty Dempster-Shafer
[2] - Total ignorance
[3] - Fisher
[4] - Fiducial argument
[5] - Dempster
[6] - Direct probabilities
[7] - Upper and lower probabilities
[8] - Shafer
[9] - A Mathematical Theory of Evidence

همسویی نتایج با نظریه حدود پایینی و بالایی احتمال دمپستر ما را به این نتیجه می‌رساند. در واقع دو خواستگاه مختلف به نتایج یکسانی رسیده اند. یک تابع باور روی دامنه Ω بر پایه یک تخصیص باور پایه است که به هر زیر مجموعه از Ω عددی بین صفر و یک را اختصاص می‌دهد که آن را با Bel نشان می‌دهند.

با توجه به تعریف باور، نظریه تابع باور یک روش برای استفاده احتمال ریاضی در قضاوت‌های ذهنی عرضه می‌کند. به طور کلی، تابع باور می‌تواند به عنوان یک تابع احتمال باشد که اصل‌های کلموگروف به جز اصل جمع پذیری را دارا است. از این دیدگاه تابع باور تعمیمی از تابع احتمال معرفی می‌شود. اما در ساختار کلاسیک احتمال امکان نمایش مناسب عدم آگاهی را به دست نمی‌دهد، در صورتی که حداقل در بیان احتمال شخصی و ذهنی[1] اکثراً با نوعی عدم آگاهی و نایقینی مواجه هستیم. به علاوه احتمال یک اندازه جمع پذیر است، درحالیکه مطالعات تجربی چنین خاصیتی را در مورد احتمال شخصی و ذهنی نشان نمی‌دهد و بیشتر به نظر می‌آید احتمال ذهنی یک اندازه ترتیبی است.

در کتاب شفر تابع باور به عنوان وسیله‌ای برای قضاوت‌های ذهنی در نظر گرفته شده است اما بعد از آن تابع باور را به عنوان یکی از ابزارهای ساختن قضاوت‌های ذهنی با استفاده از احتمال بیان کردند. از دیگر ابزارها می‌توان احتمال بیزی، آزمون معناداری فیشر و فواصل اطمینان نیمن- پیرسن را نام برد. در سال‌های اخیر کارهای زیادی در توصیف و محاسبات توابع باور انجام گرفته است که در بسیاری از مجلات در رشته‌های گوناگون مانند آمار، روانشناسی، مهندسی، هوش مصنوعی و... به چاپ رسیده است.

تابع باور از روش‌های گوناگونی فرمول بندی شده است. این روش‌ها شامل نظریه شفر (۱۹۷۱)، نگاشت چند مقداری دمپستر (۱۹۶۷)، روابط سازگاری توسط شفر (۱۹۸۷) و لورنس[2](۱۹۸۸)، زیر مجموعه تصادفی توسط انجوین[3](۱۹۸۵) و اندازه‌های درونی روسپینی[4] (۱۹۸۷) است. قانون بیز در آمار نقش کلیدی دارد. اسمیتز[5] (۱۹۸۱و۱۹۸۸) قانون بیز تعمیم یافته را بیان کرد که در قانون بیز به جای احتمال تابع باور را جایگزین کرده است. یکی از کارهایی که روی تابع باور انجام گرفت مدل دادن به باورها بود. معتقدین به روش بیزی باورها را توسط احتمال خلاصه و اندازه گیری می‌کردند اما این مدل محدودیت‌های بسیاری داشت. مدل‌های دیگری مانند مدل اشاره، توسط کهلاس[6] و مانی[7] (۱۹۹۳) بیان شد. اما یکی از مدل‌هایی که از نظر مفهومی مانند مدل بیز می‌باشد با

[1] - Personal and subjective probablity
[2] - Lowrance
[3] - Nguyen
[4] - Ruspini
[5] - Smets
[6] - Kohlas
[7] - Monney

این تفاوت که روی تابع باور تعریف شده است، مدل انتقال باور[1] توسط اسمیتز (۱۹۹۴) می‌باشد. این مدل در مسائل تصمیم گیری و استدلال و استنباط در قالب نظریه شواهد کابردهای فراوانی دارد. تفاوت مدل‌های ذکر شده در شرطی کردن و به روز کردن یا اصلاح باورها می‌باشد. تابع باور را به روش‌های گوناگون تعمیم داده‌اند. یکی از تعمیم‌های تابع باور تعمیم اندازه‌های باور به اندازه‌های فازی بود که اولین بار توسط زاده[2](۱۹۷۹) این کار انجام گرفت. بعد از زاده محققهای زیادی در این زمینه کار کردند که از جمله می‌توان از اسمیتز(۱۹۸۱)، یاگر[3] (۱۹۸۲)، ین[4] (۱۹۹۰)، و لوکاس[5] و اعرابی (۱۹۹۹) نام برد. یکی دیگر از تعمیم‌های تابع باور تعمیم آن به مجموعه اعداد حقیقی بودکه حاصل تلاش‌های اسمیتز(۱۹۷۸)، استرات[6] (۱۹۸۴) و ریستک[7] و اسمیتز (۲۰۰۴) و اسمیتز (۲۰۰۵) می‌باشد و اخیراً دنوکس[8] (۲۰۰۹) تعمیم ترتیب‌های تصادفی به توابع باور روی خط حقیقی را بیان کرد.

در کل، تابع باور دربسیاری از علوم به کار برده شده است. لذا، در این پایان نامه بر آنیم تا نگاهی هر چند کوتاه و گذرا به مفهوم کلی تابع باور و کاربردهای آن در برخی زمینه‌ها داشته باشیم.

۱-۲ معرفی ساختار پایان‌نامه

همان گونه که قبلاً نیز اشاره شد در این پایان‌نامه هدف معرفی تابع باور و بیان کاربردهای آن می‌باشد. در فصل اول تعاریف و اصطلاحاتی که در قسمت‌های مختلف پایان‌نامه به کار رفته است توضیح داده می‌شوند. همچنین چند مثال کوتاه برای درک بهتر از تعاریف آورده شده است. در فصل دوم مدل انتقال باور معرفی می گردد. در فصل سوم به بررسی قانون ترکیب جدا سازنده و قضیه بیز تعمیم یافته خواهیم پرداخت و روش‌هایی برای بدست آوردن آن‌ها از توابع باور ارائه خواهد شد. در فصل چهارم تابع باور روی محور حقیقی را توضیح خواهیم داد و در فصل پنجم مفهوم ترتیب‌های تصادفی را روی توابع باور تعریف شده در اعداد حقیقی بیان خواهیم کرد.

حال چند قضیه و تعریف مقدماتی مورد نیاز در فصول آتی را یادآور می‌شویم که برای درک بهتر از چند مثال استفاده شده است.

[1] - Transferable Belief Model
[2] -Zadeh
[3]- Yager
[4] - Yen
[5] - Lucas
[6]- Strat
[7] - Ristic
[8] - Denoeux

۱–۳ مفاهیم اولیه:

تعریف ۱–۱ تخصیص باور پایه: Ω را یک مجموعه غیر تهی متناهی در نظر بگیرید که آن را چارچوب تشخیص[1] می‌نامند. تابع $m: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ را تابع جرم یا تخصیص باور پایه گویند اگر دارای شرایط زیر باشد:

$$m_1)\ m(\emptyset) = 0$$

$$m_2)\ \sum_{A\subseteq\Omega} m(A) = 1$$

که در آن 2^{Ω} به مفهوم تمام زیر مجموعه‌های ممکن Ω می‌باشد. کمیت $m(A)$ را جرم A می‌نامند.

$m(\mathrm{A})$ درجه‌ای از اطمینان است که به رخ دادن دقیقاً پیشامد A (و نه هیچ زیر مجموعه مشخص از آن) داده می‌شود.

تعریف ۱–۲ عضو کانونی[2]: هر مجموعه $A \subseteq \Omega$ که برای آن $m(A) > 0$ باشد، یک عضو کانونی m نامیده می‌شود.

اعضای کانونی، زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع (چارچوب تشخیص) هستند که اطلاعات و شواهد و گواه‌های موجود، بر آن‌ها تمرکز دارند. به ویژه هنگامی که مجموعه مرجع متناهی باشد، می‌توان تابع m را با فهرست اعضای کانونی و اندازه‌های آن‌ها مشخص کرد.

با توجه به تعریف تابع تخصیص پایه، می‌توان اظهار کرد که اولاً لزومی ندارد که $m(\Omega) = 1$ باشد، دوم آن که تابع تخصیص پایه یکنوا نیست یعنی لزومی ندارد که اگر $A \subseteq B$ باشد،آنگاه $m(\mathrm{A}) \leq m(\mathrm{B})$ شود، و سوم آن که رابطه ای خاص بین $m(\mathrm{A})$ و $m(\overline{\mathrm{A}})$ وجود ندارد.

تعریف ۱–۳ هسته: اجتماع همه عضوهای کانونی تخصیص باور پایه را هسته می‌نامند و با C نشان می‌دهند.

تعریف ۱–۴ تابع باور: تابع مجموعه‌ای $Bel: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ را تابع باور گویند اگر دارای شرایط زیر باشد:

$B1) Bel(\emptyset) = 0$

$B2) Bel(\Omega) = 1$

$B3) Bel(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1}\, Bel(\bigcap_{i\in I} A_i), \forall A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$

---

[1] - Frame of discernment

[2] - Focal element

مقدار $Bel(A)$ درجه باوری است که بر پایه اطلاعات و شواهد موجود، به رخ دادن پیشامد A می‌دهند. اصل $B3$ حالت ضعیف‌تری از اصل جمع پذیری احتمال است و لذا اندازه‌های احتمال حالت خاصی از اندازه‌های باور هستند.

قضیه ۱-۱ تبدیل موبیوس[1]: اگر m تخصیص باور پایه باشد، آنگاه برای هر A زیر مجموعه Ω رابطه $Bel(A) = \sum_{X\subseteq \mathrm{A}} m(X)$ یک تابع باور است و رابطه زیر نیز برقرار است:

$$m(A) = \sum_{X\subseteq A}(-1)^{|A-X|}\,Bel(X)$$

$|A-X|$ اندازه تعداد $A-X$ است.

اثبات: فرض کنید رابطه $Bel(A) = \sum_{X\subseteq \mathrm{A}} m(X)$ برقرار است.

$$\begin{aligned}\sum_{X\subseteq A}(-1)^{|A-X|}\,Bel(X) &= (-1)^{|A|}\sum_{X\subseteq A}(-1)^{|X|}\,Bel(X)\\ &= (-1)^{|A|}\sum_{X\subseteq A}(-1)^{|X|}\sum_{C\subseteq \mathrm{X}} m(C)\\ &= (-1)^{|A|}\sum_{C\subseteq \mathrm{A}} m(C)\sum_{X:C\subseteq \mathrm{X}\subseteq \mathrm{A}}(-1)^{|X|}\\ &= (-1)^{|A|}m(A)(-1)^{|A|} = m(A)\end{aligned}$$

حال فرض کنید رابطه $m(A) = \sum_{X\subseteq A}(-1)^{|A-X|}\,Bel(X)$ برقرار است.

$$\begin{aligned}\sum_{X\subseteq \mathrm{A}} m(X) &= \sum_{X\subseteq A}\sum_{C\subseteq X}(-1)^{|X-C|}\,Bel(C)\\ &= \sum_{C\subseteq A}(-1)^{|C|}Bel(C)\sum_{X:C\subseteq X\subseteq A}(-1)^{|X|}\\ &= (-1)^{|A|}Bel(A)(-1)^{|A|} = Bel(A)\end{aligned}$$

تذکر ۱-۱: ممکن است $m(\emptyset)$ صفر نباشد و مقدار مثبتی بگیرد. وقتی $m(\emptyset) = 0$ ($Bel(\Omega) = 1$) باشد، تابع باور را یک تابع باور نرمال سازی شده می‌نامند و در غیر این صورت نرمال سازی نشده گویند و تابع باور را با $b(A) = Bel(A) + m(\emptyset)$ نشان می‌دهند.

---

[1] - Mobius transformation

تعریف ۱–۵ تابع موجه‌نمایی: تابع مجموعه‌ای $Pl: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ را تابع موجه‌نمایی گویند اگر رابطه‌های زیر برقرار باشند:

1) $Pl(\emptyset) = 0$

2) $Pl(\Omega) = 1$

3) $Pl(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leq \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Pl(\bigcup_{i \in I} A_i), \forall \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_1 \subset \Omega$

تابع موجه‌نمایی را می توان بر حسب تخصیص باور پایه به صورت زیر نوشت:

$$Pl(A) = \sum_{X \cap \mathrm{A} \neq \emptyset} m(X)$$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$Pl(A) = 1 - Bel(\overline{A})$$

زیرا

$$Bel(\bar{A}) = \sum_{X \subseteq \bar{\mathrm{A}}} m(X) = \sum_{X \cap \mathrm{A} = \emptyset} m(X) = 1 - \sum_{X \cap \mathrm{A} \neq \emptyset} m(X) = 1 - Pl(A)$$

بنابراین تابع باور و موجه‌نمایی دوگان یکدیگرند.

$Pl(A)$ درجه اطمینانی است که برای رخ دادن دقیقاً پیشامد A و یا هر پیشامد دیگری که با A اشتراکی دارد، قائل می‌شوند.

با توجه به تعریف تابع باور و تابع موجه نمایی می توان نتیجه گرفت که

$$Pl(A) \geq Bel(A)$$

و با استفاده از رابطه بالا می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$Pl(A) + Pl(\bar{A}) \geq 1$$

$$Bel(A) + Bel(\bar{A}) \leq 1$$

برای یک زیر مجموعه A اطلاعات شامل شده در توابع شواهدی را توسط یک فاصله باور نمایش می‌دهند یعنی

$$[Bel(A), Pl(A)]$$

طول بازه یعنی $Pl(A) - Bel(A)$ میزان عدم نا آگاهی در مورد مجموعه A است.

تعریف ۱–۶ تابع مشترکات: یک تابع $q: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ تابع مشترکات است اگر یک تخصیص باور پایه وجود داشته باشد آنگاه $q(A) = \sum_{X \supseteq A} m(X)$.

به آسانی می‌توان نشان داد:

$$q(\emptyset) = 1$$

$$q(\Omega) = m(\Omega)$$

قضیه ۱–۲: رابطه تابع باور و تابع مشترکات به صورت روابط زیر می‌باشد:

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq \overline{A}} (-1)^{|X|}\, q(X) \qquad \forall \;\; A \subseteq \Omega$$

$$q(A) = \sum_{X \subseteq A} (-1)^{|X|}\, Bel(\bar{X}) \qquad \forall \;\; A \subseteq \Omega$$

قضیه ۱–۳: رابطه تابع موجه‌نمایی و تابع مشترکات را به صورت روابط زیر می‌باشد:

$$q(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|+1}\, Pl(B) \qquad \forall \;\; A \subseteq \Omega$$

$$Pl(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} q(B) \qquad \forall \;\; A \subseteq \Omega$$

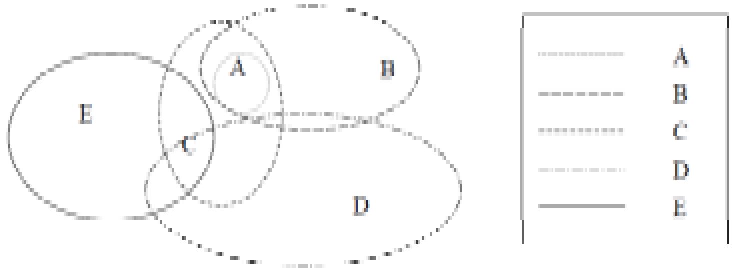
همانطور که قبلاً گفته شد باورها شواهد و مدارکی هستند که از یک حادثه طبیعی و یا آزمایش تصادفی بدست می‌آیند. شواهد توسط یک عامل (انسان، کامپیوتر و رباط و ...) بیان می‌شوند. گاهی این شواهد در تناقض یکدیگر و گاهی مکمل هم هستند. هر چه شواهد و مدارک بیشتر باشد، اطلاعات بیشتر و دقیق‌تر می شوند. تابع باور هر کدام از این شواهد را به عنوان یک مجموعه در نظر می‌گیرد. تابع باور باورهای جمع شده توسط شواهد را نشان می‌دهد.

در تئوری احتمال کلاسیک، شواهد فقط با یکی از پیشامدهای ممکن مرتبط هستند، ولی در تئوری توابع باور شواهد می تواند با ترکیبی از پیشامدهای ممکن یا به عبارتی مجموعه‌ای از پیشامدها مرتبط باشند.

انواع شواهد را در تعاریف بعدی ذکر می‌شود تا بتوان انواع تابع باور را تعریف کرد.

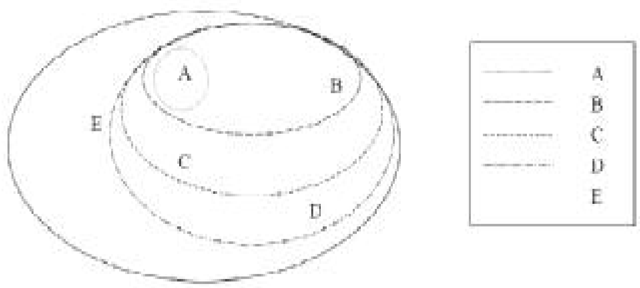
تعریف ۱–۷ شواهد اختیاری[1]: شواهد اختیاری مربوط به حالتی می‌شود که همه مجموعه‌ها هیچ عضو مشترکی ندارند اگر چه بعضی زیر مجموعه‌ها ممکن است عضوهای مشترک داشته باشند. شکل ۱–۱ یک نمونه از این شواهد نشان داده شده است.

[1] -Arbitrary evidence



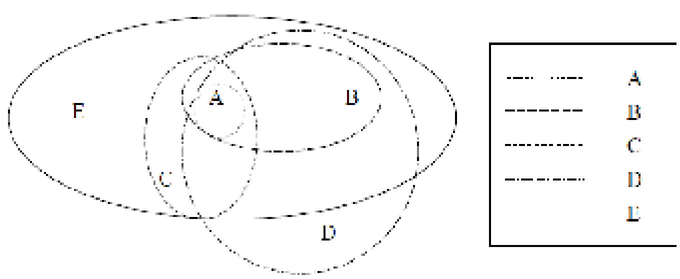
شکل۱-۱ نمایشی از شواهد اختیاری

تعریف ۱-۸ شواهد هماهنگ (آشیانی)[1]: شواهد هماهنگ را به عنوان زیر مجموعه‌هایی که ساختار تو در تو دارند می‌توان نشان داد به طوری که عضوهای کوچک‌ترین مجموعه در مجموعه بزرگ تر شامل شده و ... این حالت مربوط به زمانی می‌شود که اطلاعات در هر بار به طور محدودی افزایش می‌یابد.



شکل ۱-۲ نمایشی از شواهد آشیانی

تعریف ۱-۹ شواهد سازگار[2]: شواهد سازگار نوعی از شواهد هستند که حداقل یک عضو مشترک در همه زیرمجموعه‌ها وجود دارد.



شکل ۱-۳ نمایشی از شواهد سازگار

[1] - Consonant evidence
[2] - Consistent evidence