بسم الله الرحمن الرحیم

درجه‌جابجایی و n - پوچ‌توانی گروه‌های متناهی

استاد راهنما

جناب آقای دکتر حسین اقدامی

استاد مشاور

جناب آقای دکتر کاظم چیتی

نگارنده

گلناز حریری

بهار ۱۳۸۸

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی.

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

این مجموعه را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می‌کنم.

سپاسگزاری و تقدیر

با نام ویاد حضرت دوست، که هر چه داریم و هست از اوست. حمد و سپاس و ستایش از آن خدایی است که بشر را با قلم تعلیم داد و به ما نعمت شناخت و علم عطا فرمود.

بر خود لازم می‌دانم مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای دلسوز و مهربانم جناب آقای دکتر حسین اقدامی ابراز نمایم. امیدوارم که بتوانم صبر و جدیت ایشان در کارها را سرلوحه کار خود قرار دهم.

همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر کاظم چیتی که همواره دارای برخوردی گرم و صمیمی بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از اساتید مدعو داخلی جناب آقای دکتر نصرآبادی و جناب آقای دکتر حسینی کمال تشکر را دارم.

در خاتمه از جناب آقای دکتر فضائلی و همچنین تمامی دوستان و عزیزانی که در مراحل مختلف این حقیر را یاری نموده‌اند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا سعی داریم مفهوم ضعیفتری از یکریختی به نام ایزوکلینیسم و n ـ ایزوکلینیسم بین گروه‌هارا معرفی نموده و بعضی خواص مربوط به آن‌ها را مطرح کنیم. در ادامه درجه جابجایی و درجه‌ی ضریب جابجایی گروه‌های متناهی را تعریف می‌کنیم و قضایای اثبات شده توسط گاستافسون و لسکات را بیان می‌کنیم. در پایان درجه n ـ پوچ‌توانی گروه‌های متناهی و n ـ ایزوکلینیسم را معرفی خواهیم نمود.

فهرست مندرجات

تاریخچه و مقدمه

در سال ۱۹۳۹ مفهوم ضعیفتری از یکریختی به نام ایزوکلینیسم بین گروه‌ها توسط فیلیپ هال مطرح شد که یک رابطه هم ارزی بین گروه‌ها تشکیل می‌دهد. به عنوان مثال آنطور که از تعریف این مفهوم بر می‌آید همه گروه‌های آبلی در یک رده قرار می‌گیرند و همه آن‌ها با گروه بدیهی هم‌ارز می‌شوند.

بعد از بیان تعاریف و گزاره‌های مقدماتی در فصل اول، در فصل بعدی سعی داریم با استفاده از مفهوم ایزوکلینیک بین گروه‌ها، قضایای مطرح شده توسط لسکات را اثبات کنیم و در ادامه تعمیمی از مفهوم ایزوکلینیسم گروه‌ها به نام n ـ ایزوکلینیسم را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که دو گروه یکریخت یا ایزوکلینیسم، n ـ ایزوکلینیسم‌اند.

گالاقر در سال ۱۹۷۰ درجه جابجایی گروه متناهی G را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$d(G) = \frac{۱}{|G|^۲}|\{(x,y) \in G \times G | xy = yx\}|$$

همچنین ثابت کرد که اگر G یک گروه متناهی با زیر گروه نرمال N باشد، آنگاه

$$d(G) \leq d(N)d(\frac{G}{N})$$

که در ادامه این نتیجه را برای رده‌ای از گروه‌هامانند G که مرکزساز همه‌ی عناصر آن نرمال در G باشد، موسوم به CN ـ گروه‌ها، تعمیم می‌دهیم. در فصل سوم برخی نتایج و قضایا که توسط لسکات و گالاقر مطرح شده است را بیان می‌کنیم و یک کران بالا برای $d(G)$ معرفی

خواهیم نمود. به‌ویژه نشان خواهیم داد که خاصیت ایزوکلینیک بین گروه‌ها درجه‌ی جابجایی را حفظ می‌کند.

در سال ۱۹۷۳ گالاقر درجه‌ی ضریب جابجایی را مطرح نمود و نتایج دیگری را به مطالب لسکات افزود. در بخش دوم این فصل نشان می‌دهیم که اگر G و H دو گروه ایزوکلینیک باشند، آنگاه درجه ضریب جابجایی یکسانی خواهند داشت.

در فصل چهارم درجه‌ی n ـ پوچ‌توانی گروه‌های متناهی و گروه‌های ایزوکلینیک را برای $n \geq ۱$ معرفی می‌کنیم و به بیان نتایجی که توسط لسکات در سال ۱۹۹۵ مطرح شده خواهیم پرداخت و در پایان تحت شرایطی خاص کران بالای دقیقتری برای درجه جابجایی گروه G یعنی $d(G)$ معرفی خواهیم نمود.

فصل ۱

تعاریف و نتایج مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف و نتایج مقدماتی خواهیم پرداخت که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشد.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید G گروه دلخواهی باشد و $x, g \in G$. در این صورت **مزدوج** [۱] x توسط g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x^g = g^{-1}xg.$$

حال اگر S زیر مجموعه‌ای ناتهی از G باشد، آنگاه $\langle S\rangle^G$ را **بستار نرمال** [۲] S در G نامند، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle S\rangle^G = \langle x^g;\ x \in S,\ g \in G\rangle,$$

که زیر گروه تولید شده توسط تمام مزدوج‌های عناصر S در G می‌باشد.

تبصره. اگر G گروهی دلخواه و $x \in G$، آنگاه **رده تزویجی** [۳] x در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_x = \{x^g;\ g \in G\}.$$

به سادگی نتیجه می‌شود(به قضیه ۶.۱.۴ از [?] مراجعه شود) که اگر G متناهی باشد، آنگاه به ازای هر $x \in G$

$$|C_x| = [G : C_G(x)].$$

بنابراین اگر G متناهی باشد، آنگاه تعداد رده‌های تزویجی جدا از هم G مرتبه G را عاد می‌کند.

---

[۱] Conjugate

[۲] Normal closure

[۳] Conjugacy class

هم‌چنین اگر H و G دو گروه باشند،آنگاه به ازای هر $(x,y),(a,b)\in G\times H$

$$(x,y)^{(a,b)}=(x^a,y^b).$$

بنابراین به سادگی نتیجه می‌شود که در حالت متناهی تعداد رده‌های تزویجی $G\times H$ برابر است با حاصلضرب تعداد رده‌های تزویجی G در تعداد رده‌های تزویجی H.

۲.۱.۱ قضیه. فرض کنید G گروهی متناهی باشد در این صورت

$$|G|=|Z(G)|+\sum_{x\notin Z(G)}[G:C_G(x)]$$

که **معادله رده‌ای (تزویجی)** [۴] نامیده می‌شود.

اثبات. به [?] صفحه‌ی ۱۹۲ (نتیجه‌ی ۷.۱.۴) مراجعه شود.□

۳.۱.۱ تعریف. اگر G گروهی دلخواه باشد، آنگاه کوچکترین عدد طبیعی e که به ازای هر $x\in G$، $x^e=1$ را در صورت وجود، **نمای** G[۵] نامیم.

در ضمن درصورتی‌که چنین عددی وجود نداشته باشد می‌گوئیم G نمای نامتناهی دارد.

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنید p عددی اول باشد. گروه G را یک p ـ گروه نامند، اگر مرتبه هر عنصر G توانی از p باشد.

۵.۱.۱ قضیه. فرض کنید G گروهی نابدیهی باشد. در این صورت G یک p ـ گروه متناهی است اگر و تنها اگر به ازای عدد صحیح مثبت مانند k، $|G|=p^k$.

اثبات. به [?] صفحه‌ی ۱۹۸ (قضیه‌ی ۷.۲.۶) مراجعه کنید.□

۶.۱.۱ تعریف . فرض کنید G یک گروه باشد و $x,y\in G$. در این صورت **جابجاگر**[۶] y,x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

---

[۴] Class equation(conjugacy)

[۵] Exponent of G

[۶] Commutator

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy.$$

به‌طور کلی یک جابجاگر ساده از وزن n[۷] $(n>2)$ برای عناصر G به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[x_1,x_2,...,x_n]=[[x_1,x_2,...,x_{n-1}],x_n].$$

لم‌های زیر روابطی بین جابجاگرها را نتیجه می‌دهند، که در محاسبات با جابجاگرها بسیار مفید هستند و اثبات آنها با استفاده از تعریف جابجاگر به‌آسانی انجام می‌شود.

۷.۱.۱ لم. اگر G گروهی دلخواه باشد و $x,y,z\in G$، آنگاه اتحادهای زیر همواره برقرارند:

۱) $[x,y]=[y,x]^{-1}$؛

۲) $[x^{-1},y]=[y,x]^{x^{-1}}$؛

۳) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]=[x,z][x,z,y][y,z]$؛

۴) $[x,yz]=[x,z][x,y]^z=[x,z][x,y][x,y,z]$.

همچنین از اتحادهای فوق روابط زیر نیز حاصل می‌شوند

۵) $[x,z,y]=[x,z]^{-1}[xy,z][y,z]^{-1}=[z,x][xy,z][z,y]$؛

٦) $[x,y,z]=[x,y]^{-1}[x,z]^{-1}[x,yz]=[y,x][z,x][x,yz]$؛

۷) $[x,z]^y=[xy,z][y,z]^{-1}=[xy,z][z,y]$؛

۸) $[x,y]^z=[x,z]^{-1}[x,yz]=[z,x][x,yz]$.

اثبات. به [?] صفحه ۱۱۹ مراجعه کنید.□

۸.۱.۱ تعریف. اگر $X_1,X_2,...,X_n$ زیر گروه‌های G باشند، آنگاه جابجاگر X_1,X_2 به‌صورت

[۷] Simple commutator of weight n

زیر تعریف می‌شود

$$[X_۱, X_۲] = \langle [x_۱, x_۲];\ x_۱ \in X_۱,\ x_۲ \in X_۲ \rangle$$

و در حالت کلی به ازای $n > ۲$

$$[X_۱, X_۲, ..., X_n] = [[X_۱, X_۲, ..., X_{n-۱}], X_n]$$

از طرفی با استفاده از لم قبل قسمت (۱) همواره داریم

$$[X_۱, X_۲] = [X_۲, X_۱].$$

در حالت خاص اگر $X_۱ = X_۲ = G$، آنگاه زیرگروه جابجاگر $[X_۱, X_۲] = [G, G]$ را با G' نشان می‌دهیم و به آن **زیر گروه جابجاگر**[۸] یا **زیر گروه مشتق**[۹] G گوییم. بنابراین

$$G' = [G, G] = \langle [g_۱, g_۲];\ g_۱, g_۲ \in G \rangle.$$

۹.۱.۱ لم . اگر G گروهی دلخواه و H ، K و L زیر گروه‌های نرمال G باشند، آنگاه

۱) $[H, K] \trianglelefteq G$؛

۲) $[HK, L] = [H, L][K, L]$ و $[H, KL] = [H, K][H, L]$.

اثبات. به [?] صفحه‌ی ۱۸ مراجعه شود.□

۱۰.۱.۱ لم (لم سه زیر گروه). فرض کنید X ، Y و Z زیر گروه‌های G باشند و $N \trianglelefteq G$. دراین‌صورت هرگاه دو تا از زیر گروه‌های جابجاگر $[Z, X, Y]$ ، $[Y, Z, X]$ و $[X, Y, Z]$ مشمول در N باشند، آنگاه زیر گروه جابجاگر سوم نیز مشمول در N خواهد بود. به‌طور مثال

[۸] Commutator subgroup

[۹] Derived subgroup

اگر $[Y,Z,X]$ و $[Z,X,Y]$ مشمول در N باشند، آنگاه $[X,Y,Z]$ نیز مشمول در N است. بخصوص اگر X,Y,Z در G نرمال باشند، آنگاه

$$[X,Y,Z] \subseteq [Y,Z,X][Z,X,Y]$$

اثبات. به [?] صفحه ۱۲۲ مراجعه کنید.□

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. دراین‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\gamma_1(G) = G \quad , \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \qquad \forall i \geq 1$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq ... \supseteq \gamma_i(G) \supseteq ...$$

که آن را **سری مرکزی پایینی** [۱۰] G نامیم. به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $i \geq 1$، $\gamma_i(G)$ تحت هر درونریختی G پایا است. لذا $\gamma_i(G)$ **زیر گروه ناوردای کامل** [۱۱] G است. همچنین

$$\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) \subseteq Z(G/\gamma_{i+1}(G)) \qquad \forall i \geq 1$$

۱۲.۱.۱ تعریف. فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. دراین‌صورت برای هر $i \geq 1$ تعریف می‌کنیم

$$Z_0(G) = 1 \quad , \quad Z_1(G) = Z(G) \quad , \quad Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G)).$$

به سادگی دیده می‌شود که

$$1 = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq ... \subseteq Z_i(G) \subseteq ...$$

[۱۰] Lower central series

[۱۱] Fully invariant subgroup

که آن‌را **سری مرکزی بالایی**[۱۲] G می‌نامند. به آسانی تحقیق می‌شود که به ازای هر i ، $Z_i(G)$ تحت هر خودریختی G پایا است. بنابراین $Z_i(G)$ **زیر گروه مشخصه**[۱۳] G است.

۱۳.۱.۱ لم. فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. دراین صورت به ازای هر $i \geq ۱$ و هر $g_۱, g_۲, ..., g_i \in G$ داریم $[z, g_۱, g_۲, ..., g_i] = ۱$ اگر و فقط اگر $z \in Z_i(G)$.

اثبات. به سادگی و به روش استقرا روی i اثبات می‌شود.□

۱۴.۱.۱ لم. فرض کنید G, H دو گروه باشند و $N \trianglelefteq G$. دراین‌صورت به ازای هر عدد صحیح n،

۱) $[\gamma_n(G), Z_n(G)] = ۱$؛

۲) $\gamma_n(G/N) = \gamma_n(G)N/N$؛

۳) $\gamma_n(G \times H) = \gamma_n(G) \times \gamma_n(H)$؛

۴) $Z_n(G/N) \geq Z_n(G)N/N$؛

۵) $Z_n(G \times H) = Z_n(G) \times Z_n(H)$؛

٦) اگر $H, K \trianglelefteq G$ و $K \subseteq H$، آنگاه

$$H/K \subseteq Z(G/K) \Longleftrightarrow [H, G] \subseteq K.$$

اثبات. برای اثبات قسمت‌های (۱) تا (۵) کافی است از روش عضوگیری و خواص جملات سری‌های مرکزی بالایی و پایینی استفاده کنیم. برای اثبات قسمت (٦) به [?] قضیه ٦.۲.۸ مراجعه شود.□

۱۵.۱.۱ تعریف. گروه G را **پوچ‌توان**[۱۴] گوییم، هرگاه دارای یک سری موسوم به **سری**

[۱۲] Upper central series

[۱۳] Characteristic subgroup

[۱۴] Nilpotent

مرکزی[15] به صورت $1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$ باشد، که در آن به ازای هر $0 \leq i < n$ داشته باشیم

۱) $G_i \trianglelefteq G$؛

۲) $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$.

طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را **رده پوچ‌توانی**[16] G می‌نامند.

۱۶.۱.۱ مثال.

۱) هر گروه بدیهی، پوچ‌توان از رده صفر است.

۲) هر گروه آبلی نابدیهی، پوچ‌توان از رده ۱ است.

۳) هر p ـ گروه متناهی، پوچ‌توان است.

تبصره.

اگر G گروهی پوچ‌توان از رده حداکثر n باشد، آنگاه می‌توان ثابت کرد (به [?] قضایای ۷.۲.۸ و ۸.۲.۸ مراجعه شود) که $Z_n(G) = G$ یا به‌طور معادل $\gamma_{n+1}(G) = 1$. از اینرو در گروه‌های پوچ‌توان طول سری‌های مرکزی بالایی و پایینی یکسان می‌باشد.

۱۷.۱.۱ قضیه.

۱) هر زیر گروه و هر تصویر همریخت یک گروه پوچ‌توان، پوچ‌توان است.

۲) حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروه‌های پوچ‌توان، گروهی پوچ‌توان است.

اثبات. به [?] صفحه‌ی ۲۴۲ (قضایای ۸.۲.۹ و ۸.۲.۱۱) مراجعه کنید.□

تبصره.

اگر G گروهی پوچ‌توان باشد، آنگاه می‌توان ثابت کرد که (به [?] قضیه ۱۳.۲.۸ مراجعه شود) هر زیرگروه سیلوی G، یک زیر گروه نرمال G است.

---

[15] Central series

[16] Nilpotency class

۱۸.۱.۱ قضیه (قانون ددکیند).[17] اگر L, K, H زیر گروه‌های G باشند به‌طوری‌که $K \leq L$، آنگاه

$$HK \cap L = (H \cap L)K.$$

اثبات. به [?] (صفحه ۱۵) مراجعه شود. □

۱۹.۱.۱ تعریف. گروه آبلی G یک **گروه‌آبلی مقدماتی**[18] نامیده می‌شود، هرگاه هر عنصر G از مرتبه عدد اول p باشد.

۲۰.۱.۱ تعریف . گروه G را یک **گروه ددکیند**[19] نامند، هرگاه همه زیر گروه‌های G در آن نرمال باشند.

یک گروه ددکیند ناآبلی **گروه هامیلتونی**[20] نامیده می‌شود.

به‌طور مثال گروه چهارگان‌ها از مرتبه ۸، Q_8 یک گروه هامیلتونی است، زیرا Q_8 ناآبلی است، از طرف دیگر مثلاً $Q_8 = \langle a, b \rangle$ که در آن $o(a) = 4, a^2 = b^2, ba = a^3 b$.

بنابراین

$$Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2 b, a^3 b\}$$

در Q_8، $o(a) = 4, o(a^2) = 2, o(a^3) = 4, o(b) = 4$.

از طرفی $(ab)^2 = abab = aa^3 bb = b^2 = a^2$.

بنابراین $o(ab) = 4$. همچنین

$$(a^2 b)^2 = a^2 ba^2 b = a^2 (a^3 b) ab = a^5 bab = abab$$

---

[17] Dedekind low

[18] Elementary abelian group

[19] Dedekind group

[20] Hamiltonian group

و

$$(a^3b)^2 = a^3ba^3b = a^3(a^3b)a^2b = a^2ba^2b = (a^2b)^2.$$

از این‌رو $o(a^2b) = 4$ و $o(a^3b) = 4$.

از اینرو زیرگروه‌های Q_8 برابر است با

$$H_0 = \{e\}, H_1 = \{e, a^2\}, H_2 = \{e, a, a^2, a^3\}, H_3 = \{e, ab, a^2, a^3b\}, H_4 = \{e, b, a^2, a^2b\}$$

و چون $|Q_8 : H_2| = |Q_8 : H_3| = |Q_8 : H_4| = 2$، لذا H_2 و H_3 و H_4 زیر گروه‌های نرمال هستند.

حال $ba^2b^{-1} = baab^{-1} = a^2bab^{-1} = a^3bab^{-1} = a^3a^3bb^{-1} = a^2 \in H_1$. چون $Q_8 = \langle a, b \rangle$، H_1 نیز زیرگروه نرمال Q_8 است. بنابراین تمام زیرگروه‌های Q_8 نرمال‌اند.

۲۱.۱.۱ تعریف . فرض کنیم F یک گروه، X مجموعه غیر تهی و $\sigma : X \longrightarrow F$ نگاشتی یک‌به‌یک باشد. دراین‌صورت گروه F را روی X **آزاد**[21] گوئیم هر گاه به ازای هر گروه دلخواه G و هر نگاشت $\alpha : X \longrightarrow G$، همریختی منحصر بفرد $\beta : F \longrightarrow G$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\beta\sigma = \alpha$. به‌عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & F \\ & \alpha\searrow & \downarrow \exists!\beta \\ & & G \end{array}$$

گروهی را که بر روی یک مجموعه آزاد باشد، **گروه آزاد** [22]نامیم. تعداد عناصر X را رتبه‌ی[23] F نامیم و با $rankF$ نشان می‌دهیم، یعنی $rankF = cardX$. در صورتی‌که X مجموعه‌ای شمارش‌پذیر باشد، F را **گروه آزاد با رتبه‌ی شمارش‌پذیر**[24] نامیم و با F_∞ نشان

[21] Free

[22] Free group

[23] Rank

[24] Free group of countable rank

می‌دهیم.

باید متذکر شویم که زیر گروه هر گروه آزاد، گروهی آزاد است (برای اثبات به [?] قضیه ۶.۱.۱ مراجعه شود).

۲۲.۱.۱ قضیه. هر گروه دلخواه G تصویر همریخت یک گروه آزاد است.

اثبات. به قضیه ۲.۱.۱ از [?] مراجعه شود.□

۲۳.۱.۱ تعریف. فرض کنید G یک p ـ گروه باشد. اگر $G' = Z(G)$ و $Z(G)$ از مرتبه عدد اول p باشد، آنگاه G را یک p ـ **گروه فوق ویژه**[۲۵] نامند.

۲۴.۱.۱ قضیه. هر p ـ گروه غیر آبلی از مرتبه $p^۳$ یک p ـ گروه فوق ویژه است.

اثبات. فرض کنید $|G| = p^۳$ و G غیر آبلی باشد. چون $Z(G) \neq ۱$ و $Z(G) \neq G$، لذا داریم $p^۲$ یا $|Z(G)| = p$.

اگر $|Z(G)| = p^۲$، آنگاه $\frac{G}{Z(G)}$ دوری است. بنابراین G آبلی است که این تناقض است. بنابراین $|Z(G)| = p$ و $|\frac{G}{Z(G)}| = p^۲$. در نتیجه $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است یعنی $G' \leq Z(G)$ و با توجه به این‌که $|G'| \neq ۱$ و $|Z(G)| = p$ بنابراین $G' = Z(G)$ و حکم برقرار است.□

به عنوان مثال ۲ ـ گروه‌های فوق ویژه از مرتبه ۸ عبارتند از $D_۸$ و $Q_۸$.

۲۵.۱.۱ تعریف. فرض کنید G گروهی متناهی، F یک میدان و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. در این صورت یک **نمایش** G[۲۶] روی میدان F عبارت است از همریختی

$$T : G \longrightarrow GL(V, F)$$

که $GL(V, F)$ مجموعه‌ی کلیه تبدیلات خطی وارون‌پذیر V است. در این حالت T را یک

[۲۵] Extraspecial p-group

[۲۶] Representation of G

نمایش G روی F یا **نمایش تأمین شده توسط V**[27] گوییم.

V را **فضای نمایش**[28] و بعد آن را **درجه‌ی نمایش**[29] می‌نامیم و با $degT$ نشان می‌دهیم. هر نمایش از درجه‌ی یک گروهی متناهی را یک **نمایش خطی**[30] گویند.

در حالتی که $dimV = n$، قرار می‌دهیم $GL(V,F) = GL_n(F)$. در این حالت یک تناظر یک‌به‌یک بین عناصر $GL(V,F)$ و ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ روی F وجود دارد و بنابراین گاهی از نمایش ماتریسی تبدیلات خطی استفاده می‌کنیم.

۲۶.۱.۱ مثال. فرض کنید $G =< x >$ گروهی دوری از مرتبه ۳ باشد. تابع $T : G \longrightarrow GL_۳(F)$ که F میدان دلخواه است را چنین تعریف می‌کنیم

$$T(x) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

و آن‌را با حفظ همریختی به تمام G توسعه می‌دهیم. یعنی

$$T(x^۲) = (T(x))^۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$T(x^۳) = (T(x))^۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = I_۳$$

چون $x^۳ = ۱$ و $T(x^۳) = I_۳$، نتیجه می‌گیریم که T یک نمایش گروه G است. به این ترتیب T یک نمایش درجه‌ی ۳ برای G است.

۲۷.۱.۱ تعریف. فرض کنید $T : G \longrightarrow GL(V,F)$ نمایشی برای گروه متناهی G باشد.

---

[27] Representation afford by V

[28] Representation space

[29] Degree of representation

[30] Linear representation