دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

عنوان

احاطه‌گری دلپذیر در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

دانشجو

رقیه قزل سفلی

دی ۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب **رقیه قزل‌سفلی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احاطه‌گری دلپذیر در گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه قزل‌سفلی

دی ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر نامیم، هرگاه D دارای همسایه‌های یکسان در D باشند. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر درگراف G را عدد احاطه‌گری دلپذیر G نامیده و آن را با $fd\left(G\right)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر از اندازه $fd\left(G\right)$ را به اختصار با $fd\left(G\right)$–مجموعه نشان می‌دهیم. در فصل اول این پایان‌نامه مفاهیم و مقدمات نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیازمندیم را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم مفهوم احاطه‌گری دلپذیر درگراف‌ها را بیان کرده و به مسائل مربوط به آن می‌پردازیم. در فصل سوم هدف ما اثبات تساوی بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر می‌باشد. بدین منظور تعدادی عملگر را تعریف نموده و با توجه به آن‌ها در صدد اثبات قضیه هستیم. در فصل چهارم تساوی قدرتمند بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج حاصله در فصل‌های سوم و چهارم برای اولین بار در این پایان‌نامه انجام شده است.

کلمات کلیدی: احاطه‌گری، احاطه‌گری دلپذیر.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. بررسی تساوی بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر در درخت‌ها

۲. بررسی تساوی قدرتمند بین عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری دلپذیر در درخت‌ها

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل به تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه گراف و هم‌چنین قضایایی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم، می‌پردازیم. تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از مراجع [۲] و [۱۱] می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ است که $V(G)$ مجموعه راس‌ها، $E(G)$ مجموعه یال‌ها و Ψ_G تابع وقوع است، که به هر یال G یک زوج نامرتب (نه لزوما مجزا) را نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v راس‌هایی باشند به قسمی که $\Psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند و راس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

معمولا گراف $G = (V(G), E(G), \Psi_G)$ را به‌طور خلاصه با $(V(G), E(G))$ یا $G = (V, E)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. مرتبه گراف G تعداد رئوس گراف G می‌باشد و با $n(G)$ یا n نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. یک گشت به طول k، یک دنباله متناوب $v_۰, e_۱, v_۱, e_۲, \ldots, e_k, v_k$ از راس‌ها و یال‌هاست، به‌طوریکه به ازای هر $i = ۱, \ldots, k$، $e_i = v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد.

تعریف ۴.۱.۱. یک مسیر، گشتی است که هیچ راس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به‌صورت فهرست مرتبی از راس‌های متمایز $v_۰, v_۱, \ldots, v_n$ در نظر می‌گیریم، به‌طوریکه به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد. یک مسیر n راسی را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. یک دور، مسیری به طول حداقل یک است که در آن راس ابتدایی و راس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ راس تکراری دیگری نداریم. یک دور n راسی را با C_n نشان می‌دهیم.

طوقه دوری به طول یک است.

تعریف ۶.۱.۱. یک گراف ساده، گرافی است که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو راس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

در این پایان‌نامه، منظور از گراف G، گراف ساده می‌باشد.

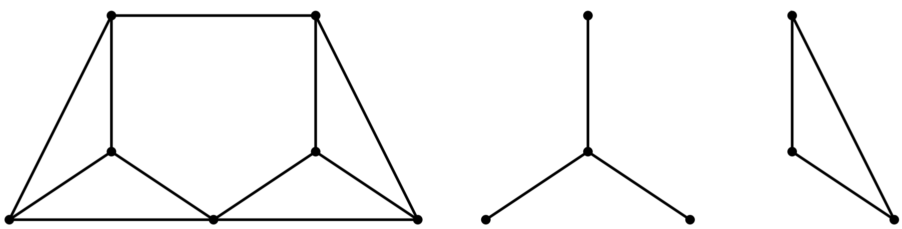
تعریف ۷.۱.۱. درجه راس v در G تعداد یال‌های گراف G می‌باشد که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. نسبت دو برابر تعداد یال‌ها به تعداد رئوس را میانگین درجه گراف G می‌گوییم و با $\overline{d}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. گراف G را یک گراف $k-$منتظم می‌نامیم، هرگاه درجه هر راس آن k باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه‌ای از رئوس گراف G که با راس v مجاور باشند را همسایگی باز راس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. $N(v) \cup \{v\}$ را همسایگی بسته راس v نامیده و با $N[v]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. گراف G همبند نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو راس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد. در غیر این صورت گراف G ناهمبند است. بدیهی است که هر گراف ناهمبند را می‌توان به‌صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند با مجموعه رئوس مجزا در نظر گرفت. به هر یک از این گراف‌های همبند، یک مولفه از گراف G می‌نامیم. (شکل (۱.۱))



(الف) (ب)

شکل ۱.۱: (الف) گراف همبند و (ب) گراف ناهمبند دو مولفه‌ای

تعریف ۱۲.۱.۱. فاصله بین دو راس u و v در گراف G که با $d_G(u,v)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو راس u و v.

تعریف ۱۳.۱.۱. در بین کوتاه‌ترین مسیرها، طول بزرگترین مسیر را قطر گراف G نامیده و با $\operatorname{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۱.۱. [۱۱] برای گراف دلخواه $G=(V,E)$ داریم، $\sum_{v\in V} d_G(v) = ۲|E(G)|$.

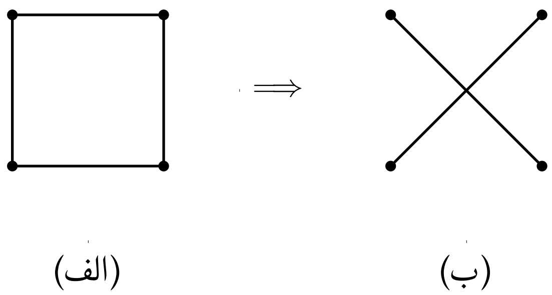
اصل ۱۵.۱.۱. اصل لانه کبوتر. اگر تعداد n کبوتر تعداد k لانه را اشغال کنند که $k<n$، آن‌گاه لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر موجود است.

تعریف ۱۶.۱.۱. گرافی که در آن هر دو راس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می‌شود. یک گراف کامل n راسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. گراف دوبخشی گرافی است که مجموعه راس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هر راس X، به هر راس Y وصل شده باشد، گراف دو بخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X|=m$ و $|Y|=n$، آن‌گاه گراف دو بخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $|X|=۱$ و یا $|Y|=۱$ باشد، گراف ستاره نامیده می‌شود و با $K_{۱,n}$ یا $K_{m,۱}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید G گرافی n راسی باشد، متمم (یا مکمل) گراف G را با $\overline{G}$ نشان داده و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم، $V(G)=V(\overline{G})$ و هر دو راس مانند u و v در $\overline{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند.

شکل (۲.۱) گراف G و متمم آن را نشان می‌دهد.

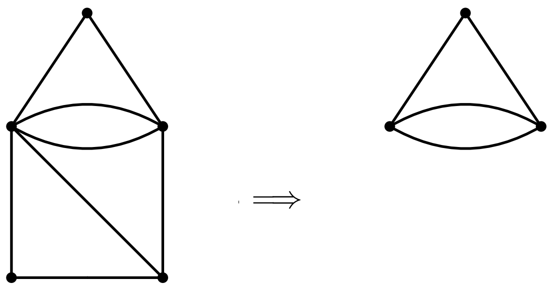


شکل ۲.۱: (الف) گراف G و (ب) گراف $\bar{G}$

تعریف ۱۹.۱.۱. یک زیرگراف از گراف G، گرافی مانند H است که $V(H)\subseteq V(G)$ و $E(H)\subseteq E(G)$ به‌طوریکه $V(H)\neq\emptyset$.

تعریف ۲۰.۱.۱. H را زیرگراف القایی G نامیده و با $G[V(H)]$ نمایش می‌دهیم، هرگاه H زیرگرافی از G باشد و برای هر دو راس x و y از H، اگر $xy\in E(G)$ آن‌گاه $xy\in E(H)$.

شکل(۳.۱) گراف G و یک زیرگراف القایی آن را نشان می‌دهد.



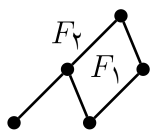
(الف) (ب)

شکل ۳.۱: (الف) گراف G و (ب) یک زیرگراف القایی G

تعریف ۲۱.۱.۱. گراف مسطح، گرافی است که بتوان آن‌را طوری بر روی صفحه ترسیم کرد که یال‌ها به‌جز تلاقی در رئوس، همدیگر را قطع نکنند.

تعریف ۲۲.۱.۱. ناحیه‌هایی از صفحه که توسط یال‌های یک گراف مسطح شده افراز شده‌اند را وجه‌های یک گراف مسطح می‌نامیم. وجه بیرونی یک گراف مسطح را وجه بیکران می‌نامیم.

در شکل (۴.۱)، $F_۱$ وجه کراندار و $F_۲$ وجه بیکران است.

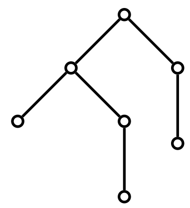


شکل ۴.۱:

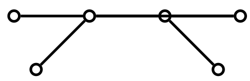
تعریف ۲۳.۱.۱. گراف مسطح خارجی، گرافی است که بتوان آن‌را به طور مسطح شده طوری در صفحه ترسیم کرد که هر راس آن، روی مرز وجه بیکران باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. گراف همبند و فاقد دور درخت نامیده می‌شود. یک برگ (راس آویزان) راسی از درجه یک است. هم‌چنین مجموعه برگ‌ها را با $L(T)$ نمایش می‌دهیم.(شکل(۵.۱))

تعریف ۲۵.۱.۱. برای $r, s \geq ۱$، یک ۲−ستاره $S\,(r, s)$، درختی با دو راس غیر برگ است، به‌طوریکه یک راس مجاور به r برگ و راس دیگر غیر برگ، مجاور به s برگ است.(شکل(۶.۱))



شکل ۵.۱: درخت T



شکل ۶.۱: $S(۲,۲)$

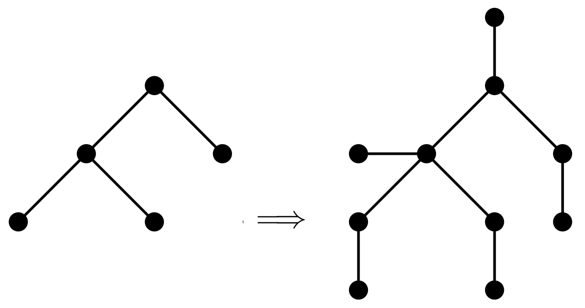
تعریف ۲۶.۱.۱. درخت جهت‌دار، درختی است که مجموعه یال‌های آن مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. درخت ریشه‌دار، درختی جهت‌دار است که درجه ورودی یک راس به نام ریشه صفر و درجه ورودی سایر راس‌ها غیرصفر است.

از این پس ریشه را قسمت بالای درخت در نظر گرفته و جهت رشد را رو به پایین در نظر می‌گیریم، همچنین از رسم فلش (جهت) خودداری می‌کنیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. راسی که در همسایگی یک برگ قرار داشته باشد، راس پشتیبان نام دارد. مجموعه رئوس پشتیبان در درخت T را با $S(T)$ نمایش می‌دهند. هم‌چنین راسی که در همسایگی حداقل دو برگ قرار داشته باشد، راس پشتیبان قوی نام دارد.

تعریف ۲۹.۱.۱. تاج در یک گراف مانند H که با $\mathrm{cor}(H)$ نمایش داده می‌شود، گرافی از مرتبه $۲|V(H)|$ است که با اضافه کردن یک برگ به هر راس از گراف H به‌دست می‌آید. هم‌چنین به خاطر می‌سپاریم که هر راس از $\mathrm{cor}(H)$ یا یک برگ است و یا راس پشتیبان که با دقیقا یک برگ همسایه است. شکل (۷.۱) گراف H و $\mathrm{cor}(H)$ را نشان می‌دهند.



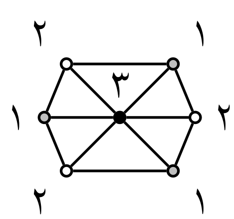
شکل ۷.۱: (الف) درخت H و (ب) $\text{cor}(H)$

تعریف ۳۰.۱.۱. یک مجموعه مستقل در گراف G، مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که هیچ دو راس از آن مجاور نباشد. ماکزیمم اندازه یک چنین مجموعه‌ای را عدد استقلال گراف G نامیده و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳۱.۱.۱. تابع $f : V(G) \longrightarrow A \neq \emptyset$ را یک رنگ‌آمیزی راسی برای گراف G نامیم و همچنین A را مجموعه رنگ‌ها می‌نامیم. رنگ‌آمیزی f را معتبر نامیم، هرگاه برای هر دو راس مجاور x و y $f(x) \neq f(y)$.

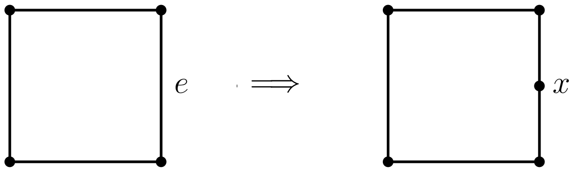
گراف G را $k-$رنگ‌پذیر نامیم، هرگاه یک رنگ‌آمیزی معتبر f موجود باشد که $|f(V(G))| = k$.
عدد رنگی گراف G عبارت است از مینیمم مقدار k که G، $k-$رنگ پذیر باشد و آن را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم.

توجه شود که راس‌های هم رنگ در یک رنگ‌آمیزی معتبر گراف G، مجموعه مستقل تشکیل می‌دهند.
شکل(۸.۱) رنگ‌آمیزی گراف G را نشان می‌دهد که به راحتی می‌توان دید در این گراف عدد رنگی برابر ۳ می‌باشد.



شکل ۸.۱: $\chi(G) = ۳$

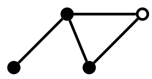
تعریف ۳۲.۱.۱. یک زیرتقسیم [1] یال e عبارت است از حذف یال e، اضافه کردن راس جدید y و مجاور کردن y با دو سر e.(شکل ۹.۱)



شکل ۹.۱: زیرتقسیم یال e

تعریف ۳۳.۱.۱. به تعداد درجه راس‌های متمایز بدون تکرار در دنباله درجات، گستردگی[۲] در G گوییم و با $Span(G)$ نمایش می‌دهیم.

در شکل (۱۰.۱) دنباله درجات راس‌ها عبارت است از، ۳۲۲۱ و در نتیجه $\text{span}(G) = ۳$.



شکل ۱۰.۱: $\text{span}(G) = ۳$

تعریف ۳۴.۱.۱. به ماکزیمم تکرار در دنباله درجات راسی، عدد تکرار[۳] گوییم و به اختصار با $\text{rep}(G)$ نمایش می‌دهیم.

در مثال قبل $\text{rep}(G) = ۲$.

تعریف ۳۵.۱.۱. به مجموعه‌ای از رئوس در گراف G پوشش راسی گوییم، هرگاه هر یال دارای حداقل یک انتها در آن باشد. مینیمم اندازه یک پوشش راسی را عدد پوششی راسی G نامیده و با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ احاطه‌گری

در سال‌های اخیر، مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته

[۱] Subdividing
[۲] Span(G)
[۳] Repetition number

است. این مفهوم برای نخستین بار در سال ۱۸۶۲ توسط دوجکنیش[۴] روی صفحه شطرنج مورد استفاده قرار گرفت. اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گراف‌ها بررسی و مطالعه گردید و تاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.

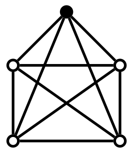
در سال ۱۸۶۲ بال[۵] مساله کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز جهت قرار گرفتن روی صفحه شطرنج را به قسمی که هر خانه‌ای مورد حمله یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله وزیر دیگری نباشد، مطرح کرد. این مساله به مساله ۵−وزیر مشهور شد. از جمله کاربردهای دیگر آن می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین مکان‌ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش‌نشانی و ... اشاره نمود.

تعریف ۱.۲.۱. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر نامیم، هرگاه برای هر راس $v \in V$، یا آن راس در D باشد و یا در همسایگی یک راس از D قرار داشته باشد.

کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گری G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌هیم.

یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma(G)$ را به اختصار با یک $\gamma(G)$−مجموعه نشان می‌دهیم.

شکل(۱۱.۱) کوچکترین مجموعه احاطه‌گر را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۱: $\gamma(G) = ۱$

[۴] De Jacnish

[۵] W. W. Rouse Ball

فصل ۲

احاطه‌گری دلپذیر در گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

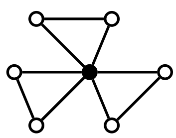
در این فصل احاطه‌گری دلپذیر را بر روی انواعی از گراف‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور ابتدا به تعریف احاطه‌گری دلپذیر می‌پردازیم و سپس روابط و قضایای مربوط به آن‌را مطرح می‌کنیم. این فصل برگرفته از مرجع [۱۲] می‌باشد.

۲.۲ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲.۲. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر[1] نامیم، هرگاه D یک مجموعه احاطه‌گر باشد و هر دو راس خارج D دارای تعداد یکسانی همسایه در D باشند.

کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر در گراف G را عدد احاطه‌گری دلپذیر G نامیده و آن را با $fd\left(G\right)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر از اندازه $fd\left(G\right)$ را به اختصار با یک $fd\left(G\right)$– مجموعه نشان می‌دهیم.

شکل (۱.۲) کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر دلپذیر در گراف مورد نظر را نشان می‌دهد.

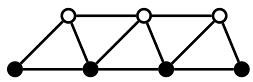


شکل ۱.۲: $fd(G) = ۱$

[1] Fair dominating set

تعریف ۲.۲.۲. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه $k-$احاطه‌گر دلپذیر[۲] نامیم، هرگاه D یک مجموعه احاطه‌گر باشد و هر دو راس خارج D دارای دقیقا k همسایه در D باشند.

کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه $k-$احاطه‌گر دلپذیر در گراف G را عدد $k-$احاطه‌گری دلپذیر G نامیده و آن را با $fd_k\left(G\right)$ نشان می‌دهیم.
یک مجموعه $k-$احاطه‌گر دلپذیر از اندازه $fd_k\left(G\right)$ را به اختصار با یک $fd_k\left(G\right)-$مجموعه نشان می‌دهیم.
شکل (۲.۲) مجموعه ۲-احاطه‌گر دلپذیر در گراف مورد نظر را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۲: $fd_۲ = ۴$

در این پایان‌نامه منظور از $fd\left(G\right)-$ مجموعه، مینیمم مجموعه احاطه‌گر دلپذیر و منظور از $FD\left(G\right)-$ مجموعه، مجموعه احاطه‌گر دلپذیر خواهد بود.

نتیجه ۳.۲.۲. اگر $G = \overline{K_n}$، آن‌گاه $fd\left(G\right) = n$.

قضیه ۴.۲.۲. اگر G یک گراف از مرتبه n باشد، آن‌گاه روابط زیر برقرار خواهند بود.

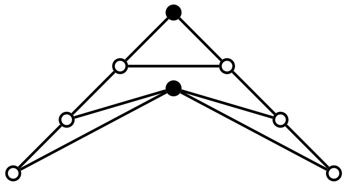
الف) $\gamma\left(G\right) \leq fd\left(G\right)$.

ب) $fd\left(G\right) \leq n$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = \overline{K_n}$.

برهان. الف) چون یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر خود یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا حکم برقرار است.
ب) بوضوح مجموعه $V\left(G\right)$ یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر است، لذا $fd\left(G\right) \leq n$. برای اثبات حالت تساوی، فرض کنید G گرافی با $fd\left(G\right) = n$ باشد. اگر $G \neq \overline{K_n}$، آن‌گاه راسی مانند x از درجه حداقل یک را در نظر بگیرید. در این‌صورت $V\left(G\right) - \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر است که تناقض است. لذا $G = \overline{K_n}$. بالعکس، با توجه به قرارداد ۳.۲.۲ برقرار است. □

تعریف ۵.۲.۲. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر تام[۳] نامیم، هرگاه D یک مجموعه احاطه‌گر باشد و هر راس خارج D دقیقا یک همسایه در D داشته باشد. بنابراین یک $FD(G)$۱$-$مجموعه، یک مجموعه احاطه‌گر تام خواهد بود.(شکل (۳.۲))

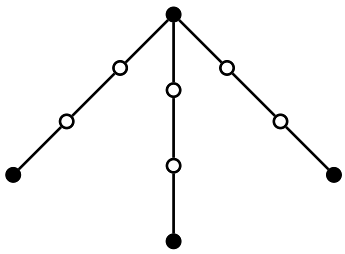
[۲] K-Fair dominating set
[۳] Perfect dominating set



شکل ۳.۲: $fd_1 = 2$

تعریف ۶.۲.۲. S را یک بسته‌بندی[۴] نامیم، هرگاه به‌ازای هر دو راس که متعلق به S هستند، فاصله آن‌ها حداقل ۳ باشد.

تعریف ۷.۲.۲. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر کارامد[۵] نامیم، هرگاه S یک مجموعه احاطه‌گر تام باشد و برای هر دو راس $u, \nu \in S$، فاصله آن‌ها حداقل ۳ باشد. بنابراین یک مجموعه احاطه‌گر کارآمد، یک $1FD(G)$− مجموعه خواهد بود. (شکل (۴.۲))



شکل ۴.۲: مجموعه احاطه‌گر کارآمد

لم ۸.۲.۲. [۱] اگر G دارای یک مجموعه احاطه‌گر کارامد باشد، آن‌گاه اندازه هر مجموعه کارامد برابر با $\gamma(G)$ است.

قضیه ۹.۲.۲. اگر گراف G دارای یک مجموعه احاطه‌گر کارامد باشد، آن‌گاه

$$\gamma(G) = fd_1(G) = fd(G).$$

برهان. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر کارامد برای G باشد. طبق تعریف، S یک $1FD$− مجموعه نیز می‌باشد، لذا خواهیم داشت $fd(G) \leq fd_1(G) = |S|$. از طرفی طبق لم ۸.۲.۲ داریم، $|S| = \gamma(G)$. در این‌صورت خواهیم داشت، $fd(G) \leq fd_1(G) = |S| = \gamma(G)$. اثبات عکس رابطه نیز با توجه به قضیه ۴.۲.۲ برقرار خواهد بود. در نتیجه تساوی برقرار است. □

قضیه ۱۰.۲.۲. برای $m, n \geq 1$، اگر $G \in \{K_n, \overline{K_n}, K_{m,n}\}$، آن‌گاه $fd(G) = \gamma(G)$.

[۴] Packing

[۵] Efficient dominating set

برهان. برای اثبات $K_{m,n}$، فرض کنید $m = n = ۱$ یا $m = ۱$ و یا $n = ۱$ باشد. در این‌صورت به‌راحتی می‌توان دید که $fd(G) = \gamma(G) = ۱$. حال فرض کنید $m \geq n \geq ۲$. می‌دانیم $\gamma(K_{m,n}) = ۲$، از طرفی $fd(K_{m,n}) \leq fd_۱(K_{m,n}) = ۲$، لذا خواهیم داشت $fd(K_{m,n}) \leq \gamma(K_{m,n})$. بالعکس، با توجه به قضیه ۴.۲.۲ قسمت (الف) داریم، $\gamma(K_{m,n}) \leq fd(K_{m,n})$. در نتیجه حکم برای $K_{m,n}$ به اثبات می‌رسد.

برای اثبات $\overline{K_n}$، می‌دانیم گراف $\overline{K_n}$ یالی ندارد، بنابراین $\gamma\left(\overline{K_n}\right) = n$. از طرفی طبق قرارداد ۳.۲.۲ داریم، $fd\left(\overline{K_n}\right) = n$. در نتیجه اثبات واضح است.

برای اثبات K_n، می‌دانیم $\gamma(K_n) = ۱$. از طرفی $fd(K_n) \leq fd_۱(K_n) = ۱$، لذا خواهیم داشت $fd(K_n) \leq \gamma(K_n)$. از طرفی با توجه به قضیه ۴.۲.۲ قسمت (الف) داریم، $\gamma(K_n) \leq fd(K_n)$. در نتیجه حکم برای K_n نیز به اثبات می‌رسد.

□

قضیه ۱۱.۲.۲. [۱] اگر $n \geq ۳$ و $n \not\equiv ۲ \pmod{۳}$، آن‌گاه $fd(C_n) = \gamma(C_n)$ و اگر $n \geq ۵$ و $n \equiv ۲ \pmod{۳}$، آن‌گاه $fd(C_n) = \gamma(C_n) + ۱$.

قضیه ۱۲.۲.۲. هرگاه G گرافی همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:

الف) اگر $\overline{G}$ همبند باشد، آن‌گاه $fd(G) = fd\left(\overline{G}\right)$.

ب) اگر $\overline{G}$ دارای $q \geq ۲$ مولفه باشد، آن‌گاه $fd(G) \leq \frac{n}{q} \leq \frac{n}{۲}$.

برهان. الف) فرض کنید $\overline{G}$ همبند باشد و فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر دلپذیر در G باشد. در این‌صورت هر راس $v \in V \setminus D$ دقیقا k همسایه در D دارد، که $۱ \leq k \leq |D|$. اگر $k = |D|$، آن‌گاه در گراف $\overline{G}$ هیچ یالی بین D و $V \setminus D$ وجود ندارد و این متناقض با همبند بودن $\overline{G}$ است، بنابراین $k < |D|$. اما در این‌صورت در گراف $\overline{G}$ هر راس خارج D دقیقا $|D| - k > ۰$ همسایه در D دارد، بنابراین D یک FD-مجموعه برای $\overline{G}$ است، بنابراین $fd\left(\overline{G}\right) \leq |D| = fd(G)$. بالعکس، همانند اثبات بالا می‌توان ثابت کرد، $fd(G) \leq fd\left(\overline{G}\right)$. در نتیجه $fd(G) = fd\left(\overline{G}\right)$.

ب) فرض کنید $\overline{G}$ ناهمبند است و q بخش دارد. بوضوح کوچک‌ترین بخش $\overline{G}$ برابر با حداکثر n/q است. حال فرض کنید F کوچک‌ترین بخش در $\overline{G}$ باشد و فرض کنید $D = V(F)$. در این‌صورت هر راس $V \setminus D$ در G با همه راس‌های D مجاور است. بنابراین D یک FD-مجموعه برای G خواهد بود، در نتیجه $fd(G) \leq |D| \leq n/q \leq n/۲$. □

۳.۲ کران‌هایی روی احاطه‌گری دلپذیر

قضیه ۱.۳.۲. اگر G گرافی از مرتبه $n \geq ۳$ با $\delta(G) \geq ۱$ باشد، آن‌گاه $fd(G) \leq n - ۲$ و این کران، یک کران قابل دسترس می‌باشد.

برهان. به استقرا روی $n \geq ۳$ ثابت می‌کنیم. آزمون استقرا، اگر $n \in \{۳,۴\}$ به‌راحتی می‌توان نشان داد که $fd\left(G\right) \leq n - ۲$. فرض استقرا، فرض کنید $n \geq ۵$ و حکم برای گراف G' از مرتبه n' که $۳ \leq n' \leq n$ و هیچ راس منفردی ندارد، برقرار باشد. یعنی $fd\left(G'\right) \leq n' - ۲$. حکم استقرا، فرض کنید $G = (V,E)$ گرافی از مرتبه n بدون راس منفرد باشد. بوضوح G دارای حداقل دو راس با درجه یکسان است. در این‌صورت فرض کنید u و v دو راس با درجه یکسان در G باشند، در این‌صورت $d_G\left(u\right) = d_G\left(v\right) = k$ که در آن $۱ \leq k \leq n - ۱$. حال اگر دو راس u و v در G مجاور نباشند و یا اگر این دو راس در G مجاور باشند و $k \geq ۲$ باشد، آنگاه $D = V \setminus \{u,v\}$ یک FD−مجموعه است، بنابراین $fd\left(G\right) \leq |D| = n - ۲$. حال فرض کنید u و v در G مجاورند و $k = ۱$. این بدان معناست که گراف G ناهمبند است. در این‌صورت گراف $G' = G - \{u,v\}$ از مرتبه $n' = n - ۲ \geq ۳$ را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا برای گراف G' داریم، $fd\left(G'\right) \leq n' - ۲$. حال می‌توان با افزودن رئوس u و v، هر $fd\left(G'\right)$−مجموعه را به یک FD−مجموعه در G تعمیم داد و این می‌رساند که $fd\left(G\right) \leq fd\left(G'\right) + ۲ \leq n' = n - ۲$ و این یک کران بالاست.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که کران قضیه بالا تیز است. بدین منظور ساختاری از خانواده نامتناهی از گراف‌های G از مرتبه $n \geq ۳$ با $\delta(G) \geq ۱$ را در نظر می‌گیریم و سپس نشان می‌دهیم که ، $fd\left(G\right) = n - ۲$.

ادعا ۲.۳.۲. خانواده‌ای نامتناهی از گراف‌های H از مرتبه زوج موجودند که $fd\left(H\right) = |V(H)| - ۲$.

اثبات. برای $n \geq ۳$ گراف $H = H_n$ از مرتبه $n(H) = ۲n$ راس را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $V\left(H\right) = X \cup Y$ که $X = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_۱, \ldots, y_n\}$ و x_i و y_j با هم مجاورند اگر و فقط اگر $j \geq i$. به‌علاوه Y یک مجموعه مستقل است و برای $i, j > ۱$، x_i و x_j مجاورند. بنابراین برای $۱ < i < n$، $d_H\left(x_۱\right) = ۱$ و $d_H\left(x_i\right) = i + n - ۲$، در حالی‌که برای $۱ \leq j \leq n$، $d_H\left(y_j\right) = n - j + ۱$. لذا خواهیم داشت $d_H\left(x_۱\right) = d_H\left(y_n\right) = ۱$ و $d_H\left(y_۱\right) = d_H\left(x_۲\right) = n$ و درجه همه راس‌ها در H متمایزند. شکلی کلی از گراف H را در شکل (۵.۲) مشاهده می‌کنید. حال ما می‌خواهیم نشان دهیم $fd\left(H\right) = ۲n - ۲ = n(H) - ۲$. فرض کنید S یک fd−مجموعه دلخواه در H باشد. ما نشان می‌دهیم که $|S| \geq n(H) - ۲$. بدین منظور سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱) $S \not\ni x_۱$ ‏($x_۱ \notin S$). در این‌صورت $y_۱ \in S$ و S یک $۱FD$−مجموعه برای H_n است. اگر برای $i \geq ۲$، $x_i \notin S$ آنگاه $N\left(x_i\right) \cap S = \{y_۱\}$ و بنابراین $y_۲ \notin S$. هنگامی‌که $y_۲$ توسط S احاطه می‌شود، تعدادی $l \geq ۲$ وجود دارد به‌طوریکه $l \neq i$. بنابراین $x_l \in S$ و این می‌رساند که $y_۱, x_l \in N\left(x_i\right) \cap S$ و این یک تناقض است. بنابراین $X \setminus \{x_۱\} \subseteq S$. علاوه‌براین، برای $۱ < j < n$، $y_j \in S$، زیرا در غیر این‌صورت تناقض ایجاد می‌شود، لذا $|N\left(y_j\right) \cap S| \geq ۲$ $|N\left(y_j\right) \cap \left(X \setminus \{x_۱\}\right)| = n - j + ۱ \geq ۲$ و S یک $۱FD$−مجموعه است. در نتیجه $V \setminus \{x_۱, y_n\} \subseteq S$ و $|S| \geq n(H) - ۲$.

۲) $x_۱ \in S$ و $y_n \notin S$. در این‌صورت $x_n \in S$ و S یک $۱FD$−مجموعه برای H_n است. هنگامی‌که $x_۱, x_n \in N\left(y_۱\right) \cap S$ این نتیجه می‌دهد که $y_۱ \in S$، زیرا در غیر این‌صورت $y_۱$ توسط دو راس