دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های هم‌محلی موجک‌ها برای حل عددی مسایل مقدار مرزی بیضوی

استاد راهنما

پروفسور سعید عباس‌بندی

استاد مشاور

دکتر الیاس شیوانیان

پژوهشگر

سمیه صدیقی

دی‌ماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: صدیقی نام: سمیه

عنوان: روش‌های هم‌محلی موجک‌ها برای حل عددی مسایل مقدار مرزی بیضوی

استاد راهنما: پروفسور سعید عباس‌بندی
استاد مشاور: دکتر الیاس شیوانیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه بین‌المللی‌امام‌خمینی(ره دانشکده علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: دی‌ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۴۹

واژگان کلیدی: معادله دیفرانسیل جزیی بیضوی، موجک‌های هار، موجک‌های لژاندر، معادله‌ی هلم‌هلتز، مساله‌ی مقدار مرزی، روش عددی

چکیده

دو روش جدید و موثر را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزیی بیضوی با رفتار نوسانی و غیر نوسانی بر اساس روش هم‌محلی موجک‌های هار و لژاندر ارائه می‌کنیم. این روش‌ها در دو مرحله مطرح می‌شوند؛ در مرحله‌ی اول، موجک‌های هار را به کار می‌بریم و در مرحله‌ی دوم، به منظور بدست آوردن دقت بالاتر، موجک‌های لژاندر را جایگزین موجک‌های هار می‌کنیم. سپس یک آنالیز مقایسه‌ای از عملکرد روش هم‌محلی موجک‌های هار و روش هم‌محلی موجک‌های لژاندر را انجام می‌دهیم. علاوه بر این، عملکرد روش هم‌محلی موجک‌های لژاندر را با روش هم‌محلی اسپلاین- درجه‌دو ، روش بدون شبکه و روش سینک- گالرکین مقایسه می‌کنیم. این آنالیز نشان می‌دهد که موجک لژاندر، دقت بالاتری دارد که در قالب آنالیز چندگانه است. سرانجام از نتایج حاصل از مثال‌های عددی بر روی این روش‌ها، مشاهده می‌نماییم که روش بر اساس موجک‌های لژاندر برای انواع مشکلات پایه‌ای، دقت بهتری دارند.

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدرم

سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

امروز، هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

سپاس گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمون‌مان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزی‌مان ساخت.

با تشکر و سپاس فراوان از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای دانشمند و پرمایه‌ام، جناب آقای پروفسور سعید عباس‌بندی، و با امتنان بیکران از راهنمایی‌های ارزشمند استاد مشاور گرانقدرم، جناب آقای دکتر الیاس شیوانیان، که بی‌شک بدون حضور این دو بزرگواران به انجام رساندن این مجموعه، مشکل می‌نمود.
با تقدیر و درود فراوان خدمت پدر و مادر بسیار عزیزم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت ، فضیلت و انسانیت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی ها و مشکلات بوده است.
و با تشکر خالصانه خدمت همه‌ی کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نمودند.

همتم بدرقه راه کن ای طایر قدس

که درازست ره مقصد و من نوسفرم

سمیه صدیقی
دی ماه ۱۳۹۲

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

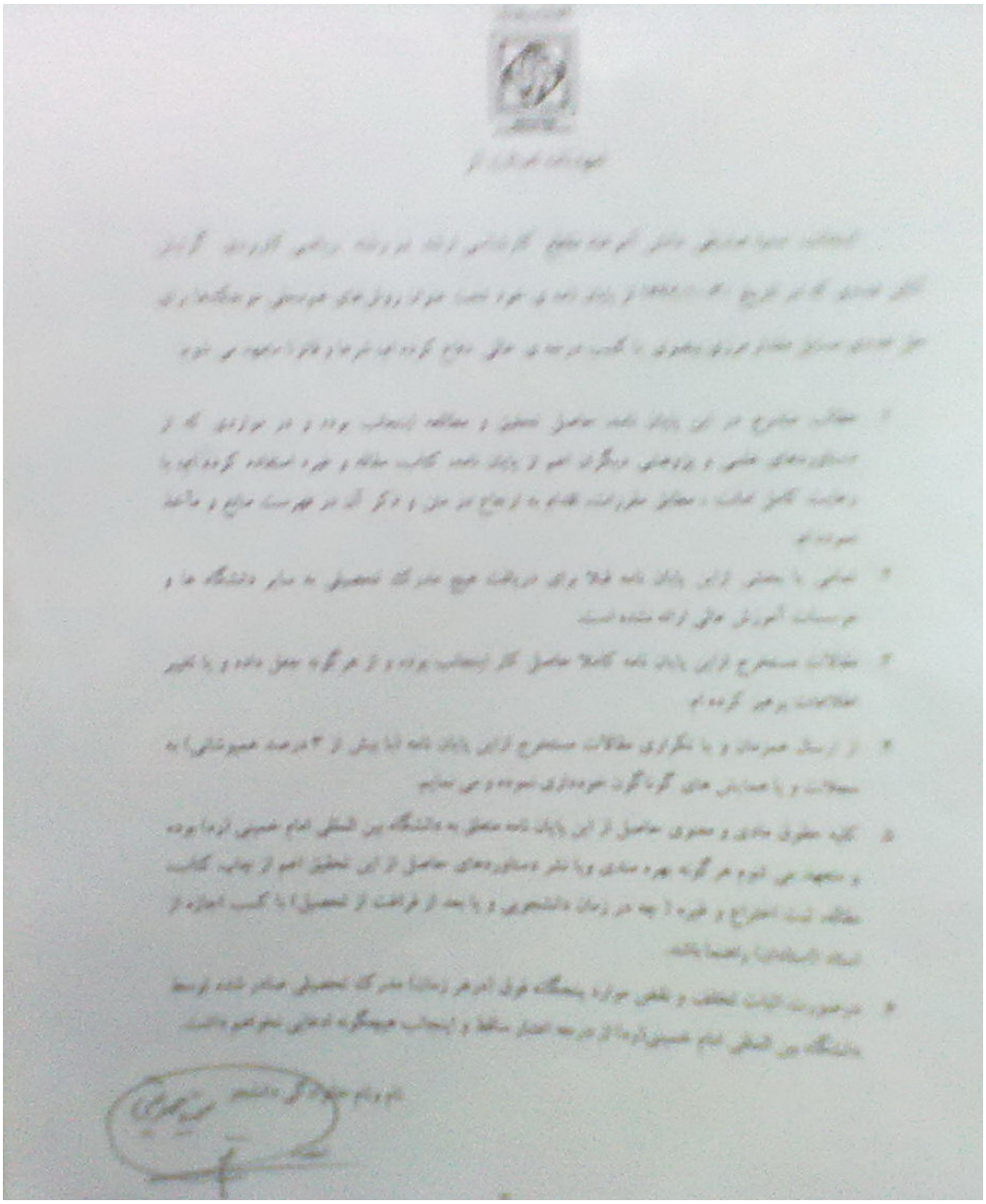
معاونت آموزشی - مدیریت تحصیلات تکمیلی

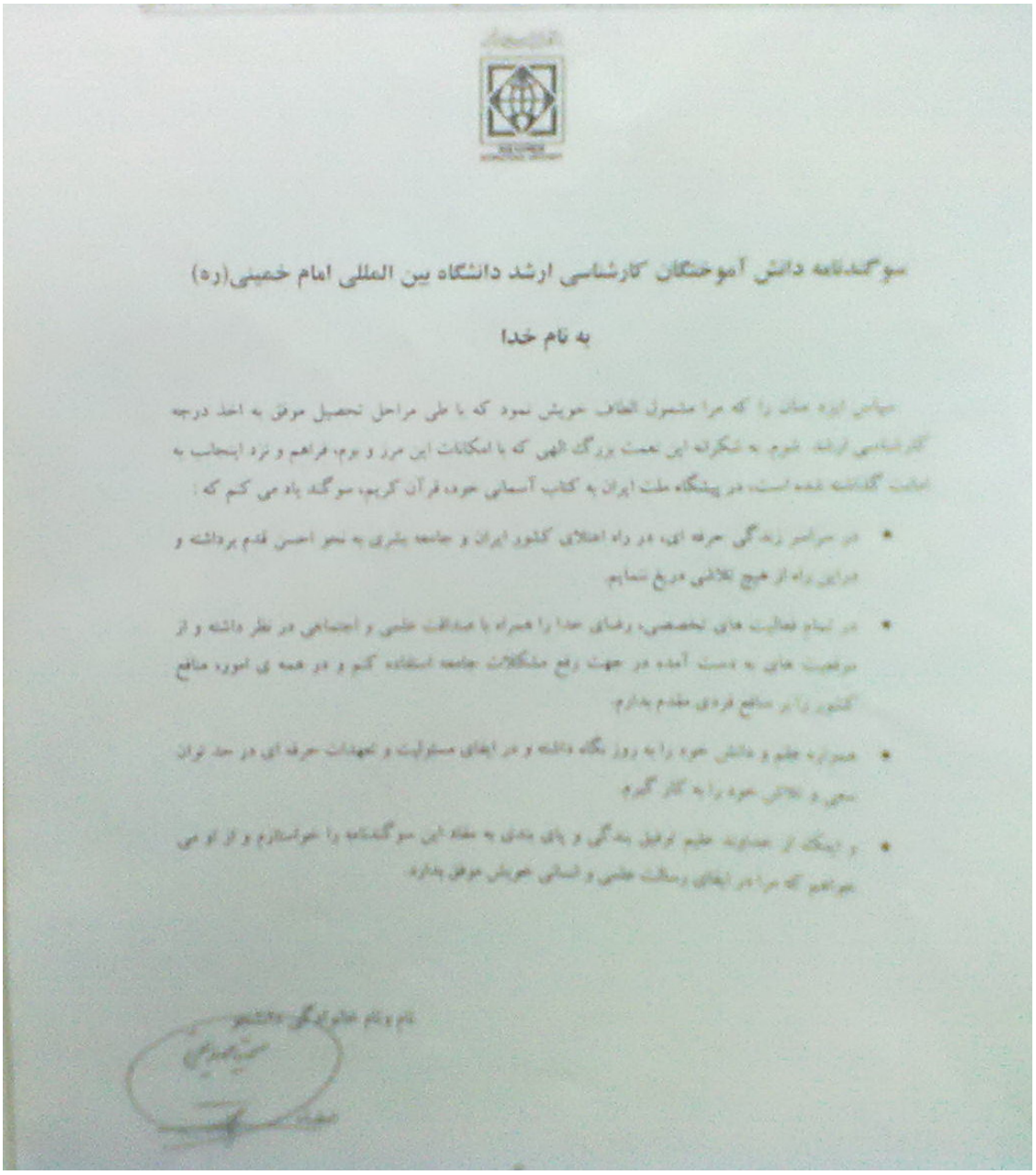
فرم تاییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه/رساله (فرم شماره ۳۰)

بدین وسیله گواهی میشود جلسه دفاعیه از پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری سمیه صدیقی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان روش‌های هم‌محلی موجک‌ها برای حل عددی مسایل مقدار مرزی بیضوی در تاریخ ۱۳۹۲/۱۰/۳۰ در دانشگاه برگزار گردید و این پایان نامه/رساله با نمره به عدد ۱۹ و به حروف نوزده با درجه عالی مورد تایید هیئت داوران قرار گرفت

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی دانشگاهی	دانشگاه یا موسسه	امضا
۱	استاد راهنما	دکتر سعید عباس‌بندی	استاد	دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)	
۲	استاد مشاور	دکتر الیاس شیرانیان	استادیار	دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)	
۳	داور	دکتر داود رستمی ورنوسفادرانی	دانشیار	دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)	
۴	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر پدرام محمدحسینی	استادیار	دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)	

* در صورت درجه استاد راهنمای مورد برای پایان نامه/رساله یکنفر داور خارج از دانشگاه محل دفاع (بدون استاد راهنما) انتخاب شود





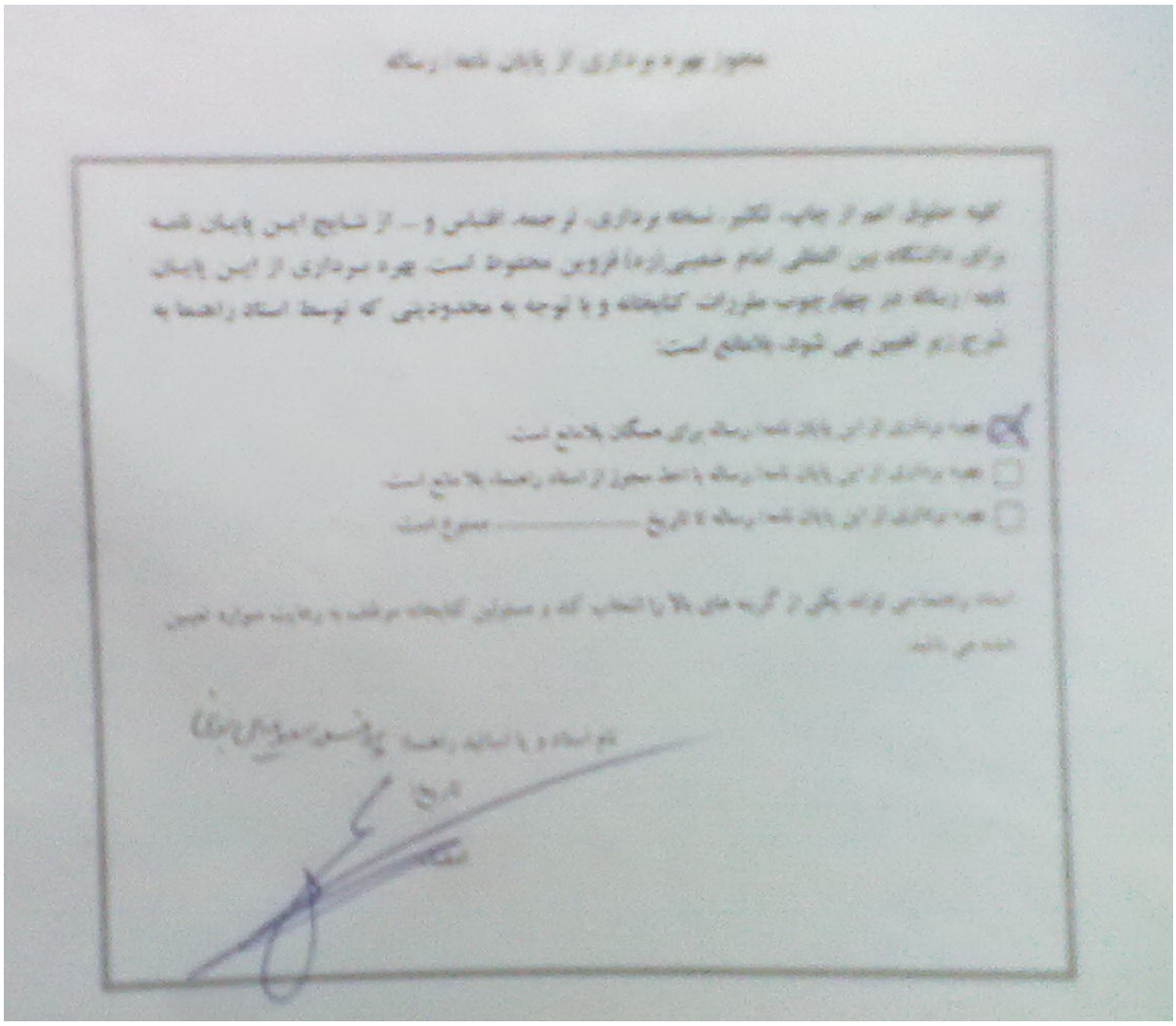
سوگندنامه دانش آموختگان کارشناسی ارشد دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

به نام خدا

سپاس ایزد منان را که مرا مشمول الطاف خویش نمود که با طی مراحل تحصیل موفق به اخذ درجه کارشناسی ارشد شوم. به شکرانه این نعمت بزرگ الهی که با امکانات این مرز و بوم، فراهم و نزد اینجانب به امانت گذاشته شده است، در پیشگاه ملت ایران به کتاب آسمانی خود، قرآن کریم، سوگند یاد می کنم که :

- در سراسر زندگی حرفه ای، در راه اعتلای کشور ایران و جامعه بشری به نحو احسن قدم برداشته و در این راه از هیچ تلاشی دریغ ننمایم.
- در تمام فعالیت های تخصصی، رضای خدا را همراه با صداقت علمی و اجتماعی در نظر داشته و از موقعیت هایی به دست آمده در جهت رفع مشکلات جامعه استفاده کنم و در همه ی امور، منافع کشور را بر منافع فردی مقدم بدارم.
- همواره علم و دانش خود را به روز نگاه داشته و در ایفای مسئولیت و تعهدات حرفه ای در حد توان سعی و تلاش خود را به کار گیرم.
- و اینک از خداوند علیم توفیق بندگی و پای بندی به مفاد این سوگندنامه را خواستارم و از او می خواهم که مرا در ایفای رسالت علمی و انسانی خویش موفق بدارد.

نام و نام خانوادگی دانشجو



مجوز بهره برداری از پایان نامه / رساله

کلیه حقوق ناشی از چاپ، تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از نتایج این پایان نامه برای دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره) قزوین محفوظ است. بهره برداری از این پایان نامه / رساله در چهار چوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

☑ بهره برداری از این پایان نامه / رساله برای همگان بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه / رساله با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه / رساله تا تاریخ ..... ممنوع است.

استاد راهنما می تواند یکی از گزینه های بالا را انتخاب کند و مسئولین کتابخانه موظف به رعایت موارد تعیین شده می باشند.

نام استاد / یا اساتید راهنما: پروفسور [illegible]

تاریخ

امضاء

چکیده

دو روش جدید و موثر را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزیی بیضوی [۱] $(EPDE)$ با رفتار نوسانی و غیر نوسانی بر اساس روش هم‌محلی موجک‌های هار و لژاندر [۲] ارائه می‌کنیم. این روش‌ها در دو مرحله مطرح می‌شوند؛ در مرحله‌ی اول، موجک‌های هار را به کار می‌بریم و در مرحله‌ی دوم، به منظور بدست آوردن دقت بالاتر، موجک‌های لژاندر را جایگزین موجک‌های هار می‌کنیم.

سپس یک آنالیز مقایسه‌ای از عملکرد روش هم‌محلی موجک‌های هار و روش هم‌محلی موجک‌های لژاندر را انجام می‌دهیم. علاوه بر این، عملکرد روش هم‌محلی موجک‌های لژاندر را با روش هم‌محلی اسپلاین درجه دو [۳] ، روش بدون شبکه [۴] و روش سینک-گالرکین [۵] مقایسه می‌کنیم. این آنالیز نشان می‌دهد که موجک لژاندر، دقت بالاتری دارد که در قالب آنالیز چندگانه [۶] تابع است. سرانجام از نتایج حاصل از مثال‌های عددی بر روی این روش‌ها، مشاهده می‌نماییم که روش بر اساس موجک‌های لژاندر برای انواع مشکلات پایه‌ای، دقت بهتری دارند.

کلمات کلیدی:

معادله دیفرانسیل جزیی بیضوی، موجک‌های هار، موجک‌های لژاندر، معادله‌ی هلم‌هلتز، مساله‌ی مقدار مرزی، روش عددی

---

[۱] elliptic partial differential equations
[۲] Haar and legendre wavelets
[۳] quadratic spline collocation method
[۴] meshless method
[۵] Sinc-Galerkin
[۶] multi-resolution analysis

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها ر

فهرست جدول‌ها ژ

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۴

۱.۱ فضاهای نرم‌دار ۵

۲.۱ نرم برداری ۸

۳.۱ جمع مستقیم دو فضای برداری ۱۱

۴.۱ فضای چندجمله‌ای ها ۱۳

۵.۱ روش متعامدسازی گرام اشمیت ۱۵

۶.۱ مسأله‌ی اشتورم - لیوویل ۱۵

۷.۱ معادلات دیفرانسیل ۱۶

۱.۷.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی ۱۷

۲.۷.۱ معادلات دیفرانسیل جزیی ۱۷

۸.۱ روش هم‌محلی ۱۹

۲ معرفی موجک‌های هار و لژاندر ۲۲

۱.۲ تاریخچه‌ی موجک ۲۳

۲.۲ آشنایی با آنالیز موجک ۲۴

۳.۲ کاربرد آنالیز موجک ۲۵

۴.۲ بسط موجک و تبدیل موجک ۲۶

۱.۴.۲ دستگاه موجک ۲۷

۲.۴.۲ ویژگی‌های خاص دستگاه‌های موجک ۲۸

۵.۲ تابع مقیاس ۲۹

۶.۲ آنالیز چندگانه ۳۰

۷.۲ تابع موجک ۳۱

۸.۲ موجک‌های هار ۳۳

۹.۲ موجک‌های لژاندر ۳۷

۳ روش‌های هم‌محلی موجک‌های هار و لژاندر ۴۰

۱.۳ روش هم‌محلی موجک‌های هار ۴۱

۱.۱.۳ شرایط مرزی دیریکله ۴۱

۲.۱.۳ شرایط مرزی نیومن ۴۳

۳.۱.۳ شرایط مرزی مرکب ۴۶

۴.۱.۳ شرایط مرزی متناوب ۴۷

۲.۳ روش هم محلی موجک های لژاندر ۴۹

۱.۲.۳ شرایط مرزی دیریکله ۴۹
۲.۲.۳ شرایط مرزی نیومن ۵۰
۳.۲.۳ شرایط مرزی مرکب ۵۱
۴.۲.۳ شرایط مرزی متناوب ۵۲
۳.۳ آنالیز خطا ۵۳
۱.۳.۳ موجک‌های هار ۵۳
۲.۳.۳ موجک‌های لژاندر ۵۵

۴ نتایج عددی **۵۶**
۱.۴ مسائل مقدار مرزی بیضوی نوسانی ۵۸
۲.۴ معادله‌ی هلم‌هلتز ۶۲
۳.۴ نتیجه‌گیری ۷۹

مراجع **۱۳۶**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۱۴۰**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۱۴۳**

فهرست شکل‌ها

۱.۲ نمودارهای یک موجک و یک موج ۲۵

۲.۲ رابطه‌ی بین فضاهای تابع مقیاس و تابع موجک ۳۲

۳.۲ نمایش تابع مقیاس هار که می‌تواند بصورت ترکیبی از دو تابع مقیاس و انتقال یافته‌ی خود بیان شود. ۳۴

۱.۴ خطای مطلق به ازای $\alpha = ۱, \beta = ۱$ ۵۹

۲.۴ خطای مطلق به ازای $\alpha = ۱۰, \beta = ۱۰$ ۵۹

۳.۴ خطای مطلق به ازای $\alpha = ۲۰, \beta = ۲۰$ ۵۹

۴.۴ جواب دقیق به ازای $\alpha = ۱, \beta = ۱$ ۶۰

۵.۴ جواب دقیق به ازای $\alpha = ۱۰, \beta = ۱۰$ ۶۰

۶.۴ جواب دقیق به ازای $\alpha = ۲۰, \beta = ۲۰$ ۶۰

۷.۴ ماکزیمم خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف T مثال ۲.۱.۵ . . . . . ۶۱

۸.۴ مقایسه‌ی نرم بینهایت خطای دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۱.۲.۵ . . . . . ۶۳

۹.۴ مقایسه‌ی خطای مطلق جواب دقیق دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۳.۲.۵ . . . . . ۶۹

۱۰.۴ مقایسه‌ی خطای مطلق مشتق مرتبه اول نسبت به x دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۳.۲.۵ ۶۹

۱۱.۴ مقایسه‌ی خطای مطلق مشتق مرتبه اول نسبت به y دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۳.۲.۵ ۷۰

۱۲.۴ مقایسه‌ی خطای مطلق مشتق مرتبه دوم نسبت به x دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۳.۲.۵ ۷۰

۱۳.۴ مقایسه‌ی خطای مطلق مشتق مرتبه دوم نسبت به y دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۳.۲.۵ ۷۰

۱۴.۴ مقایسه‌ی نرم بینهایت خطای دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۴.۲.۵ . . . . . ۷۱

۱۵.۴ مقایسه‌ی نرم بینهایت خطای دو روش $LWCM$ و $QSCM$ مثال ۵.۲.۵ . . . . . ۷۳

۱۶.۴ مقایسه‌ی نرم بینهایت خطای دو روش $LWCM$ و $HWCM$ مثال ۶.۲.۵ . . . . . ۷۶

۱۷.۴ مقایسه‌ی نرم بینهایت خطای روش $LWCM$ و $QSCM$ و $ADSG$ مثال ۷.۲.۵ . . . . . ۷۷

فهرست جدول‌ها

۱.۴ نرم بینهایت خطای $LWCM$ مثال ۱.۲.۵ . . . . . ۶۴

۲.۴ نرم بینهایت خطای $QSCM$ مثال ۱.۲.۵ . . . . . ۶۵

۳.۴ نرم بینهایت خطای $LWCM$ مثال ۲.۲.۵ . . . . . ۶۷

۴.۴ نرم بینهایت خطای $QSCM$ مثال ۲.۲.۵ . . . . . ۶۸

۵.۴ نرم بینهایت خطای $LWCM$مثال ۵.۲.۵ . . . . . ۷۴

۶.۴ نرم بینهایت خطای $HWCM$ مثال ۵.۲.۵ . . . . . ۷۵

۷.۴ مقایسه‌ی نرم بینهایت خطای روش $LWCM$ و $QSCM$ و $ADSG$ مثال ۷.۲.۵ ۷۸

پیش‌گفتار

این پایان‌نامه براساس مقاله‌ی $(Aziz, Islam, Sarler, ۲۰۱۲)$ گردآوری شده است. در این پایان‌نامه، دو روش عددی براساس موجک‌های هار و لژاندر را برای بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل جزیی بیضوی $(EPDE)$ [۷] زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$a_۱(x,y)\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + a_۲(x,y)\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + a_۳(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_۴(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_۵(x,y)u = f(x,y),$$

که $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $a_۴$ و $a_۵$ و f توابعی از x و y هستند یا مقادیر ثابتی می‌باشند. دامنه‌ی تعریف $EPDE$ داده شده $[۰,۱] \times [۰,۱]$ است.

کاربردهای زیادی از $EPDE$ها در علوم مهندسی و علوم پایه وجود دارند. فرآیندهای فیزیکی بسیاری می‌توانند با استفاده از $EPDE$ طراحی شوند. جواب تحلیلی $EPDE$ها یا وجود ندارند و یا پیدا کردن آن‌ها بسیار دشوار است.

چندین روش کارآمد برای محاسبه‌ی جواب عددی $EPDE$ها ارائه شده است که شامل روش‌های بدون شبکه [۸] $(Fasshaure, ۲۰۰۷)$-$(Yang, Zheng, Maio, Sima, ۲۰۰۹)$، روش‌های هم‌محلی اسپلاین [۹] $(Fairweather, Karageorghis, Maak, ۲۰۱۱)$-$(Abushama, Bialecki, ۲۰۰۸)$، روش‌های تفاضلات متناهی [۱۰] $(Britt, Tsynkov, Turkel, ۲۰۱۰)$-$(Singer, Turkel, ۲۰۰۶)$، روش عناصر متناهی [۱۱] $(Dahmen, Kurdila, Oswald, ۱۹۹۷)$، روش تجزیه سریع دامنه [۱۲] $(Maleknejad, Lotfi, Mahdiani, ۲۰۰۷)$ ، روش سینک- گالرکین [۱۳] $(Alonso, Bowers, ۲۰۰۹)$

[۷] elliptic partial differential equations
[۸] meshless methods
[۹] spline collocation methods
[۱۰] finite-differences methods
[۱۱] finite elements methods
[۱۲] fast domain decomposition method
[۱۳] Sinc-Galerkin

و روش‌های موجک‌های خودهمبستگی[۱۴] $(Gobbi, Spigler, ۲۰۱۱)$ می‌شوند.

یک راه‌حل جایگزین در این پایان‌نامه در قالب روش‌های هم‌محلی پیشنهاد می‌شود که براساس موجک‌های‌هار و لژاندر برای حل عددی نوع کلی از $EPDE$های دو بعدی است.

موجک‌ها کاربردهای زیادی در نظریه‌ی تقریب دارند. نمونه‌ای از این کاربردها را می‌توان در مرجع $(Dahmen, Kurdila, Oswald, ۱۹۹۷)$ مشاهده کرد. موجک‌ها برای حل عددی معادلات انتگرال و انتگرالگیری عددی، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزیی و معادلات دیفرانسیل جزیی کسری استفاده می‌شوند. مثال‌هایی شامل دابیشز [۱۵] در $(Diaz, Martin, Vampa, ۲۰۰۹)$، باتل لیماری [۱۶] در $(Zhu, Lei, Pan, ۱۹۹۷)$ ، B-اسپلاین [۱۷] در $(Dehghan, Lakestani, ۲۰۰۸)$، چبیشف [۱۸] در $(Babolian, Fattahzadeh, ۲۰۰۷)$ ، موجک هار در $(Islam, Aziz, Haq, ۲۰۱۰)$، $(Islam, Aziz, Sarler, ۲۰۱۰)$، $(Leptik, ۲۰۰۷)$ و $(Chen, Hsiao, ۱۹۹۷)$ و موجک لژاندر در $(Banifatemi, Razzaghi, Yousefi, ۲۰۰۷)$ و $(Lepik, ۲۰۰۷)$ بیان شده‌اند.

موجک‌های هار به دلیل سادگی محاسباتی مورد توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته‌اند. کاربردهایی از آنها را می‌توان در $(Leptik, ۲۰۰۷)$ ، $(Chen, Hsiao, ۱۹۹۷)$، $(Hsiao, Wang, ۲۰۰۱)$ ، $(Leptik, ۲۰۰۶)$ ، $(Babolian, Shshsawaran, ۲۰۰۹)$ مشاهده کرد.

موجک‌های لژاندر نوع دیگری از موجک‌ها هستند که چندجمله‌ای‌های لژاندر بعنوان توابع پایه‌ی آنها می‌باشند. این موجک‌ها ویژگی‌های درونیابی خوبی دارند و برای تعداد نقاط هم‌محلی کمتر ، دقیق‌ترند. کاربردهایی از موجک‌های لژاندر در تقریب‌های عددی در $(Sadek, Abualrub, ۲۰۰۷)$ و $(Maleknejad, Shorabi, ۲۰۰۷)$ ارائه شده است.

[۱۴] autocorrelation-based wavelet
[۱۵] Daubechies
[۱۶] Battle-Lemarie
[۱۷] B-spline
[۱۸] Chebyshev

موجک‌های هار فقط برای حل عددی مسایل مقدار مرزی یک بعدی استفاده می‌شوند. ما درصدد آن هستیم که از موجک‌های لژاندر به جای موجک‌های هار برای پیدا کردن یک جواب عددی مسایل مقدار مرزی بیضوی دو بعدی استفاده کنیم. رویکرد جدید بر اساس موجک‌های لژاندر، یک دقت بهبود یافته نسبت به موجک‌های هار و دیگر روش‌های عددی را نشان می‌دهد (به $(Alonso, Bowers, ۲۰۰۹)$ ، $(Fairweather, Karageorghis, Maack, ۲۰۱۱)$ و $(Maleknejad, Lotfi, Mahdiani, ۲۰۰۷)$ مراجعه شود).

مزیت‌های روش پیشنهادی به شرح زیر است:

الف) روش هم‌محلی موجک هار [۱۹] $(HWCM)$ ، توابع جعبه ساده [۲۰] را بکار می‌برند. بنابراین فرموله کردن روش عددی بر اساس موجک‌های هار، آسان است و عملیات دستی کمتری دارد.

ب) به علت ویژگی‌های تقریبی بهتر موجک‌های لژاندر، روش هم‌محلی موجک‌های لژاندر [۲۱] $(LWCM)$ جواب دقیق‌تری نسبت به $HWCM$ و دیگر روش‌ها می‌دهد.

ج) هر دو روش $HWCM$ و $LWCM$ دقت را برای حل مشتق‌های مربوط به خود حفظ می‌کنند.

د) کاربردهای روش $HWCM$ و $LWCM$ در انواع مختلفی از شرایط مرزی در $EPDE$ها آسان است و نتایج آنها دقیق می‌باشند.

این پایان‌نامه در چهار فصل ارائه شده است؛ فصل اول تعاریف اولیه، فصل دوم معرفی موجک‌های هار و لژاندر، فصل سوم روش‌های هم‌محلی بر اساس موجک‌های هار و لژاندر و فصل چهارم نتایج عددی.

[۱۹] Haar Wavelet Collocation Method
[۲۰] simple box functions
[۲۱] Legendre Wavelet Collocation Method

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه