بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی(M.Sc)

گرایش: آنالیزعددی

عنوان:

مطالعه مقایسه ای انتگرال گیری عددی بر اساس موجک هار و توابع ترکیبی

استاد راهنما:

آقای دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

استاد مشاور:

آقای دکتر حجت ا.. ادیبی

پژوهشگر:

سیداحمد میرعابدینی

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم ...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرم

مادرم

استادانم

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی‌کران به درگاه خداوند که به انسان حکمت، تفکر، تعقل و ... عطا کرد تا بتواند در پدیده‌های عالم هستی تأمل کند.

در جریان مطالعه و تحقیقاتی که منجر به پیدایش این پایان نامه گردید از دانش و راهنمایی‌های اساتید ارجمند و همکاری دوستان بزرگواری بهره جویی شده که فراهم آمدن این پایان نامه در حقیقت وامدار ایشان است. بدیهی است که مسئولیت هرگونه لغزشی بر عهده اینجانب می‌باشد.

لازم می‌دانم که صمیمانه ترین تشکرات خود را از استاد راهنمای گرانقدر و ارجمندم جناب آقای دکتر «فریبرزی عراقی» بنمایم که در تهیه و تدوین این پایان نامه راهنمایی‌های عالمانه و دلسوزانه ای ارائه نمودند و متحمل زحمات بی شائبه ای شدند و در تعلیم بنده از هیچ کاری مضایقه ننمودند.

همچنین از اساتید عزیز و گرامی، جناب آقای دکتر «ادیبی» مشاور و آقای دکتر «امیرفخریان» که داور این پاین نامه هستند و در طول مدت تحصیلی از ایشان آموزه های بسیاری فراگرفتم، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

و بر خود واجب می دانم که از کلیه اساتید محترم گروه ریاضی که مشوق اینجانب بوده‌اند و الگوهای علمی و عملی بنده می‌باشند، سپاس‌گذاری کرده و برای همه‌ی این بزرگواران آرزوی سعادت، توفیق و سلامتی دارم.

سیداحمد میرعابدینی

زمستان ۱۳۹۰

بسمه تعالی

تعهد اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب سیداحمد میرعابدینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آنالیز عددی با شماره دانشجویی ۸۸۰۶۵۱۱۰۹۰۰ اعلام می نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان " **مطالعه مقایسه ای انتگرال گیری عددی بر اساس موجک هار و توابع ترکیبی** " حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم، طبق ضوابط و رویه های جاری، آنرا ارجاع داده و در فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده ام. علاوه بر آن تاکید می نماید که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح، پایین تر یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آنرا بپذیرم.

سیداحمد میرعابدینی

بسمه تعالی

در تاریخ : ۱۳۹۰/۱۱/۱۶

دانشجوی کارشناسی ارشد، آقای **سیداحمد میرعابدینی** از پایان نامه خود

دفاع نموده و با نمره **۱۸** به حروف **هجده** و با درجه

مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

فهرست مطالب

چکیده :

در این پایان نامه و کار تحقیقاتی موضوع تقریب یک انتگرال معین با استفاده از قاعده های کودراتور بر اساس موجک های هار یکنواخت و توابع هیبریدی مورد بررسی قرار می گیرد. الگوریتم مطرح شده بر اساس این موجک به راحتی قابل توسعه برای محاسبه تقریبی انتگرال های دوگانه، سه گانه و انتگرالهای ناسره است. مزیت اصلی روش کارایی آن و قابلیت به کارگیری ساده آن است. تخمین های خطا روش ارائه شده با اجرای مثال های عددی مورد مطالعه قرار گرفته و همگرایی و دقت روش نیز مورد بررسی قرار خواهند گرفت.به کار گیری توابع هیبریدی منجر به همگرایی سریعتر از موجک های هار می گردد و به ویژه در حالت ناپیوستگی به شکل بهتری نسبت به موجک های هار می تواند مدلسازی شوند. همچنین با به کارگیری توابع هیبریدی می توان مرتبه توابع موسوم به بلوکی-ضربه ای[۱] و چندجمله ای های لژاندر را قابل تنظیم نمود تا جواب های عددی حاصل دقت بالایی را در مقایسه با سایر توابع رایج داشته باشند. تا کنون توابع هیبریدی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات انتگرال مورد استفاده قرار گرفته اند.

---

[۱] Block Pulse

مقدمه :

انتگرال گیری عددی کاربرد های فراوانی در علوم و علوم مهندسی دارد. در سال های اخیر موجک در حال تبدیل شدن به روشی محبوب در زمینه تقریب عددی است. از انواع مختلف موجک و توابع تقریبی در تقریب عددی استفاده می شود. در میان آنها موجک هار [18] و توابع ترکیبی [14] با توجه به خواص مفید خود در میان محققان محبوبیت بدست آورده اند. در اغلب موارد، زیبایی تقریب موجک هزینه محاسباتی الگوریتم را تحت الشعاع قرار می دهد. موجک هار ساده ترین موجک متعامد نرمال است و در مسایل مختلف عددی مورد استفاده قرار می گیرد. هسیاو[۲] و چن [۳] [18] ماتریس عملگر انتگرال گیری بر پایه این موجک ها و کاربرد آن در آنالیز دستگاه های پارامتر تکه ای و پارامترهای پویا منتشر کردند. در مقاله ای دیگر هسیاو و چن [16] نشان دادند که ماتریس عملگر انتگرال گیری موجک هار در میان توابع متعامد برای شناسایی جواب و بهینه سازی مسایل دستگاه های پویا سریع تر می باشد. هسیاو و وانگ [۴] [17] یک الگوریتم بر اساس موجک های هار برای حل دستگاه های سخت غیرخطی و هسیاو [15] یک الگوریتم بر اساس موجک های هار برای حل دستگاه های سخت خطی ارائه دادند. لپیک[۵] [22] از موجک هار در حل معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. لپیک و تامه[۶] [23,25] از موجک هار برای حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی استفاده کردند. مالک نژاد و میرزایی [29] حل معادلات انتگرال خطی با استفاده موجک هار ، لپیک [26,27] از موجک هار در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده کرد.
به کار گیری توابع هیبریدی منجر به همگرایی سریعتر از موجک های هار می گردد و به ویژه در حالت ناپیوستگی به شکل بهتری نسبت به موجک های هار می تواند مدلسازی شوند. [40]. یکی دیگر از خصوصیات مفید توابع ترکیبی ماتریس ضرایب ویژه و رابطه ضرایب ماتریس با مرتبه بهین است. همچنین با به کارگیری توابع هیبریدی می توان مرتبه توابع موسوم به بلوکی-ضربه ای و چندجمله ای های لژاندر را قابل تنظیم نمود تا جواب های عددی حاصل دقت بالایی را در مقایسه با سایر توابع رایج داشته باشند[14]. تا کنون توابع هیبریدی در حل

---

۲ Hsiao
۳ Chen
۴ Wang
۵ Lepik
۶ Tamme

معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات انتگرال مورد استفاده قرار گرفته اند. مرزبان و رزاقی [30] توابع ترکیبی را برای بدست آوردن جواب عددی یک کنترل نوسان ساز خمیده بکار بردند. [31] توابع ترکیبی برای مسایل مقدار اولیه غیرخطی مورد استفاده قرار گرفت. مرزبان [14]توابع ترکیبی را برای حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم نوع دوم بکار بردند. مرزبان و رزاقی [32] از توابع ترکیبی برای پیدا کردن کنترل بهینه دستگاه های تاخیری خطی استفاده کردند.

با توجه به عملکرد بسیار خوب این روش ها، در این پایان نامه و کار تحقیقاتی تکنیکی شبیه را برای حل عددی انتگرال بکار می بریم.

این پایان نامه دارای پنج فصل می باشد که به ترتیب به شرح زیر می باشد. فصل یک شامل دو بخش می باشد که در بخش اول به معرفی چندجمله ای های متعامد و خواص و ویژگی های آن ها و در بخش دوم انتگرال گیری عددی و روش های انتگرال گیری نیوتن-کاتس و انتگرال گیری گاوس پرداخته شده است. در فصل دو تعریف موجک، انواع موجک و خواص و ویژگی های آن ها ارائه شده است. فصل سه در رابطه با توابع بلوکی ضربه ای ، چندجمله ای های لژاندر، توابع ترکیبی لژاندر و خواص و ویژگی های این توابع می باشد. فصل چهار شامل روش های انتگرال گیری عددی با استفاده از موجک های هار و توابع ترکیبی لژاندر برای انتگرال های ساده، دوگانه و سه گانه می باشد. در فصل پنج مثال های عددی و مقایسه ای بین روش های ارائه شده در فصل چهار پرداخته شده است.

فصل اول

انتگرال گیری عددی[۷]

۷ Numerical Integration

۱-۱) چند جمله ای های متعامد[۸][12-13,39,33,8]

۱-۱-۱) تعریف چندجمله متعامد

تعریف۱-۱- فرض کنیم $\mathrm{w}(x)$ بر $[a\,,b]$ تعریف شده باشد. تابع $\mathrm{w}(x)$ را یک تابع وزن[۹] بر $[a\,,b]$ می‌گوییم هرگاه :

۱) برای هر x در $[a\,,b]$ داشته باشیم $\mathrm{w}(x) \geq 0$

۲) انتگرال های $n = 0,1,2,\dots$ و $\int_a^b x^n\, w(x)dx = \mu_n$ موجود و متناهی باشند

۳) $\mu_n \geq 0$

تعریف۲-۱- فرض کنیم توابع حقیقی f و g بر بازه $[a\,,b]$ تعریف شده باشند و تابع w نیز یک تابع وزن بر $[a\,,b]$ باشد در این صورت حاصلضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن w بر $[a\,,b]$ چنین تعریف می‌شود:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b w(x)\, f(x)g(x)dx \qquad (۱-۱)$$

با توجه به این تعریف داریم :

$$\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle \qquad (۲-۱)$$

$$\langle f,g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle \qquad (۳-۱)$$

$$\langle \mathrm{cf},\mathrm{g}\rangle = \langle \mathrm{f},\mathrm{cg}\rangle = \mathrm{c}\,\langle \mathrm{f},\mathrm{g}\rangle \quad (\text{ثابت } \mathrm{c}) \qquad (۴-۱)$$

---

۸ Orthogonal Polynomials
۹ Weight Function

تعریف ۳-۱- دنباله توابع $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ را نسبت به تابع وزن w بر $[a\ ,b]$ متعامد می‌گوییم هرگاه برای $i, j = 0,1,2, \ldots$ داشته باشیم :

$$\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = 0 \qquad i \neq j \tag{۱-۵}$$

و متعامدیکه[10] می‌گوییم در صورتیکه

$$\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = 1 \qquad i = j \tag{۱-۶}$$

لم ۱-۱- یک m وجود دارد بطوریکه اگر فرض کنیم دنباله ای از توابع $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ به گونه ای باشند که Φ_n دقیقا از مرتبه n باشد. اگر Φ_n چندجمله ای دلخواه از درجه دلخواه باشد در این صورت Φ_n را می‌توان به صورت ترکیب خطی[11] از $\Phi_0\ , \Phi_1, \Phi_2\ , \ldots , \Phi_m$ نوشت. $(m \leq n)$

اثبات: [39] ■

لم ۲-۱- فرض کنیم $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله ای از توابع باشد بطوریکه Φ_n دقیقا از مرتبه n باشد در این صورت $\{\Phi_n\}$ یک مجموعه متعامد نسبت به تابع وزن w بر $[a\ ,b]$ است اگر و تنها اگر به ازای هر عدد طبیعی n و به ازای هر $m = 0,1,2, \ldots , n-1$ داشته باشیم :

$$\langle \Phi_n(x), x^m \rangle = \int_a^b w(x)\, \Phi_n(x)\, x^m\, dx = 0 \tag{۱-۷}$$

اثبات :

کفایت : فرض کنیم رابطه (۱-۷) برقرار باشد و Φ_n و Φ_m دو چندجمله ای دلخواه باشند که هرگاه $m \neq n \quad , \ m < n$

$$\Phi_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{۱-۸}$$

---

[10] Orthonormal
[11] Linear Combination

در این صورت

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \langle \Phi_n(x), a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \rangle$$

$$= a_m \langle \Phi_n(x), x^m \rangle + a_{m-1} \langle \Phi_n(x), x^{m-1} \rangle + \cdots + a_1 \langle \Phi_n(x), x \rangle + a_0 \langle \Phi_n(x), 1 \rangle$$

$$= a_m \times 0 + a_{m-1} \times 0 + \cdots + a_1 \times 0 + a_0 \times 0 = 0$$

لزوم : فرض کنیم $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد باشد ثابت می‌کنیم رابطه (۱-۷) برقرار است

طبق لم ۱-۱ به ازای هر عدد طبیعی m اعداد $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ وجود دارند بطوریکه

$$x^m = c_0 \Phi_0(x) + c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) + \cdots + c_m \Phi_m(x) \tag{۱۱-۱}$$

در این صورت به ازای هر n که $m < n$:

$$\langle \Phi_n(x), x^m \rangle = c_0 \langle \Phi_n(x), \Phi_0(x) \rangle + c_1 \langle \Phi_n(x), \Phi_1(x) \rangle + \cdots + c_m \langle \Phi_n(x), \Phi_m(x) \rangle$$

(۱۲-۱)

که با توجه به تعریف چندجمله ای متعامد داریم

$$\langle \Phi_n(x), x^m \rangle = 0 \tag{۱۳-۱}$$

لم ۳-۱- اگر w یک تابع وزن بر $[a , b]$ باشد در این صورت دنباله $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ از چند جمله ای ها چنان وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند

۱) $\langle \Phi_n(x), \Phi_m(x) \rangle = \delta_{mn}$

۲) $\Phi_n(x)$ دقیقا از مرتبه n است

۳) $k_n > 0$ ضریب بزرگترین توان x در $\Phi_n(x)$

اثبات: [39,8] ■

۱-۱-۲) ویژگی های چندجمله ای های متعامد[32]

فرض کنیم $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعه ای از چندجمله ای های متعامد نسبت به تابع وزن w بر $[a\ ,b]$ باشد در این صورت دنباله ای از چندجمله ای های Φ_n وجود دارد که

$$\forall\, n : deg\Phi_n \leq n \qquad (۱۴-۱)$$

همچنین می‌توانیم دنباله ای بسازیم که خواص اضافی زیر را داشته باشد

۱) $\forall n\ \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle = 1$

۲) ضریب x^n در $\Phi_n(x)$ مثبت است

قضیه ۵-۱- فرض کنیم $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعه ای از چندجمله ای های متعامد نسبت به تابع وزن w بر $[a\ ,b]$ باشد در این صورت به ازای هر n ، $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ مستقل خطی[۱۲] اند.

اثبات :

فرض کنیم

$$a_0\Phi_0 + a_1\Phi_1 + \cdots + a_n\Phi_n = 0 \qquad (۱۵-۱)$$

و $0 \leq k \leq n$ عدد صحیح و دلخواهی باشد طرفین رابطه (۱-۱۵) را در $w\ \Phi_k$ ضرب کرده و با انتگرال گیری از رابطه حاصل زیر بدست می آوریم :

[۱۲] Linear Independence

$$\int_a^b (a_0\Phi_0 + a_1\Phi_1 + \cdots + a_n\Phi_\mathrm{n})\, w\, \Phi_k\, dx = 0 \qquad (۱۶-۱)$$

و در نتیجه

$$a_0\langle\Phi_k,\Phi_0\rangle + a_1\langle\Phi_k,\Phi_1\rangle + \cdots + a_{k-1}\langle\Phi_k,\Phi_{k-1}\rangle + a_k\langle\Phi_k,\Phi_k\rangle + \cdots + a_n\langle\Phi_k,\Phi_n\rangle = 0$$

(۱۷-۱)

و بنابراین

$$a_k\langle\Phi_k,\Phi_k\rangle = 0 \qquad (۱۸-۱)$$

یعنی

$$a_k \int_a^b w(x)\Phi_k^2(x)dx = 0 \qquad (۱۹-۱)$$

بنابراین با توجه به تعریف تابع وزن w و Φ_n یک چندجمله ای از درجه k است، $a_k = 0$ پس به ازای هر n ، $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_\mathrm{n}$ مستقل خطی اند.

■

قضیه ۶-۱- فرض کنیم Φ_m یک چندجمله ای دلخواه از درجه m باشد در این صورت داریم:

$$\Phi_m = c_0\Phi_0 + c_1\Phi_1 + \cdots + c_m\Phi_m \qquad (۲۰-۱)$$

که در آن

$$c_k = \frac{\langle\Phi_m,\Phi_k\rangle}{\langle\Phi_k,\Phi_k\rangle} \qquad 0 \le k \le m \qquad (۲۱-۱)$$

اثبات : طبق لم ۱-۱ داریم

$$\Phi_m = c_0\Phi_0 + c_1\Phi_1 + \cdots + c_m\Phi_m \qquad (۲۲-۱)$$

با ضرب $w(x)\Phi_k(k)$ در طرفین رابطه (۱-۲۲) و انتگرال گیری روی $[a,b]$ داریم

$$\int_a^b w(x)\Phi_m(x)\,\Phi_k(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (c_0\,w(x)\Phi_0(x)\Phi_k(x) + \cdots + c_m w(x)\Phi_m(x)\Phi_k(x))\,dx$$

بنابراین

$$\langle\Phi_m,\Phi_k\rangle = c_0\langle\Phi_m,\Phi_k\rangle + c_1\langle\Phi_1,\Phi_k\rangle + \cdots + c_m\langle\Phi_m,\Phi_k\rangle$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + c_k\langle\Phi_k,\Phi_k\rangle + 0 + \cdots + 0$$
$$\langle\Phi_m,\Phi_k\rangle = c_k\langle\Phi_k,\Phi_k\rangle$$

در نتیجه

$$c_k = \frac{\langle\Phi_m,\Phi_k\rangle}{\langle\Phi_k,\Phi_k\rangle} \qquad (۱-۲۳)$$

(توجه داریم که با توجه به استقلال خطی Φ_k ها و $\int_a^b w(x)\,dx$ ناصفر بودن مخرج بدیهی است)

■

قضیه ۷-۱- رابطه بازگشتی[۱۳] سه جمله ای[8,39]

چندجمله ای های متعامد در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$\Phi_n = \left(\frac{k_n}{k_{n-1}}x + B_n\right)\Phi_{n-1}(x) - C_n\Phi_{n-2}(x) \qquad (۱-۲۴)$$

که در آن

[۱۳] Recursive

$$\Phi_n(x) = k_n x^n + \cdots$$

اثبات :

می دانیم چند جمله ای $\Phi_n(x) - \frac{k_n}{k_{n-1}}\, x\, \Phi_{n-1}(x)$ حداکثر از درجه$n-1$ است.

بنابراین طبق قضیه ۶-۱ :

$$\Phi_n(x) - \frac{k_n}{k_{n-1}}\, x\, \Phi_{n-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu \Phi_\nu(x) \qquad (۲۵-۱)$$

در این صورت اگر $0 \le j \le n-1$

$$\langle \Phi_n(x) - \frac{k_n}{k_{n-1}}\, x\, \Phi_{n-1}(x), \Phi_j(x)\rangle =$$

$$\langle \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu \Phi_\nu(x), \Phi_j(x)\rangle = \alpha_j \langle \Phi_j(x), \Phi_j(x)\rangle \qquad (۲۶-۱)$$

از طرف دیگر

$$\langle \Phi_n(x) - \frac{k_n}{k_{n-1}}\, x\, \Phi_{n-1}(x), \Phi_j(x)\rangle = \langle \Phi_n, \Phi_j(x)\rangle - \frac{k_n}{k_{n-1}} \langle \Phi_{n-1}, x\, \Phi_j(x)\rangle$$

(۲۷-۱)

بنابراین اگر $j \le n-2$ در این صورت

$$deg\left(x\, \Phi_j(x)\right) \le \mathrm{n} - 2 \qquad (۲۸-۱)$$

و هر دو جمله سمت راست رابطه (۱-۲۷) صفر می‌شوند. پس

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-3} = 0 \qquad (۲۹-۱)$$

در نتیجه