بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان‌نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک گرایش نظری

نقش زمان ناهمدوسی تک کیوبیتی
در
محاسبات کوانتومی بی‌دررو

استاد راهنما:
دکتر اسفندیار فیضی

استاد مشاور:
دکتر یحیی اکبری

پژوهشگر:
مهدی تقوی

اسفند ۱۳۹۰
تبریز– ایران

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان و

به پاس محبت های بی دریغشان تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و به پاس فداکاری های همیشگیش تقدیم به

همسر مهربانم

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که نور شناختش را به قلب ما تابانید و شکرش را بر وجودمان الهام فرمود. دروازه بی‌پایان دانش به پروردگاریش را، بر ما گشود و ما را به وادی پر فیض توحید خالصانه‌اش راهبری نمود.

مایه بسی افتخار است که مراتب تقدیر و تشکر خود را از استاد گرامی جناب آقای دکتر فیضی که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای تهیه این پایان‌نامه در طول یک سال گذشته بهره‌مند شده‌ام ابراز دارم. از مدیرگروه و مشاور محترم، استاد گرامی جناب آقای دکتر اکبری تشکر ویژه دارم. از استاد محترم جناب آقای $M.H.S.\ Amin$ از $D-Wave\ Systems\ Inc.$ تشکر ویژه دارم که اطلاعات ارزشمند خود را در اختیار من گذاشتند و به همه سوالاتم پاسخ دادند. نیز بر خود می‌دانم از بذل توجه و تامل داور گرامی جناب آقای دکتر فیروزنیا سپاسگزاری کنم. از خواهران مهربانم که همواره مشوق و یاریگر من بوده‌اند، تشکر می‌کنم.

مهدی تقوی

اسفند ۱۳۹۰

تبریز– ایران

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده ..... یک

پیشگفتار ..... دو

فصل ۱: مقدمه‌ای بر نظریه اطلاعات کوانتومی ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ سیستم‌های کوانتومی و کیوبیت‌ها ۲

۳.۱ ماتریس چگالی ۵

٤.۱ حالت‌های خالص و مختلط ۸

۵.۱ خالص‌سازی ۹

٦.۱ کره بلوخ ۱۰

۷.۱ اندازه‌گیری حالت یک کیوبیت ۱۲

۸.۱ تجزیه اشمیت ۱٤

۹.۱ درهم‌تنیدگی ۱۵

۱.۹.۱ بردارهای درهم‌تنیده ۱۵

۲.۹.۱ درهم‌تنیدگی کوانتومی حالات آمیخته ۱۶

۳.۹.۱ معیار درهم‌تنیدگی ۱۷

فصل ۲: تقریب آدیاباتیک و تئوری لاندا- زنر ۱۸

۱.۲ مقدمه ۱۸

۲.۲ قضیه آدیاباتیک ۱۸

۳.۲ الگوریتم کوانتومی آدیاباتیک ۲۱

٤.۲ الگوریتم جستجوی گرور ۲٤

۵.۲ الگوریتم جستجوی کوانتومی آدیاباتیک ۲۹

٦.۲ تئوری لاندا- زنر ۳۱

فصل۳: فرمالیسم $Bloch - Redfield$ برای کیوبیت‌ها و مدل $Ising$. ۳۵

۱.۳ فرمالیسم $Bloch - Redfield$ برای کیوبیت‌ها ۳۵

۲.۳ توابع بستگی زمان وتقریب مارکوف ۳۸

۳.۳ معادله آسایش، تقریب $Secular$ ٤۰

۱.۳.۳ هامیلتونین مستقل از زمان ٤۰

۲.۳.۳ هامیلتونین وابسته به زمان ٤٣

٤.٣ سیستم تک کیوبیته ٤٥

٥.٣ پایه‌های انرژی ٤٧

٦.٣ دینامیک‌های کیوبیت ٥١

١.٦.٣ جفت‌شدگی از طریق مولفه Z با محیط $(\epsilon = ٠)$ ٥١

٢.٦.٣ جفت‌شدگی از طریق مولفه Z با محیط $(\epsilon \neq ٠)$ ٥٢

٧.٣ قاعده طلایی و معادلات بلوخ ٥٣

٨.٣ مدلی برای محیط ٥٤

٩.٣ زمان آسایش و ناهمدوسی برای محیط اتلافی اهمی ٥٥

١٠.٣ مدل $Ising$ ٥٦

١١.٣ مساله جستجوی آدیاباتیک گرور و جفت‌شدگی طولی ٦٧

منابع و مأخذ ٧١

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ٧٤

چکیده

محاسبات کوانتومی بی‌دررو مدل جذابی از محاسبات کوانتومی است که مبتنی بر روش هامیلتونینی است. در این نوع محاسبات، مساله محاسباتی در یک سیستم فیزیکی مناسب کدگذاری می‌شود به طوری که حالت پایه، جواب مساله مورد نظر باشد. با در نظر گرفتن یک سیستم $Ising$ با تعداد نه کیوبیت که به محیط اهمی جفت شده است، ما تحول زمانی یک کامپیوتر کوانتومی بی‌دررو را در حضور این محیط در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که زمان محاسبه نظیر زمان محاسبه برای یک سیستم ایزوله است و توسط زمان ناهمدوسی تک کیوبیته محدود نمی‌شود. برای گاف انرژی کوچک، سیستم مورد نظر می‌تواند بوسیله مدل دوحالته موثر که بصورت طولی به محیط جفت شده است در نظر گرفته شود.

کلمات کلیدی: محاسبات کوانتومی بی‌درو، محیط اهمی مارکووین، سیستم $Ising$، کیوبیت، زمان ناهمدوسی

پیشگفتار

پردازش ماشینی اطلاعات، در هر شکلی، بر مبنای دیجیتال و محاسبات کلاسیک انجام می‌شود. اما کمتر از یک دهه است که روش بهتر و قدرتمندتر دیگری برای پردازش اطلاعات پیش رویمان قرار گرفته که بر اساس مکانیک کوانتومی می‌باشد. این روش جدید با ویژگی‌هایی همراه است که آن را از محاسبات کلاسیک بسیار متمایز می‌سازد. در واقع پس از سپری شدن مدت زمان طولانی از تولد تئوری اطلاعات، فهمیده شد که فیزیک کوانتومی بطور موثری پردازش اطلاعات و محاسبات دیجیتالی را تغییر می‌دهد. مکانیک کوانتومی مثال‌های محاسباتی جدیدی را پیش رو قرار می‌دهد که پیش‌تر از ۱۹۸۰ متصور نبود و قدرت آن تا اواسط ۱۹۹۰ بطور کامل مورد توجه قرار نگرفته بود. از میانه سال ۱۹۷۰ به بعد، دانشمندان سوالاتی را در مورد ارتباط بین فیزیک و محاسبات مطرح کردند. در ابتدا این تلاش‌ها برای فهمیدن ترمودینامیک محاسبات کلاسیکی متمرکز شده و سوالاتی نظیر چه مقدار انرژی لازم است تا یک محاسبه ویژه انجام شود یا زمانی که یک بیت از حافظه پاک می‌شود چه مقدار انرژی اتلاف می‌شود، مطرح گردید[۹]. در سال ۱۹۸۰ فاینمن[۱] پیشنهاد کرد که یک کامپیوتر کوانتومی که بر اساس منطق کوانتومی[۲] طراحی شده باشد برای شبیه‌سازی سیستم‌های کوانتوم- مکانیکی مناسب است[۱۱,۱۲]. ایده‌های وی زمینه تحقیقی وسیعی را در فیزیک ایجاد کرد. در سال ۱۹۹٤، شُر[۳]، الگوریتم کوانتومی را مطرح کرد که بطور موثری مساله تجزیه به اعداد اول را حل می‌کرد که حل این مساله برای کامپیوترهای کلاسیکی بسیار سخت می‌نمود[۱۳].

کامپیوترها هم نظیر هر سیستم محاسباتی دیگر دارای یک پایه اطلاعاتی‌اند که نماینده کوچک‌ترین میزان اطلاعات قابل نمایش، چه پردازش شده و چه خام می‌باشد. در محاسبات کلاسیک این واحد ساختاری را بیت می‌نامیم که گزیده واژه عدد دودویی است زیرا می‌تواند تنها یکی از دو رقم مجاز صفر و یک را در خود نگه دارد. به عبارت دیگر هر یک از ارقام یاد شده در محاسبات کلاسیک، کوچک‌ترین میزان اطلاعات قابل نمایش محسوب می‌شوند. پس سیستم‌هایی هم که برای این مدل وجود دارند باید بتوانند به نوعی این مفهوم را عرضه کنند. در محاسبات کوانتومی هم چنین پایه‌ای معرفی می‌شود که آن را کیوبیت[٤] یا بیت کوانتومی می‌نامیم[۲۱].

---

[۱] R. P. Feynman
[۲] Quantum logic
[۳] P. W. Shor
[٤] Qubit

از آنجایی که سیستم‌های فیزیکی می‌توانند به عنوان اطلاعات پردازشی کامپیوترها به حساب آیند، حالت اولیه سیستم فیزیکی به عنوان ورودی بوده و همان طور که کامپیوتر محاسبات را انجام می‌دهد سیستم به حالت نهایی تحول می‌یابد که خروجی کامپیوتر است[۹,۲۱]. این محاسبات طبیعتاً بر اساس یک الگوریتم صورت می‌پذیرد. اخیراً نمونه جدیدی از محاسبات بر پایه تحول آدیاباتیک پیشنهاد شده است. در این نوع الگوریتم بخصوص، حالت حافظه کوانتومی تحت یک هامیلتونین که بطور پیوسته و به آرامی تغییر می‌کند، تحول می‌یابد. در شروع، حالت سیستم در حالت پایه هامیلتونین اولیه است. اگر هامیلتونین سیستم به اندازه کافی به آرامی متحول شود، نظریه آدیاباتیک تضمین می‌کند که حالت نهایی سیستم در حالت پایه هامیلتونین نهایی است[۱۹].

محاسبات کوانتومی ما همواره تحت تاثیر ناهمدوسی است[۳,٤,۹,۱۷]. در اصل، همدوسی بیان کننده خاصیت مکانیک کوانتومی است و می‌توان آن را نظیر خطی در نظر گرفت که بین دنیای کوانتوم و دنیای کلاسیک کشیده شده است. در فیزیک کلاسیک عبارت همدوسی به خاصیت امواج تداخل کننده اشاره دارد که نشان دهنده الگوهای تداخلی است. دو موج بنا به فاز نسبی‌شان می‌توانند تداخل سازنده و یا ویرانگر داشته باشند که تنها فاز نسبی‌شان بیان کننده چگونگی تداخلشان می‌باشد. در مکانیک کوانتومی نیز به طریق موجز ما باید از همدوسی فاز بین حالات کوانتومی صحبت کنیم[۲۰]. قوانین مکانیک کوانتومی این اجازه را به ما می‌دهند که تداخل یک شیء با خودش را بیان و پیش‌بینی کنیم، نظیر حالتی که یک الکترون از دوشکافی عبور می‌کند. در این وضعیت پیش‌بینی می‌کنیم که سیستمی که از دو زیرسیستم کوانتومی تشکیل شده است می‌تواند در حالتی باشد که مانسته کلاسیکی ندارد. دو زیرسیستم می‌توانند در یک برهم‌نهی با یک فاز مشخص باشند. این خاصیت در مکانیک کوانتومی اصطلاحاً درهم‌تنیدگی نامیده می‌شود، و حالات درهم‌تنیده نیاز دارند تا همدوسی فازی[۱] داشته باشند[۳,٤,٦,۲۰]. همدوسی به عنوان یک پدیده مکانیک کوانتومی در دنیای کلاسیک از بین می‌رود. از آنجایی که امکان ندارد یک سیستم را از محیط اطراف آن بطور کامل ایزوله کنیم، سیستم و محیط آن با یکدیگر برهم‌کنش خواهند داشت و آرایش تصادفی فاز سیستم کوانتومی روی خواهد داد که حالت کوانتومی اولیه می‌تواند با حالت کلاسیکی مواجه شود، این فرایند ناهمدوسی نامیده می‌شود.

بدیهی است ناهمدوسی یک بیت کوانتومی به عنوان پایه اطلاعاتی در مکانیک کوانتومی حایز اهمیت فراوان خواهد بود. برای بررسی زمان ناهمدوسی در حضور یک محیط اهمی مارکووین که در

[۱] Phase coherent

آن حافظه‌های برهم‌کنش بصورت سریع از بین می‌رود[۳۱]، سیستمی از اسپین‌های $glass$ در نظر گرفته می‌شود که هر کدام بصورت مجزا به این محیط جفت شده‌اند[۱۸]. می‌توان تحقیق کرد که در این سیستم آیا زمان محاسبات کوانتومی تحت تاثیر زمان ناهمدوسی تک کیوبیته خواهد بود یا نه؟! برای جواب دادن به این سوال تحول زمانی سیستم $Ising$ چند کیوبیته با هامیلتونین اولیه و نهایی مناسب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل‌بندی پایان‌نامه به شرح ذیل است:

در فصل اول ابتدا مفاهیم محاسبات کوانتومی بصورت موجز و مختصر بیان شده است. در فصل دوم قضیه آدیاباتیک و تئوری لاندا- زنر آورده شده است بطریقی که در فصل بعد از آنها استفاده خواهیم کرد. در فصل سوم نیز فرمالیسم $Bloch-Redfield$ برای کیوبیت‌ها و مدل $Ising$ آورده شده است. از این مدل برای بررسی زمان ناهمدوسی تک کیوبیت و تاثیر آن بر زمان محاسبات کوانتومی بهره خواهیم برد.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر نظریه اطلاعات کوانتومی

۱.۱مقدمه

فیزیک کوانتومی مهم‌ترین دستاورد بشر در توصیف طبیعت است. این نظریه که در سال‌های ۱۹۲۷ – ۱۹۲۵ توسط ورنر هایزنبرگ، اروین شرودینگر، ماکس پلانک و چند تن دیگر پایه‌گذاری شد، اساس ادراک امروزی ما از عالم است. به بیان دقیق‌تر مکانیک کوانتومی مجموعه‌ای از قوانین، روابط ریاضی و قوانین فلسفی است که توصیف کننده رفتار ذرات بنیادین تشکیل دهنده عالم است. البته با تعمیم همین قوانین و روابط، می‌توان رفتار تمام سیستم‌های فیزیکی‌ای که پیش از آن بررسی شده بودند را نیز بررسی و تعیین کرد. مکانیک کوانتومی در ابتدای ظهورش بیشتر از آن که به یک نظریه انقلابی شباهت داشته باشد، به نوعی توجیه برای پاره‌ای از بدیهیات تجربی شباهت داشت که با فیزیک کلاسیک قابل بیان نبودند. از اینرو پدیده‌های فیزیک که تا پیش از آن توجیهی برای آن‌ها وجود نداشت مانند رفتار اتم‌ها، مولکول‌ها و ذرات زیراتمی با مکانیک کوانتومی قابل تفسیر شدند. در چند سال اخیر مطالعه مکانیک کوانتومی و اثرات آن در محاسبات مورد توجه قرار گرفته است. فاینمن اولین کسی بود که در این مورد به اظهار نظر پرداخت. او معتقد بود که پدیده‌های کوانتومی نمی‌توانند بطور موثر روی کامپیوترهای کلاسیک شبیه‌سازی شوند. وی استدلال کرد که سیستم‌های کوانتومی برای شبیه‌سازی پدیده‌های کوانتومی بسیار مجهزتر می‌باشند. امروزه پردازش ماشینی اطلاعات بر مبنای دیجیتال و محاسبات کلاسیک انجام می‌شود. اما با پیشرفت مکانیک کوانتومی

روش بهتر و قدرتمندتر دیگری برای پردازش اطلاعات پیش رویمان قرار گرفته است. این روش جدید با ویژگی‌هایی همراه می‌باشد که آن را از محاسبات کلاسیک متمایز می‌سازد. وجود چند پدیده مهم که مختص فیزیک کوانتومی است، بصورت معنی‌داری آن را از دنیای کلاسیک جدا می‌سازد. تعدادی از این پدیده‌ها عبارتنـــد از : برهم‌نهی[۱]، تداخل[۲]، درهم‌تنیدگی[۳]، ناجایگزیدگی[٤]، تکثیرناپذیری[٥].

بنظر می‌رسد پردازش کوانتومی توانایی این را دارد که درک ما را از طبیعت عمیق‌تر کرده و وسیله قدرتمندتری برای ارتباطات و پردازش اطلاعات باشد. در عین حال مفاهیم اصلی و نظری مکانیک کوانتومی برای بدست آوردن روش‌ها و ایده‌های بنیادی بسیار ساده، زیبا و قدرتمند است.

هدف محاسبات کوانتومی مطرح کردن متدها و ابزار لازم برای حل مسایل ریاضیاتی است. محاسبات کوانتومی عیناً نظیر محاسبات کلاسیکی شامل ورودی، محاسبات و خروجی است. در کامپیوترهای کلاسیکی، داده در بیت‌های کلاسیکی ذخیره می‌شوند ولی در دنیای مکانیک کوانتومی ما از بیت‌های کوانتومی یا کیوبیت‌ها استفاده می‌کنیم.

۲.۱ سیستم‌های کوانتومی و کیوبیت‌ها

سه سیستم کوانتومی را در نظر گرفته و آن‌ها را با A، B و C برچسب می‌زنیم. این سیستم‌ها هر کدام فضای هیلبرت با بعد معین دارند و بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که فضای هیلبرت سومی از ضرب تانسوری دو فضای دیگر بدست آید:

$$H = H_A \otimes H_B \qquad (۱.۱)$$

نمادگذاری زیر را داریم:

$$|\psi_A\rangle = \sum_{i=۱}^{M} a_i |e_i\rangle \quad , \quad \{|e_i\rangle\} \in H_A$$

$$|\psi_B\rangle = \sum_{j=۱}^{M} b_j |f_j\rangle \quad , \quad \{|f_j\rangle\} \in H_B \qquad (۲.۱)$$

[۱] Superposition
[۲] Interference
[۳] Entanglement
[٤] Non locality
[٥] Non clonability

از اینرو هر حالت $|\psi\rangle$ در فضای هیلبرت را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j}|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \equiv \sum_{i,j} c_{i,j}|e_i f_j\rangle \in H_A \otimes H_B \qquad (۳.۱)$$

اگر $dim\, H_A = M$ و $dim\, H_B = N$ باشد، دیمانسیون فضای حاصل از دو زیرفضا را می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$dim\, H = MN \qquad (٤.۱)$$

در حالت خاص، یک سیستم دو ترازه در فضای هیلبرت دو بعدی کیوبیت نامیده می‌شود. یک اسپین با جهت‌های بالا و پایین یک سیستم دو ترازه و در نتیجه یک بیت کوانتومی تشکیل می‌دهد و این جهت‌ها را می‌توان پایه‌های فضای دو بعدی در نظر گرفت. از اینرو در فضای هیلبرت مربوط به کیوبیت می‌توان پایه‌های اورتونرمال را چنان انتخاب کرد که کل فضا را جاروب کند. پس داریم:

$$|۰\rangle \equiv \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$|۱\rangle \equiv \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} \qquad (۵.۱)$$

حالت یک کیوبیت بصورت برهم‌نهی از پایه‌های فوق بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi\rangle = a|۰\rangle + b|۱\rangle \quad , \quad a, b \in C \qquad (٦.۱)$$

بنا به بهنجارش a و b طوری انتخاب می‌شوند که شرط زیر را برآورده کنند:

$$|a|^۲ + |b|^۲ = ۱ \qquad (۷.۱)$$

با توجه به مختلط بودن a و b و شرط بهنجارش، می‌توان a و b را بصورت $|a| = cos(\theta/۲)$ و $|b| = sin(\theta/۲)$ برگزید. با توجه به اینکه برای حالات کوانتومی فاز کلی اهمیتی ندارد، حالت یک کیوبیت بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi\rangle = cos(\frac{\theta}{۲})|۰\rangle + e^{i\phi}\, sin(\frac{\theta}{۲})|۱\rangle = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta}{۲}\right) \\ e^{i\phi}\, sin\left(\frac{\theta}{۲}\right) \end{pmatrix} \qquad (۸.۱)$$

که $۰ \leq \theta \leq \pi$ و $۰ \leq \phi \leq ۲\pi$ می‌باشد.

از اینرو بر خلاف حالت کلاسیکی که فقط مقادیر صفر و یک را در بر می‌گیرد، یک بیت کوانتومی می‌تواند بصورت برهم‌نهی از دو حالت بیان شود که بوسیله متغیرهای پیوسته α و β (یا θ و

ϕ) تعیین می‌گردند. از اینرو مکانیک کوانتومی حالات بسیار زیادی را در اختیار ما قرار می‌دهد. ممکن است به نظر آید که یک کیوبیت می‌تواند برای ذخیره مقدار بی‌نهایتی از اطلاعات بکار رود، ولی در واقع ما باید بیت‌های خیلی زیادی را بکار ببریم تا اعداد مختلط α و β را تعیین کنیم. برای استخراج این اطلاعات باید اندازه‌گیری کنیم و مکانیک کوانتومی به ما می‌گوید که از اندازه‌گیری پلاریزاسیون حالت σ_n مربوط به یک کیوبیت در امتداد هر محور n، تنها یک بیت از اطلاعات بدست خواهیم آورد ($\sigma_n = ۱$ یا $\sigma_n = -۱$).

یک سیستم کوانتومی دو ترازه می‌تواند به عنوان یک کیوبیت به کار رود هرگاه:

۱) بتوان آن را در یک حالت خوش‌تعریف آماده کرد، برای مثال در حالتی نظیر $|۰\rangle$.
۲) حالت سیستم، تحت تبدیلات یونیتاری به حالت دیگری تبدیل شود.

حالت یک کیوبیت می‌تواند در پایه‌های محاسباتی $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ اندازه‌گیری شود. این بدان معناست که ما می‌توانیم پلاریزاسیون کیوبیت را در امتداد محور z اندازه‌گیری کنیم. یک عملگر هرمیتی مناسب برای این اندازه‌گیری، عملگر پاولی σ_z با ویژه‌حالات $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ می‌باشد. از اینرو اگر حالت کیوبیت با معادله فوق بیان شود با اندازه‌گیری، ما مقادیر ۰ یا ۱ را (یعنی $\sigma_z = ۱$ یا $\sigma_z = -۱$) با احتمالاتِ

$$p_۰ = |\langle ۰|\psi\rangle|^۲ = cos^۲(\frac{\theta}{۲}) \qquad (۹.۱)$$

$$p_۱ = |\langle ۱|\psi\rangle|^۲ = sin^۲(\frac{\theta}{۲}) \qquad (۱۰.۱)$$

بدست خواهیم آورد.

حالت یک بیت معمولی کامپیوتر کلاسیک با در نظر گرفتن مفهوم باینری بوسیله عدد صحیح $i \in [۰, ۲^n - ۱]$ داده می‌شود،

$$i = i_{n-۱}۲^{n-۱} + \cdots + i_۱۲ + i_۰ \qquad (۱۱.۱)$$

که $i_۰, i_۱, \ldots, i_{n-۱} \in \{۰,۱\}$ اعداد باینری می‌باشند. حالت یک کامپیوتر کوانتومی n – کیوبیته بصورت زیر است:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=۰}^{۲^{n-۱}} c_i|i\rangle$$

$$= \sum_{i_{n-1}=0}^{1} \dots \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_0=0}^{1} c_{i_{n-1},\dots,i_1,i_0} |i_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |i_1\rangle \otimes |i_0\rangle \qquad (12.1)$$

که اعداد مختلط c_i شرط نرمالیزاسیون زیر را برآورده می‌کنند:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |c_i|^2 = 1 \qquad (13.1)$$

از اینرو حالت یک کامپیوتر کوانتومی $n-$کیوبیته یک فضای هیلبرت 2^n-بعدی است که از ضرب تانسوری فضاهای هیلبرت ۲− بعدی بدست می‌آید.

حافظه کامپیوتر کوانتومی می‌بایست چنان باشد که تمام بردارهای فضای هیلبرت آن قابل دسترسی باشند. بنابراین اگر دو کیوبیت را کنار هم بگذاریم به این معنی نیست که یک حافظه دو کیوبیته ساخته‌ایم، زیرا بردارهای فضای هیلبرت دو کیوبیته جداگانه و بصورت زیرند:

$$|\varphi\rangle \otimes |\varphi'\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (a'|0\rangle + b'|1\rangle) \qquad (14.1)$$

یعنی بصورت ضرب تانسوری دو بردار از فضاهای هیلبرت هر کدام از کیوبیت‌ها نوشته می‌شوند و حال آنکه در فضای هیلبرتِ دو کیوبیت یعنی $(c^2)^{\otimes n}$ بردارهایی وجود دارند که بصورت فوق قابل نوشتن نیستند، مثل بردار $|\varphi\rangle = (1/2)(|00\rangle + |11\rangle)$. این نوع بردارها را اصطلاحاً درهم‌تنیده می‌نامیم. برای آنکه یک بردار کلی به شکلِ

$$a|00\rangle + b|0\,1\rangle + c|1\,0\rangle + d|11\rangle \qquad (15.1)$$

بصورت حاصلضرب تانسوری دو بردار نوشته شود می‌بایست شرط $ad - bc = 0$ برقرار شود. بنابراین بردارهایی که بصورت حاصلضرب تانسوری هستند مجموعه‌ای با اندازه صفر را در فضای هیلبرت دو کیوبیت تشکیل می‌دهند.

۳.۱ ماتریس چگالی

فرض کنید دو ذره با اسپین ۱/۲ داریم و این دو ذره در حالت زیر قرار دارند:

$$|\psi\rangle_{AB} = a|+,+\rangle + b|+,-\rangle + c|-,+\rangle + d|-,-\rangle \qquad (16.1)$$

آیا می‌توانیم بپرسیم حالت ذره A چیست؟ اگرچه این دو ذره در حالت مشخصی قرار دارند ولی نمی‌توان به ذره A بردار حالت مشخصی نسبت داد. در این مورد خاص و موارد دیگر که سیستم مورد نظر ما جزیی از سیستم بزرگتر است، حالت سیستم با یک ماتریس چگالی مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم که دو سیستم کوانتومی A و B در یک حالت کوانتومی مشخص $|\psi\rangle_{AB}$ قرار دارند که بر حسب بردارهای پایه فضای هیلبرت مربوط به سیستم A و B بسط آن به شکل زیر است:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} |i,j\rangle \qquad (۱۷.۱)$$

در این صورت

$$\rho_A = Tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \qquad (۱۸.۱)$$

خواهد بود که ρ_A جانشین حالت کوانتومی دستگاه A می‌باشد. می‌توان فرم صحیح‌تر ماتریس چگالی را با توجه به رابطه (۱۷.۱) به شکل زیر نوشت:

$$\rho_A = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |i\rangle\langle j| \ , \qquad (۱۹.۱)$$

حال عملگر $A = \rho O$ را در نظر می‌گیریم که از ضرب ماتریس چگالی حالت خالص و عملگر هرمیتی O تشکیل شده است. اگر ویژه‌حالت $|o_i\rangle$ از O را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$Tr(\rho O) = \sum_i \langle o_i|(|\psi\rangle\langle\psi|)O|o_i\rangle = \sum_i o_i \, |\langle o_i|\psi\rangle|^2 \qquad (۲۰.۱)$$

فلذا داریم:

$$\langle O\rangle = Tr(\rho O). \qquad (۲۱.۱)$$

علاوه بر این اگر $\{|\psi_k\rangle\}$ و $\{|\varphi_l\rangle\}$ پایه‌های اورتونرمالِ فضاهای هیلبرت H_A و H_B مربوط به سیستم‌های A و B باشند و اگر مشاهده‌پذیرهایی که روی سیستم A اثر می‌کنند را در نظر بگیریم، $O = O_A \otimes I_B$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle O\rangle &= Tr(\rho O) \\ &= \sum_{k,l} \langle\varphi_l|\langle\psi_k|\rho(O_A \otimes I_B)|\psi_k\rangle|\varphi_l\rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_k \langle\psi_k|(Tr_B\rho)O_A|\psi_k\rangle$$

$$\equiv \sum_k \langle\psi_k|\rho_A O_A|\psi_k\rangle$$

$$= Tr_A(\rho_A O_A). \qquad (۲۲.۱)$$

در کل، ماتریس چگالی در بر دارنده تمام اطلاعاتی است که ما می‌توانیم از سیستم کسب کنیم. اگر p_i احتمال یافته شدن سیستم در حالت i باشد، ماتریس چگالی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad , \quad \sum_i p_i = ۱. \qquad (۲۳.۱)$$

یک ماتریس چگالی دارای خواص زیر است:

الف) ماتریس چگالی ρ یک عملگر هرمیتی است، یعنی $\rho = \rho^\dagger$.

اثبات: هر حالت خالص روی پایه‌های اورتوگونال می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$|\psi_k\rangle = \sum_i c_i|i\rangle \qquad (۲٤.۱)$$

در این صورت داریم:

$$\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle = \sum_k p_k\langle i|\psi_k\rangle\langle\psi_k|j\rangle \qquad (۲۵.۱)$$

با نوشتن $|\psi_k\rangle$ در پایه‌های اورتوگونال داریم:

$$\rho_{ij} = \sum_k\sum_{l,m} p_k c_l c_m^*\langle i|l\rangle\langle m|j\rangle \qquad (۲٦.۱)$$

و با شرط اورتوگونال بودن داریم:

$$\rho_{ij} = \sum_k p_k c_i\, c_j^* \,, \qquad (۲۷.۱)$$

از طرفی دیگر

$$\rho_{ji}^* = \sum_k p_k\, c_j^* c_i \,, \qquad (۲۸.۱)$$

از اینرو ماتریس چگالی ρ یک عملگر هرمیتی است.

ب) $\rho \geq ۰$.

این تعریف هم ارز با $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq ۰$ می‌باشد. به عبارت دیگر تمام ویژه‌مقادیر مثبت‌اند.

اثبات:

$$\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle = \langle\varphi|(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)|\varphi\rangle = \sum_i p_i|\langle\varphi|\psi_i\rangle|^2 \geq 0 \qquad (29.1)$$

ج) $Tr(\rho) = 1$.

اثبات:

$$Tr(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ii} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} p_k|c_i|^2 = \sum_{k=1}^{l} p_k = 1 \qquad (30.1)$$

می‌توان ماتریس چگالی ρ را در پایه‌های خودش نیز نوشت، در این صورت داریم:

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i|e_i\rangle\langle e_i| \qquad (31.1)$$

که در آن N بعد فضای هیلبرت است. رابطه بالا تجزیه طیفی را نشان می‌دهد و بردارهای $|e_i\rangle$ ویژه‌بردارهای ماتریس چگالی می‌باشند که تعداد آن‌ها برابر با بعد ماتریس چگالی یا بعد فضای هیلبرت است. از تجزیه طیفی می‌توان نتیجه گرفت که

$$Tr(\rho^2) = \sum_{i=1} \lambda_i^2 \leq 1\,, \qquad (32.1)$$

که در آن از مثبت بودن λ_i ها و اینکه مجموع همه آن‌ها برابر یک است استفاده کرده‌ایم. از اینرو قضیه زیر را بدست می‌آوریم:

قضیه: حالت ρ یک حالت خالص است اگر و تنها اگر $Tr(\rho^2) = 1$.

د) عناصر قطری ماتریس چگالی (در هر نمایشی) غیرمنفی‌اند.

$$\rho_{nn} = \sum_i P_i\,\langle n|\psi_i\rangle\,\langle\psi_i|n\rangle = \sum_i P_i|\langle n|\psi_i\rangle|^2 \geq 0 \qquad (33.1)$$

٤.١ حالت‌های خالص و مختلط

هرگاه یک سیستم بتواند تنها با یک تابع موج بیان شود گوییم که این سیستم در حالت خالص قرار دارد. بنابر اصول موضوعه مکانیک کوانتومی این سیستم می‌تواند بطور کامل مشخص شود. با

این حال بطور کلی، حالت یک سیستم کوانتومی ممکن است خالص نباشد. آنسامبلی از سیستم‌ها را با یک توزیع احتمالِ حالت‌های مختلف کوانتومی در نظر بگیرید. هرگاه احتمال این که یک سیستم در حالت $|\psi_k(t)\rangle$ باشد با P_k مشخص شود، در این صورت عملگر چگالی بصورت زیر مشخص می‌شود:

$$\rho(t) = \sum_k P_k |\psi_k(t)\rangle \langle\psi_k(t)| \qquad (۳٤.۱)$$

که P_k ها نامنفی‌اند:

$$P_k \geq ۰ \quad , \quad \sum_k P_k = ۱ \, , \qquad (۳۵.۱)$$

هرگاه همه P_k ها بجز یکی از آن‌ها که برای آن $P_k = ۱$ است، صفر باشد، در این صورت سیستم در حالت خالص خواهد بود و می‌تواند تنها با یک تابع موج مشخص شود در غیر این صورت رابطه (۳٤.۱) سیستمی را نشان می‌دهد که حالتش بصورت کامل مشخص نشده است (حالت آمیخته). با تعریف حالت آمیخته داریم:

$$\langle A(t)\rangle = \sum_i P_i \langle\psi_i(t)|A|\psi_i(t)\rangle = Tr[A\rho(t)] \qquad (۳٦.۱)$$

۵.۱ خالص‌سازی

فرض کنید S سیستم مورد نظر ما باشد که با ماتریس چگالی ρ_S در فضای هیلبرت H_S توصیف می‌شود، می‌دانیم که ماتریس چگالی می‌تواند به شکل $\rho_S = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ نوشته شود، ما سیستم دیگری معرفی کرده و آن را *محیط*، E، می‌نامیم (اگرچه لازم نیست که این سیستم جدید معرفی شده دارای نقش فیزیکی ویژه باشد). فرض می‌کنیم که فضای هیلبرت H_E دارای ابعادی نظیر H_S باشد، پایه‌های اورتونرمال $\{|\phi_i\rangle\}$ از H_E را انتخاب می‌کنیم. اگر حالت خالص زیر از سیستم مرکب SE را تعریف کنیم:

$$|\Psi\rangle \equiv \sum_i \sqrt{p_i}|\psi_i\rangle|\phi_i\rangle \qquad (۳۷.۱)$$

در این صورت ماتریس چگالی حالت خالص مربوطه بصورت زیر خواهد بود:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j}|\psi_i\rangle\langle\psi_j| \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_j| \qquad (۳۸.۱)$$