بسم الله الرحمن الرحیم

كليه حقوق مادی مترتب بر نتايج مطالعات، ابتكارات و
نوآوری‌های ناشی از تحقيق موضوع اين پايان‌نامه
متعلق به دانشگاه رازی است.

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:
مطالعه مسئله کوشی برای بعضی معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات کسری ریمان-لیوویل

استاد راهنما:
دکتر سیده مرضیه قویدل

استاد مشاور:
دکتر نعمت اله نیامرادی

نگارش:
محسن طاهرنیا

اسفند ۱۳۹۲

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:
محسن طاهرنیا

تحت عنوان :

مطالعه مسئله کوشی برای بعضی معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات کسری ریمان-لیوویل

در تاریخ ۹۲/۱۲/۱۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر سیده مرضیه قویدل با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

استاد مشاور پایان نامه دکتر نعمت‌اله نیامرادی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

استاد داور داخل گروه دکتر علی فرج زاده با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء:

استاد داور داخل گروه دکتر شاپور حیدرخانی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، سرکار خانم دکتر قویدل صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر نیامرادی که با کفایت و درایت بنده را مورد راهنمایی قرار دادند نهایت تشکر را دارم.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزتر ازجانم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس خواهر،برادر،خواهرزاده و برادرزاده های عزیزم را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

محسن طاهرنیا

اسفند ۱۳۹۲

تقدیم به

روان پاک دایی شهیدم

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم حلال کسری را معرفی می کنیم و بعضی ویژگی های آن را بدست می آوریم. قضیه ای را بیان می کنیم که مشخص می کند تحت چه شرایطی یک عملگر خطی می تواند مولد یک حلال کسری بطور نمایی کراندار باشد. در ادامه معادله کوشی کسری همگن از مرتبه α را مورد بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم این معادله خوش وضع است اگر و تنها اگر عملگر ضریب آن مولد یک حلال کسری از مرتبه α باشد. سپس بحث وجود و یکتایی جواب های قوی معادله غیر همگن مرتبه α را مطالعه می کنیم و درصورتی که عملگر ضریب این معادله مولد یک حلال کسری از مرتبه α باشد، بطور دقیق جواب معادله را مشخص می کنیم.

کلمات کلیدی:

مشتقات کسری ریمان-لیوویل، حلال کسری، خوش وضع، مسئله کوشی.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

۱ **مفاهیم و قضایای مقدماتی** ۱

۱-۱ عملگرهای خطی ۲

۱-۲ انتگرال بوخنر ۳

۱-۳ پیچش(کانولوشن) ۶

۱-۴ تابع گاما ۷

۱-۵ تابع میتاگ-لفلر ۷

۱-۶ انتگرال کسری ریمان-لیوویل ۸

۱-۷ مشتق کسری ریمان-لیوویل ۱۰

۱-۸ تبدیل لاپلاس ۱۱

۱-۹ سری فوریه ۱۴

۱-۱۰ C_0-نیم گروه ۱۴

۲ **حلال های کسری** ۱۷

۲-۱ حلال کسری نوع α ۱۸

۲-۲ شرایط معادل برای مولد حلال کسری نوع α ۲۷

۲-۳ مثال ۴۱

۳ **مسئله کوشی همگن از مرتبه** α ۵۰

۳-۱ وجود و یکتایی جواب ملایم ۵۱

۳-۲ وجود و یکتایی جواب قوی ۵۳

۳-۳ خوش وضعی مسئله کوشی ۵۷

۴ **مسئله کوشی ناهمگن از مرتبه** α ۶۴

۴-۱ وجود و یکتایی جواب ملایم ۶۵

۴-۲ وجود و یکتایی جواب قوی ۶۸

منابع و مآخذ ۸۱
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۳
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۵

پیشگفتار

امروزه نتایج بسیاری از تحقیقات و بررسی ها در عرصه بیولوژی و فیزیک و مهندسی به صورت معادلات با مشتقات کسری مدل بندی می شوند. مسائل کوشی در فیزیک برای مدل بندی پخش غیر متشابه بسیار مفید می باشند. نیگمتولین یک تعمیم معادله پخش از نوع غیر مارکوین به صورت

$$D_t^\alpha u(x,t) = (\partial^۲ u(x,t))/(\partial x^۲), \quad ۰ \le \alpha \le ۲, \tag{۱}$$

را معرفی می کند که در حالت $\alpha = ۰$ یک معادله بیضیگون، در حالت $\alpha = ۱$ یک معادله سهمیگون و در حالت $\alpha = ۲$ یک معادله هذلولیگون می باشد، رجوع شود به [۱۳]. زاسلاوسکی معادله جنبش کسری را برای بی نظمی همیلتون بصورت

$$(\partial^\beta g(x,t))/(\partial t^\beta) = Lg(x,t) + p_۰(x) t^{-\beta}/\Gamma(۱-\beta), \tag{۲}$$

معرفی می کند که در آن $۰ < \alpha < ۱$، L مولد یک نیم گروه خطی $\{T(t)\}_{t\ge ۰}$، $p_۰ \in C^\infty(\mathbb{R}^۱)$ و $\dfrac{\partial^\beta g(x,t)}{\partial t^\beta}$ تبدیل لاپلاس معکوس $S^\beta\, \widetilde{g}(x,s)$ است که در آن

$$\widetilde{g}(x,s) = \int_۰^\infty e^{-st} g(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

می باشد، رجوع شود به [۱۸]. ایدلمن و کوچابی یک معادله تحولی با مشتقات کسری منظم شده از نوع $\alpha \in (۰,۱)$ نسبت به متغیر زمان را بررسی کرده اند، رجوع شود به [۵]. چنین معادله هایی پخش روی فراکتال های ناهمگن را توصیف می کنند. میرسچارت و همکارانش جواب های کلاسیک و قیاس های تصادفی برای مسائل کوشی کسری در دامنه $\mathbb{R}^d$ با شرایط کرانی دریکله را گسترش داده اند، رجوع شود به [۱۲]. ارسینگر و بیگین معادله های پخش کسری از نوع $\alpha \in (۰,۱]$ را بررسی کرده اند، رجوع شود به [۱۴].

مفهوم عملگرهای جواب تعریف شده در [۳] نقش مهمی را در نظریه مسئله کوشی مجرد کسری ایفا می کند. باژلکوا در [۳] مسئله کوشی مجرد کسری

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = Au(t), & t \ge ۰ \\ u(۰) = x, \quad u^k(۰) = ۰, & k = ۱, \dots, m-۱ \end{cases} \tag{۳}$$

که $m = \lceil \alpha \rceil$ و D_t^α عملگر مشتق کسری کاپوتو می باشد را مورد بررسی قرار داده و مفهوم عملگر جواب برای معادله (۳) را معرفی کرده است. در برخی منابع عملگر جواب را خانواده حلال مرتبه αنیز می نامند، به عنوان مثال [۱۰،۱۱] را ببینید. چن و لی در [۴] مفهوم تابع عملگر α-حلال را معرفی می کنند و ثابت می کنند که خانواده $\{S_\alpha(t)_{t\ge ۰}\}$ یک تابع عملگر α-حلال است اگر و تنها اگر یک عملگر جواب برای یک مسئله کوشی کسری باشد. مسائل عملی به تعاریفی از مشتقات کسری نیاز دارند که اجازه دهند از تعابیر شرایط اولیه بطور عملی استفاده شود. شرایط اولیه برای مشتقات کسری کاپوتو

در اصطلاحاتی بوسیله شرایط اولیه مشتقات مرتبه صحیح بیان شده است. اما در مثال هایی از شاخه ویسکولاستیسیتی ، هیمنز و پودلوبنی در [۷] نشان داده اند که این امکان وجود دارد که بتوان آنرا برای شرایط اولیه بیان شده در اصطلاحاتی از مشتقات کسری ریمان-لیوویل یا انتگرال ها به معنای فیزیکی نسبت داد. همچنین می توان مقادیر اولیه را برای چنین شرایطی بوسیله اختصاص دادن اندازه گیری ها بدست آورد .

مطالب این پایان نامه با توجه به [۸] تدوین شده است.

در فصل اول مفاهیم و قضایایی که در فصل های بعدی مورد نیاز می باشند را بیان می کنیم.

در فصل دوم مفهوم حلال کسری نوع α و مولد آن را معرفی می کنیم و به دنبال آن ارتباط بین آنها را بررسی می کنیم. نشان می دهیم حلال کسری نوع α بطور منحصربفرد توسط مولد خود تولید می شود. در ادامه قضیه ای را بیان می کنیم که مشخص می کند تحت چه شرایطی یک عملگر خطی می تواند مولد یک حلال کسری کسری بطور نمایی کراندار باشد و در پایان با ذکر یک مثال، کاربردی از این قضیه را بررسی می کنیم.

در فصل سوم معادله کوشی همگن از مرتبه α را معرفی کرده و برای آن مفهوم جواب ملایم و جواب قوی را معرفی می کنیم. به دنبال آن در مورد وجود و یکتایی جواب ملایم و جواب قوی این معادله بحث می کنیم. در ادامه نشان می دهیم این معادله خوش وضع است اگر و تنها اگر عملگر ضریب آن مولد یک حلال کسری از مرتبه α باشد.

در فصل چهارم معادله کوشی ناهمگن از مرتبه α را معرفی کرده و برای آن مفهوم جواب ملایم و جواب قوی را معرفی می کنیم. سپس در مورد وجود و یکتایی جواب ملایم و جواب قوی این معادله بحث می کنیم و در صورتیکه عملگر ضریب این معادله مولد یک حلال کسری از مرتبه α باشد، بطور دقیق جواب معادله را مشخص می کنیم.

قرارداد: $|.|_{۱,p}$ را نرم-یک می‌نامیم و در حالتی که $p = ۲$ آن را با $|.|$

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل های بعدی از آن ها استفاده می شود را بیان می کنیم. در سراسر این پایان نامه $\mathbb{R}$ نشانگر اعداد حقیقی و $\mathbb{R}_+$ نشانگر اعداد حقیقی نامنفی است.

۱-۱ عملگرهای خطی

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. نگاشت $T : X \to Y$ را یک تبدیل خطی نامیم هرگاه به ازای هر x و y متعلق به X و هر α و β متعلق به $\mathbb{R}$،

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

در حالت خاص اگر $Y = \mathbb{R}$ باشد، تبدیل خطی T را یک تابعک خطی می نامیم.
حال فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار باشند. تبدیل خطی T را کراندار گوییم هرگاه عدد حقیقی و مثبت k موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in X$،

$$\|Tx\|_Y \leq k\|x\|_X.$$

ملاحظه ۱-۱-۲. *فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار باشند. تبدیل خطی $T : X \to Y$ کراندار است اگر و تنها اگر پیوسته باشد.*

برای تبدیل خطی پیوسته T از X به Y، نرم T را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq ۱} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|=۱} \|Tx\|_Y. \tag{۱-۱}$$

مجموعه همه تبدیل های خطی پیوسته از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می دهیم. به راحتی می توان دید که $L(X,Y)$ با اعمال

$$\big(T_۱ + T_۲\big)(x) = T_۱(x) + T_۲(x),$$

و

$$\big(\alpha T\big)(x) = \alpha T(x),$$

یک فضای برداری است و همچنین همراه با نرم تعریف شده در (۱-۱) تبدیل به یک فضای نرم دار می شود. بعلاوه اگر Y یک فضای باناخ باشد $L(X,Y)$ نیز یک فضای باناخ خواهد بود.

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنیم $A : D(A) \subset X \to X$ یک عملگر خطی باشد. حلال عملگر A را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{کراندار باشد } (\lambda I - A)^{-1} \text{ دوسویی و } \lambda I - A\}.$$

در این صورت برای هر $\lambda \in \rho(A)$ قرار می دهیم

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1},$$

و آن را حلال عملگر A می نامیم.

ملاحظه ۱-۱-۴. *فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $A \in L(X, Y)$. در این صورت داریم*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{دوسویی باشد } \lambda I - A\}.$$

ملاحظه ۱-۱-۵. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $A : D(A) \subset X \to X$ یک عملگر خطی بسته باشد. در این صورت*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{دوسویی باشد } \lambda I - A\}.$$

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم $A : D(A) \subset X \to X$ یک عملگر خطی و کراندار باشد. $\lambda \in \mathbb{R}$ را یک مقدار ویژه A می نامیم هرگاه، $\lambda I - A$ یک به یک نباشد. عضو ناصفر $x \in X$ را یک بردار ویژه A گوییم هرگاه، $(\lambda I - A)(x) = 0_X$.

۱-۲ انتگرال بوخنر

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم I یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد. تابع $f : I \to X$ را ساده گوییم هرگاه

$$f(t) = \sum_{r=1}^{n} x_r \chi_{\Omega_r}(t),$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$، $x_r \in X$، $\Omega_r \subset I$ مجموعه های اندازه پذیر لبگ با اندازه لبگ متناهی و

$$\chi_{\Omega_r}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \Omega_r \\ 0 & t \notin \Omega_r. \end{cases}$$

تعریف ۱-۲-۲. تابع $f: I \to X$ را اندازه پذیر می نامیم هرگاه دنباله g_n از توابع ساده موجود باشد بطوریکه برای تقریبا هر $t \in I$ داشته باشیم

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t).$$

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنیم $g: I \to X$ یک تابع ساده بصورت $g = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{\Omega_i}$ باشد. انتگرال g روی I را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_I g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} x_i\, m(\Omega_i),$$

که در آن $m(\Omega)$ اندازه لبگ Ω می باشد.

تعریف ۱-۲-۴. تابع اندازه پذیر $f: I \to X$ را انتگرال پذیر بوخنر می نامیم هرگاه دنباله g_n از توابع ساده موجود باشد بطوریکه

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t) - g_n(t)\|\,\mathrm{d}t = 0.$$

در این حالت انتگرال بوخنر f روی I را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنیم $p \geq 1$. تعریف می کنیم

$$L^p\big((0,T);X\big) = \{G:(0,T)\to X: \ \text{و } G \text{ اندازه پذیر بوخنر باشد} \ \Big(\int_0^{\infty} \|G\|^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p} < \infty\}.$$

در این صورت $L^p\big((0,T);X\big)$ با جمع و ضرب اسکالر توابع یک فضای برداری است.

اگر توابعی که تقریباً همه جا با هم مساویند را یکی در نظر بگیریم آنگاه $L^p\big((0,T);X\big)$ به همراه

$$\|G\|_{L^p} = \Big(\int_0^{\infty} \|G\|^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p},$$

یک فضای برداری نرم دار کامل تشکیل می دهد.

قضیه ۱-۲-۶. (*قضیه ۱.۱.۴ از* [۱])

تابع $f: I \to X$ انتگرال پذیر بوخنر است اگر و تنها اگر f اندازه پذیر و $\|f\|$ انتگرال پذیر لبگ باشد. بخصوص اگر f انتگرال پذیر بوخنر باشد آنگاه

$$\Big\|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\Big\| \leq \int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

قضیه ۱-۲-۷ (همگرایی تسلطی). (قضیه ۱.۱.۸ از [۱])

فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n : I \to X$ انتگرال پذیر بوخنر باشد و برای تقریبا هر $t \in I$،

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

اگر یک تابع انتگرال پذیر $g : I \to \mathbb{R}$ موجود باشد بطوریکه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و برای تقریبا هر $t \in I$، $\|f_n(t)\| \leq g(t)$، آنگاه f انتگرال پذیر بوخنر است و داریم

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

بعلاوه

$$\int_I \|f(t) - f_n(t)\|\,\mathrm{d}t \to \circ, \qquad n \to \infty.$$

قضیه ۱-۲-۸. (قضیه ۱.۱.۶ از [۱])

فرض کنیم $T : X \to Y$ یک عملگر خطی و کراندار بین فضاهای باناخ X و Y و $f : I \to X$ انتگرال پذیر بوخنر باشد. آنگاه Tf انتگرال پذیر بوخنر است و

$$T\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I T\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

قضیه ۱-۲-۹. (قضیه ۱.۱.۷ از [۱])

فرض کنیم A یک عملگر خطی و بسته روی X و $f : I \to X$ انتگرال پذیر بوخنر باشد. اگر برای هر $t \in I$، $f(t) \in D(A)$ و $Af : I \to X$ انتگرال پذیر بوخنر باشد، آنگاه $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in D(A)$ و

$$A\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I Af(t)\,\mathrm{d}t.$$

قضیه ۱-۲-۱۰. (قضیه ۲.۲.۱ از [۱])

فرض کنیم $f : [a,b] \to X$ انتگرال پذیر بوخنر باشد و برای هر $t \in [a,b]$، $F(t) = \int_a^t f(s)\mathrm{d}s$. آنگاه

۱. *F برای تقریباً هر $t \in [a,b]$ مشتق پذیر است و $F' = f$،*

۲. *برای تقریباً هر $t \in [a,b]$،*

$$\lim_{h\to\circ} \frac{۱}{h}\int_t^{t+h} \big\|f(s) - f(t)\big\|\,\mathrm{d}s = \circ$$

۳. *F پیوسته مطلق است.*

قضیه ۱-۲-۱۱. (قضیه ۱.۱.۹ از [۱])

اگر $I = I_1 \times I_2$ *یک مستطیل در* $\mathbb{R}^2$ *و* X *و* $f : I \to X$ *یک تابع اندازه پذیر باشد بطوریکه*

$$\int_{I_1}\int_{I_2} \|f(s,t)\| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s < \infty,$$

آنگاه f *انتگرال پذیر بوخنر است و انتگرال های* $\int_{I_1}\int_{I_2} f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$ *و* $\int_{I_2}\int_{I_1} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$ *موجودند و*

$$\int_{I_2}\int_{I_1} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_{I_1}\int_{I_2} f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_I f(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

۱-۳ پیچش(کانولوشن)

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ و $f : \mathbb{R}_+ \to X$ توابعی اندازه پذیر باشند. عملگر پیچش را با نماد $*$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\big(k * f\big)(t) = \int_0^t k(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

ملاحظه ۱-۳-۲. (قضیه ۱.۳.۱ از [۱])

عملگر پیچش جابجایی است، یعنی $k * f = f * k$.

قضیه ۱-۳-۳. *فرض کنیم* $k, h \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *و* $f \in L^1(\mathbb{R}_+; X)$. *در این صورت*

۱. $(k * f)(t)$ *برای تقریبا هر* $t \geq 0$ *وجود دارد و* $k * f \in L^1(\mathbb{R}_+; X)$.

۲. $h * (k * f) = (h * k) * f$.

قضیه ۱-۳-۴. (قضیه ۱.۳.۴ از [۱])

فرض کنیم $f \in L^1(\mathbb{R}_+; X)$ *و* $T : \mathbb{R}_+ \to L(X;Y)$. *اگر برای هر* $x \in X$، $T(\cdot)x$ *روی* $\mathbb{R}_+$ *پیوسته باشد، آنگاه* $T * f : \mathbb{R}_+ \to Y$ *موجود و پیوسته است.*

قضیه ۱-۳-۵. (قضیه ۵ از [۱۷])

فرض کنیم $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *دو تابع پیوسته باشند بطوریکه* $f * g = 0$. *آنگاه* $f = 0$ *یا* $g = 0$.

۱-۴ تابع گاما

تعریف ۱-۴-۱. تابع $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t,$$
را تابع گاما می نامیم.

قضیه ۱-۴-۲. (*قضیه ۱۸.۸ از [۱۶]*)

برای هر $\alpha \in (0, \infty)$ *داریم* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$*. بخصوص برای هر عدد طبیعی* n، $\Gamma(n+1) = n!$.

قضیه ۱-۴-۳. (*قضیه ۲۰.۸ از [۱۶]*)

برای هر $\alpha, \beta > 0$،
$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$
تعریف می کنیم
$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, \mathrm{d}t,$$
و آن را تابع بتا می نامیم.

۱-۵ تابع میتاگ-لفلر

تعریف ۱-۵-۱. فرض کنیم $\alpha, \beta > 0$ و $z \in \mathbb{C}$. تابع
$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$
را تابع میتاگ-لفلر می نامیم. در حالت خاص اگر $\alpha = 1$ و $\beta = 1$،
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

در ملاحظه زیر به برخی خواص تابع فوق اشاره می کنیم.

ملاحظه ۱-۵-۲. *فرض کنیم* $0 < \alpha < 2$ *و* $\beta > 0$*. در این صورت*

۱.
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha)\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha - \omega}, \qquad Re\lambda > |\omega|^{1/\alpha}.$$