دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

آمارریاضی

آزمون نیکویی برازش برای مدل‌های ضربی

استاد راهنما:

دکتر حمزه ترابی

استاد مشاور:

دکتر حجت‌اله ذاکرزاده

پژوهش و نگارش:

مژگان بقایی‌پور

اسفند ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

چکیده

در بسیاری از مدل‌های سری‌های زمانی سنتی، ارتباط بین مؤلفه‌های یک فرآیند دومتغیره‌ی ایستای اکید را می‌توان به عنوان یک مدل رگرسیونی ناپارامتری در نظر گرفت. در برخی از این مدل‌ها مانند مدل ARCH، ارتباطی ویژه بین تابع رگرسیونی و تابع مقیاس برقرار است که این رابطه در بسیاری از مدل‌ها، مانند مدل‌های مالی و اقتصادی دارای اهمیت قابل توجهی است.

در این پایان‌نامه، به معرفی روشی برای آزمون بررسی این ویژگی در یک چارچوب ناپارامتری می‌پردازیم. این آزمون بر اساس اختلاف بین دو برآورد ناپارامتری خطای رگرسیونی توزیع بنا شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ پیش‌درآمد

این فصل همان طور که از عنوان آن پیداست به بررسی و بیان مطالبی می‌پردازد که در فصل‌های آتی به آن‌ها نیاز داریم. در واقع این فصل پیش‌نیازی برای فصل‌های بعد محسوب می‌شود. این فصل شامل پنج بخش است که در ادامه آن چه را در این بخش‌ها می‌خوانیم، به طور مختصر بیان می‌کنیم.

با توجه به این که مبحث اصلی فصل سه در رابطه با مدل ضربی در سری زمانی است، لازم می‌نماید که به اختصار سری‌های زمانی را یادآوری کنیم؛ بنابراین بخش یک به بحث درباره‌ی سری‌های زمانی اختصاص دارد و از آن جا که درس سری‌های زمانی یکی از دروسی است که در دوره‌ی کارشناسی دانشجویان با آن آشنا می‌شوند؛ در این قسمت تنها به کلیات و بیان نکات اصلی می‌پردازیم و از بحث درباره‌ی جزئیات خودداری می‌کنیم. از این‌رو ابتدا مفاهیم اساسی فرآیندهای تصادفی و سری‌های زمانی را در حالت تک‌متغیره و چندمتغیره بیان کرده و سپس به معرفی چند سری زمانی غیرخطی می‌پردازیم.

در بخش دوم تحت عنوان آزمون نیکویی برازش، پس از معرفی تابع توزیع تجربی، به معرفی دو آماره برای انجام آزمون نیکویی برازش به نام‌های آماره‌ی کلموگروف - اسمیرنوف و کرامر - وان‌میسز، در حالت تک نمونه‌ای می‌پردازیم.

بخش سوم این فصل همگرایی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نام دارد؛ ضرورت بیان این بخش در بخش ۱.۳.۳ احساس می‌شود. در این بخش ابتدا انواع همگرایی‌ها در احتمال را معرفی می‌کنیم و برخی از قضایای مورد استفاده در فصل سوم را بیان می‌کنیم. در انتها به ارائه‌ی تعاریف مربوط به عملگرهای نرخ همگرایی می‌پردازیم که در اثبات قضایا به میزان زیاد از نتایج مربوط به این تعاریف استفاده می‌شود.

در بخش آخر این فصل، دنباله‌های آمیخته را معرفی می‌کنیم. در این قسمت شرایطی را بیان کرده که تحت آن‌ها، برخی از قضایایی را که در حالت استقلال متغیرها از آن‌ها استفاده‌ی زیادی می‌کنیم، در حالت عدم استقلال نیز قابل بررسی خواهند شد.

لازم به ذکر است، با توجه به عدم نیاز در این فصل از آوردن اثبات قضایا، توضیحات

و نکات اضافی خودداری شده است. علاقه‌مندان به بررسی بیشتر می‌توانند به مراجع ذکر شده در هر قسمت مراجعه کنند.

۲.۱ سری‌های زمانی

در این بخش، چند مفهوم اساسی لازم را برای معرفی الگوهای سری‌های زمانی که در این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌شوند، یادآوری می‌کنیم. موضوع را با تعریف ساده‌ای از فرآیندهای تصادفی شروع کرده و سپس به یادآوری دو فرآیند تصادفی محض و اتورگرسیو می‌پردازیم. در ادامه پس از معرفی سری‌های زمانی در حالت تک‌متغیره و چندمتغیره این بخش را با معرفی چند مدل سری زمانی غیرخطی به پایان می‌بریم.

۱.۲.۱ فرآیندهای تصادفی

یک فرآیند تصادفی، خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی به صورت $\{X(t,\omega)\}$ است که در آن ω به فضای نمونه Ω و t به یک مجموعه‌ی شاخص اندیس‌گذار T متعلق است. برای یک ω معلوم، $X(t,\omega)$ به عنوان تابعی از t، یک تابع نمونه یا یک مصداق نامیده می‌شود و برای یک t ثابت، $X(t,\omega)$ یک متغیر تصادفی است.

$X(t,\omega)$ به عنوان مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی در یک فضای احتمال تعریف می‌شود و ما معمولاً $X(t,\omega)$ را به صورت $X(t)$ یا X_t می‌نویسیم. اگر فرآیند، تنها مقادیر حقیقی را انتخاب کند، آن را فرآیند حقیقی - مقدار می‌گویند.

دنباله‌ای متناهی از فرآیند تصادفی حقیقی - مقدار $\{X_t :\ t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, ...\}$ را به صورت $\{X_{t_۱}, X_{t_۲}, ..., X_{t_n}\}$ در نظر می‌گیریم. تابع توزیع n - بعدی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x_۱, x_۲, ..., x_n) = P\left(X_{t_۱} \leq x_۱, ..., X_{t_n} \leq x_n\right).$$

همچنین تابع میانگین با

$$\mu_t = E(X_t),$$

تابع واریانس با

$$\sigma_t^2 = E(X_t - \mu_t)^2,$$

تابع اتو کوواریانس (ACVF) با

$$\begin{aligned}\gamma(t_i, t_j) &= Cov(X_{t_i}, X_{t_j}) \\ &= E(X_{t_i} - \mu_{t_i})(X_{t_j} - \mu_{t_j}),\end{aligned}$$

و تابع خودهمبستگی (ACF) با

$$\begin{aligned}\rho(t_i, t_j) &= Corr(X_{t_i}, X_{t_j}) \\ &= \frac{\gamma(t_i, t_j)}{\sqrt{\sigma_{t_i}^2}\sqrt{\sigma_{t_j}^2}},\end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. حال یک فرآیند ایستا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۲.۱ فرآیند تصادفی X_t را ایستای قوی گویند هرگاه

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}, ..., X_{t_n+k}), \ \ \forall\, n = 1, 2, ..., \ \ \forall\, t_i, \ \ \forall\, k. \qquad (۱.۲.۱)$$

اگر رابطه‌ی (۱.۲.۱) برای n برقرار باشد گوییم فرآیند ایستای مرتبه‌ی n است.

اصطلاحات ایستای اکید و ایستای کامل نیز به جای ایستای قوی به کار می‌رود.

اگر X_t ایستای قوی باشد و $E|X_t| < \infty$، آنگاه میانگین X_t برای هر مقدار t، ثابت است زیرا تابع توزیع آن برای تمام t ها یکسان است:

$$E(X_t) = \mu, \quad \forall t \in T.$$

همین طور اگر $EX_t^2 < \infty$، واریانس X_t ها برای هر t، ثابت خواهد بود:

$$Var(X_t) = \sigma^2, \quad \forall t \in T.$$

افزون بر این، چون برای هر عدد i، j، t_i،t_j و k

$$(X_{t_i}, X_{t_j}) \stackrel{d}{=} (X_{t_i+k}, X_{t_j+k}),$$

بنابراین

$$\gamma(t_i, t_j) = \gamma(t_i+k, t_j+k),$$

و

$$\rho(t_i, t_j) = \rho(t_i+k, t_j+k).$$

اگر $t_i = t-k$ و $t_j = t$ فرض شود، آنگاه

$$\begin{aligned}\gamma(t_i, t_j) &= \gamma(t-k, t)\\ &= \gamma(t, t+k)\\ &= \gamma_k,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\rho(t_i, t_j) &= \rho(t-k, t)\\ &= \rho(t, t+k)\\ &= \rho_k.\end{aligned}$$

بنابراین برای یک فرآیند ایستای اکید که دو گشتاور اول آن متناهی است، تابع کوواریانس و خودهمبستگی فرآیند تنها به تفاضل زمانی k بستگی دارد.

اگر توزیع توأم فرآیندی تصادفی مانند $\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\}$، معلوم باشد؛ فرآیند تصادفی از نظر احتمالی کاملاً معین می‌شود. اما چنین حالتی کمتر رخ می‌دهد زیرا در حالت کلی تابع توزیع توأم شامل تعداد زیادی از پارامترهاست که آن‌ها را نمی‌توان از داده‌های موجود برآورد کرد. در عوض ما فقط گشتاورهای اول و دوم توزیع‌های توأم را معین می‌کنیم، یعنی میانگین‌های $E(X_t)$ و میانگین حاصل‌ضرب‌های $E(X_{t+k}, X_t)$، $t = ۱, ۲, ۳, \ldots$ و

$k = ۰, ۱, ۲, \dots$ و توجه را روی ویژگی‌هایی از دنباله‌ی X_t متمرکز می‌کنیم که تنها به این دو گشتاور وابسته است. این ویژگی دنباله‌ی X_t را ویژگی مرتبه دوم می‌نامیم. بنابراین در تحلیل فرآیندهای تصادفی اغلب از مفهوم ضعیف‌تری از ایستایی برحسب گشتاورهای فرآیند استفاده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ یک فرآیند تصادفی را ایستای ضعیف مرتبه‌ی n ام گوییم هرگاه تمام گشتاورهای توأم آن تا مرتبه‌ی n موجود بوده و نسبت به زمان تغییر نکنند یعنی مستقل از مبدأ زمان باشد.

روشن است که اگر (۱.۲.۱) برای $n = m$ درست باشد، برای $n \leq m$ نیز درست است؛ زیرا تابع توزیع مرتبه‌ی m تمام توابع توزیع مرتبه‌ی پایین‌تر را معین می‌کند. بنابراین، از ایستایی مرتبه‌ی بالاتر، همواره ایستایی مرتبه‌ی پایین‌تر نتیجه می‌شود. بنابراین یک فرآیند ایستای ضعیف مرتبه‌ی دوم، میانگین و واریانس ثابت دارد و کوواریانس و همبستگی آن، توابعی (تنها) از اختلاف زمانی هستند. برخی اوقات اصطلاحات ایستایی در مفهوم وسیع یا ایستایی کوواریانس نیز برای توصیف فرآیند ایستای ضعیف مرتبه‌ی دوم به کار می‌رود. از تعاریف معلوم می‌شود یک فرآیند ایستای اکید که دو گشتاور اول آن متناهی است، یک فرآیند ایستای ضعیف مرتبه‌ی دوم یا فرآیند ایستای کوواریانس نیز هست.

به آسانی می‌توان دید که برای یک فرآیند ایستا، تابع اتوکوواریانس γ_k و تابع خودهمبستگی ρ_k دارای ویژگی‌های زیر هستند:

۱) $\gamma_\circ = Var(X_t)$ و بنابراین $\rho_\circ = ۱$.

۲) $|\gamma_k| \leq \gamma_\circ$ و در نتیجه $|\rho_k| \leq ۱$.

۳) برای هر k، $\gamma_k = \gamma_{-k}$ و $\rho_k = \rho_{-k}$ یعنی γ_k و ρ_k توابعی زوجند و لذا نسبت به مبدأ زمان متقارن و معین نامنفی هستند.

۲.۲.۱ فرآیند تصادفی محض

هر فرآیند $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ را که به صورت دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ناهمبسته از توزیعی با میانگین ثابت $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$ (که معمولاً صفر فرض می‌شود)، با واریانس ثابت $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^۲$ و تابع اتوکوواریانس $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = ۰$ (برای $k \neq ۰$) است؛ یک فرآیند تصادفی محض، اغتشاش خالص یا نوفه سفید می‌نامند. از این تعریف نتیجه می‌گیریم که فرآیند تصادفی محض $\{\varepsilon_t\}$ ایستا بوده و دارای تابع اتوکوواریانس

$$\gamma_k = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^۲ & k = ۰ \\ ۰ & k \neq ۰, \end{cases}$$

و تابع خودهمبستگی

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_۰} = \begin{cases} ۱ & k = ۰ \\ ۰ & k \neq ۰, \end{cases}$$

است.

ویژگی اصلی فرآیند تصادفی محض این است که تابع خودهمبستگی آن برابر صفر است. گرچه خود این فرآیند در سری‌های زمانی کاربردی، مستقیماً کاربرد ندارد ولی نقش عمده‌ای در ساختار الگوهای سری زمانی دیگر ایفا می‌کند. یک فرآیند تصادفی محض، گوسی است هرگاه توزیع توأم آن نرمال باشد.

۳.۲.۱ فرآیند اتورگرسیو

فرض می‌کنیم $\{\varepsilon_t\}$ یک فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس $\sigma_\varepsilon^۲$ باشد، فرآیند $\{X_t\}$ را فرآیند اتورگرسیو مرتبه‌ی p گویند هرگاه

$$X_t = \phi_۱ X_{t-۱} + \phi_۲ X_{t-۲} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

اگر به مسأله‌ی رگرسیون توجه کنیم، می‌بینیم که الگوی بالا در واقع یک الگوی رگرسیون چندگانه است با این تفاوت که در این‌جا X_t روی متغیرهای مستقل رگرسیون نشده بلکه

روی گذشته‌ی X_t رگرسیون شده است و به این دلیل است که فرآیند $\{X_t\}$ را اتورگرسیو نامیده‌اند. یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه‌ی p را با نماد اختصاری $\mathrm{AR}(p)$ نمایش می‌دهند.

این قبیل فرآیندها را یول[1] در سال ۱۹۲۰ معرفی کرده است. این فرآیند همواره وارون‌پذیر است، یعنی همواره بدون گذاشتن شرط یا شرایطی روی ϕ_i ها می‌توان ε_t را به صورت یک ترکیب خطی موزون از مشاهدات حال و گذشته فرآیند نوشت. این فرآیند را با توجه به عملگر انتقال پسرو ($B(X_t) = X_{t-1}$) می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\phi_p(B)X_t = \varepsilon_t,$$

که در آن

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p.$$

به طوری که $\phi_p(B)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی اتورگرسیو است. برای ایستایی فرآیند باید ریشه‌های $\phi_p(B)$ از لحاظ قدر مطلق بزرگ‌تر از واحد باشند. این فرآیند در مواردی به کار می‌رود که مقدار حال سری زمانی به مقادیر بلافاصله قبل از آن به علاوه‌ی یک خطای تصادفی بستگی دارد.

۴.۲.۱ سری‌های زمانی تک‌متغیره و چندمتغیره

یک مدل سری زمانی برای داده‌های مشاهده شده‌ی x_t عبارت از تعیین توزیع‌های توأم (یا احتمالاً فقط میانگین‌ها و کواریانس‌ها) دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی X_t است که فرض می‌شود x_t یک مصداق آن است.

اغلب از سری زمانی به معنای داده‌ها و فرآیندی که سری یک مصداق آن است، استفاده می‌کنیم. در واقع فرآیندهای تصادفی هم دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی‌اند؛ با این تفاوت که t متغیر اندیس‌گذار، نشان دهنده‌ی گام است ولی در سری‌های زمانی منظور از

[1] Yule

گام فقط زمان است بنابراین تمام تعاریف ارائه شده در رابطه با انواع ایستایی فرآیندهای تصادفی و غیره را می‌توانیم برای سری‌های زمانی نیز به کار بریم.

برحسب این که t (متغیر اندیس‌گذار) متعلق به یک مجموعه‌ی گسسته یا پیوسته باشد، سری زمانی را گسسته - زمان یا پیوسته - زمان می‌گوییم. هم‌چنین برحسب این که برای t ثابت، متغیر تصادفی X_t گسسته یا پیوسته باشد نیز، سری‌های زمانی به دو صورت گسسته و پیوسته دسته‌بندی می‌شوند. بنابراین سری‌های زمانی به چهار دسته زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱) گسسته‌ی گسسته - زمان (مانند تعداد تصادفات در هر ماه)

۲) گسسته‌ی پیوسته - زمان (مانند تعداد تصادفات تا لحظه‌ی t ام)

۳) پیوسته‌ی گسسته - زمان (مانند میزان بارندگی در هر ماه)

۴) پیوسته‌ی پیوسته - زمان (مانند میزان بارندگی تا لحظه‌ی t ام)

اولین قدم برای بررسی سری‌های زمانی رسم نمودار آن است که در آن X_t برحسب t (متغیر زمان) رسم می‌شود.

توجه کنید که به همین ترتیب می‌توانیم سری زمانی را در حالت چندمتغیره نیز تعریف کنیم. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_{i,t} : i = ۱, ..., m, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, ...\}$ که در طول زمان به‌دست می‌آیند را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathbf{X}_t = (X_{۱,t}, ..., X_{m,t})'$. به دنباله‌ی $\{\mathbf{X}_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, ...\}$ سری زمانی چندمتغیره می‌گوییم.دقت کنید که $X_{i,t}$ مقدار سری زمانی یک‌متغیره‌ی i ام، در زمان t، است. امروزه سری‌های زمانی چندمتغیره در بسیاری از علوم مانند اقتصاد و پزشکی مورد توجه‌اند. داده‌های سری‌های زمانی چندمتغیره را با ماتریسی $n \times m$ ارائه می‌کنند به طوری که n تعداد مشاهدات و m تعداد متغیرهاست.

تعاریف مربوط به ایستایی سری‌های زمانی چندمتغیره به صورت زیر اصلاح می‌شوند: یک سری زمانی چندمتغیره را ایستای قوی گوییم هرگاه

$$(\mathbf{X}_{t_1}, ..., \mathbf{X}_{t_n}) \stackrel{d}{=} (\mathbf{X}_{t_1+k}, ..., \mathbf{X}_{t_n+k}), \quad \forall n = 1, 2, ..., \quad \forall t_i, \quad \forall k.$$

و ایستای ضعیف گوییم هرگاه برای هر $i = 1, 2, .., m$، $E(X_{i,t}) = \mu_i$ ثابت و کوواریانس متقابل بین $X_{i,t}$ و $X_{j,s}$ برای هر $t > s$ و $i, j = 1, 2, .., m$، تنها توابعی از اختلاف زمان $(t - s)$ است. توجه کنید که از ایستایی سری‌های زمانی چندمتغیره، نتیجه می‌شود که هر مؤلفه‌ی آن یک متغیره ایستاست ولی عکس این رابطه لزوماً برقرار نیست[۶]، [۳۸].

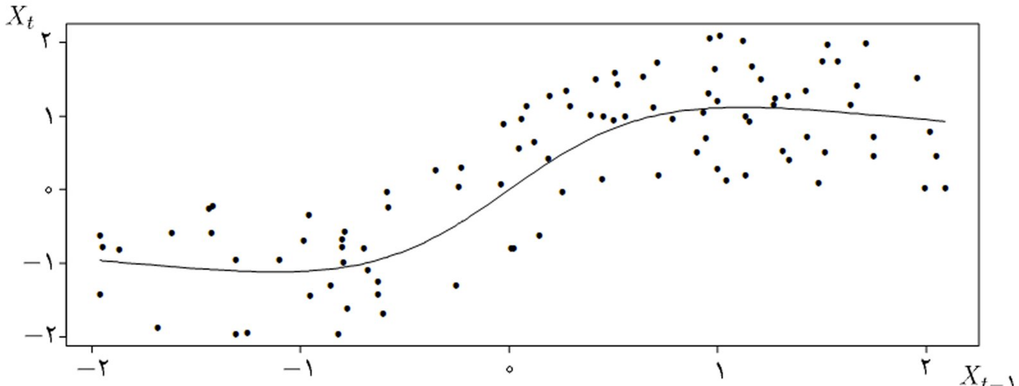
۵.۲.۱ سری‌های زمانی غیرخطی

مدل‌های مختلف سری زمانی را بر حسب نوع ارتباط بین متغیرهای گذشته می‌توان به دو گروه خطی و غیرخطی تقسیم‌بندی کرد.

در مدل‌های سری زمانی خطی رابطه‌ی بین متغیرهای گذشته یک رابطه‌ی خطی است؛ مدل‌های AR، MA، ARMA و ARIMA از این نمونه هستند. اما در مدل‌های غیرخطی ارتباط بین متغیرها از یک رابطه‌ی خطی پیروی نمی‌کند به عنوان یک مثال ساده مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$X_t = 2X_{t-1}/(1 + 0/8X_{t-1}^2) + \varepsilon_t,$$

به طوری که ε_t یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل است که از توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[-1, 1]$ پیروی می‌کند. واضح است که ارتباط بین متغیرهای گذشته، یک رابطه‌ی غیرخطی است. برای فهم بهتر این نکته، از نمودار پراکنش X_t در برابر X_{t-1} بهره می‌گیریم. با استفاده از شبیه‌سازی یک نمونه ۱۰۰ تایی از این سری زمانی و رسم X_t برحسب X_{t-1}، شکل ۱.۲.۱ به‌دست آمده است. روشن است که رابطه‌ی بین متغیرها یک رابطه‌ی غیرخطی است.



شکل ۱.۲.۱ نمودار پراکنش X_t برحسب X_{t-1}.

از انواع مدل‌های سری زمانی غیرخطی می‌توان به مدل‌های ARCH، GARCH و ... اشاره کرد که در ادامه به معرفی برخی از آن‌ها می‌پردازیم. برای آشنایی بیشتر با انواع دیگری از مدل‌های غیرخطی به فَن[2] و یااو[3] [۲۸] سال ۲۰۰۳ مراجعه کنید.

یک خانواده از مدل‌های سری زمانی غیرخطی، خانواده‌ی مدل‌های اتورگرسیو شرطی ناهم‌واریانس (ARCH) است که در زمینه‌های گوناگون علمی چون فیزیک، اقتصاد و... بسیار مفید و دارای کاربرد فراوان است. انگل [4] [۲۴] در سال ۱۹۸۲ برای اولین بار مدل ARCH(p) را معرفی کرد.

تعریف ۳.۲.۱ مدل اتورگرسیو شرطی ناهم‌واریانس با مرتبه‌ی $q(\geq 1)$، (ARCH(q)) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

که در آن

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 Z_{t-1}^2 + \ldots + a_q Z_{t-q}^2,$$

به طوری که $a_0 > 0$ و $a_j \geq 0$، $j = 1, \ldots, q$ مقادیر ثابتی‌اند و $\{\epsilon_t\} \overset{iid}{\sim} (0, 1)$. هم‌چنین فرض می‌شود ϵ_t و $\{Z_{t-k}, k \geq 1\}$ برای هر t مستقل‌اند.

[2] Fan
[3] Yao
[4] Engle

تعمیم مدل ARCH توسط بولرسلف[5] [۹] در سال ۱۹۸۶ تحت عنوان GARCH معرفی گردید.

تعریف ۴.۲.۱ مدل اتورگرسیو شرطی ناهم‌واریانس تعمیم‌یافته با مرتبه‌ی $p(\geq 0)$ و $q(\geq 1)$، (GARCH(p,q)) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

که در آن

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i Z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_j \sigma_{t-j}^2,$$

به طوری که $a_0 > 0$ و $a_j \geq 0$، $j = 1, \dots, q$ و $b_j \geq 0$ مقادیر ثابتی‌اند و $\{\epsilon_t\} \overset{iid}{\sim} (0, 1)$. هم‌چنین فرض می‌شود ϵ_t و $\{Z_{t-k}, k \geq 1\}$ برای هر t مستقل‌اند.

توجه کنید که در مدل GARCH اگر $p = 0$ فرآیند ARCH(q) و اگر $p = q = 0$ آنگاه یک فرآیند تصادفی محض خواهیم داشت.

در ادامه به تعریف مدل اتورگرسیو شرطی مستمر (ACD) که برای اولین بار توسط انگل و راشل[6] [۲۶] در سال ۱۹۹۸ مورد توجه قرار گرفت، می‌پردازیم.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید τ_t به زمان (زمان بین داد و ستد متوالی) دلالت کند. در این صورت مدل اتورگرسیو شرطی مستمر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_t = \theta_t \varepsilon_t,$$

که در آن

$$\begin{aligned} \theta_t &= a_0 + a_1 \tau_{t-1} + \dots + a_q \tau_{t-q} + \beta_1 \theta_{t-1} + \dots + \beta_p \theta_{t-p} \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \tau_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \theta_{t-i}. \end{aligned}$$

به طوری که $a_0 > 0$، $a_i \geq 0$، $\beta_i \geq 0$ و $i > 0$ است و ε_t ها متغیرهای تصادفی مثبت، مستقل و هم‌توزیع با میانگین مشترک یک هستند.

---

[5] Bollersleve

[6] Russell