دانشگاه پیام‌نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض—گرایش آنالیز

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

مدارها و مدارهای ضعیف بر فضاهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر فریبا ارشاد

نگارش:

نرجس حسین‌زاده

اسفند ماه ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام‌نور

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض–گرایش آنالیز

دانشکده علوم
گروه علمی ریاضی

مدارها و مدارهای ضعیف بر فضاهای باناخ

استاد راهنما:
دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:
دکتر فریبا ارشاد

نگارش:
نرجس حسین‌زاده

اسفند ماه ۱۳۸۸

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **مدارها و مدارهای ضعیف بر فضاهای باناخ** که توسط **نرجس حسین زاده** در مرکز **شیراز** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۱۲/۱۸ نمره: ۱۸/۵۰ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- بهمن یوسفی	استاد راهنما	استاد	
۲- فریبا ارشاد	استاد مشاور	استادیار	
۳- محبوبه حسین یزدی	استاد داور	استادیار	
۴- سید احمد رضوی زاده	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم که تمامی هستی‌ام از برکت دعای خیر آنان است.

به نماد عشق و محبت همسرم که سنگ صبور لحظات تلخ و شیرین زندگی‌ام بوده است.

به نهال یکدانه قلبم، نگار عزیزم که هماهنگ با تلاشهای علمی‌ام شاهد رشد لحظه به لحظه‌اش بوده‌ام.

به اساتید گرنقدری که همواره یار و یاورم بوده‌اند.

و به تمامی دوستان و آنانی که آنچه را نمی‌دانستم به من آموختند.

سپاسگزاری

پروردگارا من تو را شناختم و تو مرا بر وجود خود دلالت فرمودی و بسوی خود خواندی و اگر تو نبودی من نمی‌دانستم تو چیستی. ستایش خدایی را که من او را می‌خوانم و او اجابت می‌کند و هرچند که او مرا می‌خواند کندی و کاهلی می‌کنم.

با تقدیر و تشکر فراوان از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر بهمن یوسفی که در وادی گسترده علم و دانش روشنگر راه و یاریگر تلاشم بوده‌اند و با تشکر از استاتید ارجمند خانمها دکتر فریبا ارشاد و دکتر محبوبه حسین یزدی که مسئولیت مشاوره و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند.

چکیده

فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار روی یک فضای باناخ X باشد. مدار x تحت T به صورت $\{T^n x : n = ۰, ۱, \cdots\}$ تعریف می‌شود و مدارهای ضعیف تحت T، دنباله‌های بفرم $\{\langle Tnx, x^* \rangle : n = ۰, ۱, \cdots\}$ هستند جاییکه $x \in X$ و $x^* \in X^*$.

ما مروری از نتایج مربوط به مدارها و مدارهای ضعیف از عملگر T را ارائه می‌دهیم.

نتایج عمیق و مسائل تئوری عملگرها، ممکن است با استفاده از مفهوم مدارها فرمولبندی شوند. بعنوان مثال، عملگر T هیچ زیرفضای پایای غیربدیهی ندارد اگر و فقط اگر مدار هر بردار غیرصفر $x \in X$، کل فضا را پدید بیاورد. بطور مشابه، T هیچ زیرمجموعه پایای بسته غیربدیهی ندارد اگر و فقط اگر مدار هر $x \neq ۰$ چگال باشد. هم‌چنین مفهوم مدارهای ضعیف دقیقاً با مسئله زیرفضاهای پایا در ارتباط است. ایده اصلی تکنیک مشهور اسکات—براون ساخت یک مدار ضعیف با ویژگیهای کاملاً معین است.

بسیاری از نتایج مربوط به مدارها و مدارهای ضعیف، معادلشان برای نیمه‌گروههای تک پارامتری از عملگرهای پیوسته برقرار است.

مجموعه عملگرهای خطی کراندار که روی فضای باناخ X اثر می‌کند را با $L(X)$ نشان می‌دهیم. زیرمجموعه M از X را مانده نامیم هرگاه M^* از رسته اول باشد. بوضوح یک مجموعه مانده است اگر و فقط اگر یک زیرمجموعه چگال بفرم G_δ باشد.

فهرست

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱ – پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱–۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

قضیه ۱–۱.۱: (**قضیه نمایش ریس**) اگر $L : H \longrightarrow I\!\!F$ یک تابعی خطی کراندار باشد، آنگاه یک بردار منحصربفرد مانند $h_\circ$ در H موجود است به قسمیکه:

$$L(h) = \langle h, h_\circ \rangle$$

برای هر h در H. علاوه بر آن

$$\|L\| = \|h_\circ\|.$$

تعریف ۱–۲.۱: اگر $A \in B(H)$ و $M \leq H$، آنگاه گوییم M یک زیرفضای پایا برای A است اگر $Ah \in M$، هنگامیکه $h \in M$. به عبارت دیگر، $AM \subseteq M$. گوییم M یک زیرفضای نزولی برای A است، اگر $AM \subseteq M$ و $AM^\perp \subseteq M^\perp$.

تعریف ۱–۳.۱: گوییم عملگر خطی $T : H \longrightarrow H$ فشرده است، اگر بستار $T(ballH)$ در H فشرده باشد.

تعریف ۱—۴.۱: یک عملگر T روی فضای هیلبرت H دارای مرتبه متناهی است، اگر $ran\ T$ متناهی‌البعد باشد.

قضیه ۱—۵.۱: اگر $T \in B(H,K)$، آنگاه موارد زیر با هم معادلند:

(آ) T فشرده است.

(ب) T^* فشرده است.

(پ) یک دنباله $\{T_n\}$ از عملگرهایی با مرتبه متناهی موجود است به قسمیکه:

$$\|T - T_n\| \longrightarrow ۰.$$

تعریف ۱—۶.۱: اگر $A \in B(H)$، آنگاه اسکالر α یک مقدار ویژه A است، اگر

$$\ker(A - \alpha) \neq (۰)$$

و اگر h یک بردار غیرصفر در $\ker(A - \alpha)$ باشد، آنگاه h یک بردار ویژه برای α است؛ بنابراین

$$Ah = \alpha h.$$

هم‌چنین $(A - \alpha)$ زیرفضای متناظر با α نامیده می‌شود.

مجموعه تمام مقادیر ویژه A با $\sigma_p(A)$ نشان داده می‌شود و طیف نقطه‌ای A نام دارد.

هم‌چنین قرار می‌دهیم:

$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \inf\{\|(A-\lambda)h\| : \|h\| = ۱\} = ۰\}.$$

$\sigma_{ap}(A)$ طیف نقطه‌ای تقریبی A نامیده می‌شود. واضح است که

$$\sigma_p(A) \subseteq \sigma_{ap}(A).$$

تعریف ۱—۷.۱: فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{X}^* \equiv f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{F}$$ مجموعه همه تابعی‌های خطی کراندار مانند .

در اینصورت $\mathcal{X}^*$ دوگان فضای $\mathcal{X}$ نام دارد و با $B(\mathcal{X}, \mathbb{F})$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۱—۸.۱: اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ فضاهای باناخ و $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک عملگر خطی پوشا و پیوسته باشد، آنگاه برای هر مجموعه باز G در فضای $\mathcal{X}$، $A(G)$ در $\mathcal{Y}$ باز است.

قضیه ۱—۹.۱: **(اصل کرانداری یکنواخت)** فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ و $\mathcal{Y}$ یک فضای نرمدار باشد. اگر $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ به قسمیکه

$$\sup\{\|Ax\| : A \in \mathcal{A}\} < \infty$$

برای هر x در $\mathcal{X}$، آنگاه

$$\sup\{\|A\| : A \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

قضیه ۱—۱۰.۱: **(قضیه بئر)** اگر $\mathcal{X}$ یک فضای متری تام باشد، آنگاه اشتراک هر گردایه شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های باز چگال $\mathcal{X}$ در $\mathcal{X}$ چگال است.

تعریف ۱—۱۱.۱: مجموعه $E \subset \mathcal{X}$ را هیچ‌جا چگال گوییم، اگر بستش $\overline{E}$ شامل زیرمجموعه باز ناتهی از X نباشد. هر اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال را یک مجموعه از رسته اول می‌نامند. سایر زیرمجموعه‌های $\mathcal{X}$ از رسته دوم می‌باشند.

قضیه ۱—۱۲.۱: اگر عملگر $A \in B(H)$ و ثابت $\lambda \in \mathbb{C}$، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند:

الف) $\lambda \notin \sigma_{ap}(A)$

ب) $\ker(A - \lambda) = (\circ)$ و $ran(A - \lambda)$ بسته باشد.

پ) یک ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد به قسمیکه

$$\|(A-\lambda)x\| \geq c\|x\|$$

برای هر x.

قضیه ۱—۱۳.۱: (تناوبی فردهلم) فرض کنید $A \in B_0(H)$، $\lambda \in \mathbb{C}$ و $\lambda \neq 0$، در اینصورت $ran(A-\lambda)$ بسته است و

$$\dim \ker(A-\lambda) = \dim \ker(A-\lambda)^* < \infty.$$

تعریف ۱—۱۴.۱: یک طولپایی جزئی، عملگری است مانند W به قسمیکه

$$\|Wh\| = \|h\|$$

برای هر h در $(\ker W)^\perp$. فضای $(\ker W)^\perp$، فضای اولیه W نامیده می‌شود و فضای $ran\ W$، فضای نهایی عملگر W نام دارد.

تعریف ۱—۱۵.۱: (تجزیه قطبی) اگر عملگر $A \in B(H)$، آنگاه یک طولپایی جزئی مانند W وجود دارد به قسمیکه $(\ker A)^\perp$ فضای اولیه و $cl(ran\ A)$ فضای نهایی آن باشد و

$$A = W|A|.$$

علاوه بر آن، اگر

$$A = UP$$

جاییکه $P \geq 0$ و U یک ایزومتری جزئی باشد که

$$\ker U = \ker P,$$

آنگاه

$$P = |A|, U = W.$$

تعریف ۱—۱۶.۱: هر جبر مختلط یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط است که در آن یک ضرب شرکتپذیر و پخشپذیر تعریف شده است. یعنی به ازای هر z, y, x در A،

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, \\ (x+y)z &= xz + yz, \\ x(y+z) &= xy + xz. \end{aligned}$$

و با ضرب اسکالر چنان مربوط شده است که به ازای $x, y \in A$ و αی اسکالر،

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y.$$

هرگاه یک نرم در A موجود باشد که A را به یک فضای خطی نرمدار بدل کرده و در نامساوی ضربی

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A)$$

صدق کند، آنگاه A یک جبر مختلط نرمدار می‌باشد. هرگاه، علاوه بر این، A یک فضای متری تام نسبت به این نرم باشد، یعنی A یک فضای باناخ باشد، آنگاه A را یک جبر باناخ می‌نامیم.

تعریف ۱—۱۷.۱: اگر A یک جبر باناخ دارای عنصر همانی باشد و $a \in A$، آنگاه طیف a را با $\sigma(a)$ نشان داده و با رابطه

$$\sigma(a) = \{\alpha \in \mathbb{F} : \text{وارونپذیر نباشد } a - \alpha\}$$

تعریف می‌کنیم. طیف چپ یعنی $\sigma_l(a)$ مجموعه

$$\{\alpha \in \mathbb{F} : \text{از طرف چپ وارونپذیر نباشد } a - \alpha\}$$

و طیف راست یعنی $\sigma_r(a)$ مجموعه

$$\{\alpha \in \mathbb{F} : \text{از طرف راست وارونپذیر نباشد } a-\alpha\}$$

می‌باشد.

تعریف ۱–۱۸.۱: اگر A یک جبر باناخ باشد و $a \in A$، آنگاه مجموعه همه توابعی را که در یک همسایگی $\sigma(a)$ تحلیلی باشند با $Hol(a)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱–۱۹.۱: **(قضیه نگاشت طیفی)** اگر A یک جبر باناخ باشد، $a \in A$ و $f \in Hol(a)$، آنگاه

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

تعریف ۱–۲۰.۱: اگر X یک فضای باناخ باشد و $A \in B(X)$، آنگاه طیف نقطه‌ای A یعنی $\sigma_p(A)$ با رابطه

$$\sigma_p(A) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A-\lambda) \neq (0)\}$$

و طیف نقطه‌ای تقریبی A یعنی $\sigma_{ap}(A)$ با رابطه

$$\sigma_{ap}(A) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{یک دنباله } \{x_n\} \text{ در } X \text{ موجود است به قسمیکه} \\ \|(A-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0, n \text{ برای هر } \|x_n\| = 1\}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱–۲۱.۱: اگر X یک فضای باناخ باشد و $A \in B(X)$، آنگاه

$$\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{ap}(A).$$

نتیجه ۱—۲۲.۱: اگر $\lambda_\circ$ یک نقطه تنهای $\sigma(A)$ باشد و یک قطب $(z-A)^{-1}$ باشد، آنگاه $\lambda_\circ \in \sigma_p(A)$.

تعریف ۱—۲۳.۱: اگر X یک مجموعه، Ω، σـجبر زیرمجموعه‌های X و H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه یک اندازه طیفی برای (X,Ω,H) تابعی است مانند $E:\Omega \longrightarrow B(H)$ به قسمیکه:

الف) برای هر مجموعه Δ در Ω، $E(\Delta)$ یک تصویر باشد؛

ب) $E(\phi)=\circ$ و $E(X)=۱$؛

پ) $E(\Delta_۱ \cap \Delta_۲) = E(\Delta_۱)E(\Delta_۲)$ برای هر دو مجموعه $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در Ω؛

ت) اگر $\{\Delta_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دو به دو متمایز از Ω باشد، آنگاه

$$E\Big(\bigcup_{n=۱}^{\infty}\Delta_n\Big) = \sum_{n=۱}^{\infty} E(\Delta_n).$$

تعریف ۱—۲۴.۱: فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد، در اینصورت توپولوژی عملگر ضعیف (WOT) روی $B(H)$، توپولوژی محدب موضعی تعریف شده بوسیله نیمه نرمهای $\{p_{h,k}: h,k \in H\}$ است جاییکه

$$p_{h,k}(A) = |\langle Ah, k\rangle|$$

و توپولوژی عملگر قوی (SOT) توپولوژی تعریف شده روی $B(H)$ بوسیله خانواده نیمه نرمهای $\{p_h : h \in H\}$ است، جاییکه

$$p_h(A) = \|Ah\|.$$

لم ۱—۲۵.۱: اگر E یک اندازه طیفی برای (X,Ω,H) باشد و $g,h \in H$، آنگاه

$$E_{g,h}(\Delta) \equiv \langle E(\Delta)g, h\rangle$$

یک اندازه شمارشپذیر جمعی روی Ω تعریف می‌کند به قسمیکه تغییر کل آن کوچکتر یا مساوی $\|g\|\|h\|$ می‌باشد.

قضیه ۱—۲۶.۱: **(قضیه طیفی)** اگر N یک عملگر نرمال باشد، آنگاه یک اندازه طیفی منحصربفرد مانند E روی زیرمجموعه‌های بورل $\sigma(N)$ موجود است به قسمیکه

الف) $N = \int z dE(z)$؛

ب) اگر G یک زیرمجموعه باز نسبی ناتهی $\sigma(N)$ باشد، آنگاه $E(G) \neq ۰$؛

پ) اگر $A \in B(H)$، آنگاه

$$AN = NA$$

و

$$AN^* = N^*A$$

اگر و تنها اگر

$$AE(\Delta) = E(\Delta)\Delta$$

برای هر زیرمجموعه Δ.

۱—۲ نظریه فردهلم

قضیه ۱—۱.۲: اگر $A \in B(H)$، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند:

الف) $\lambda \notin \sigma_{ap}(A)$؛ یعنی $\inf\{\|(A-\lambda)h\| : \|h\| = ۱\} > ۰$.

ب) $ran(A-\lambda)$ بسته است و $\dim\ker(A-\lambda)=0$.

پ) $\lambda\notin\sigma_l(A)$.

ت) $\overline{\lambda}\notin\sigma_r(A^*)$.

ث) $ran(A^*-\overline{\lambda})=H$.

اثبات: با استفاده از قضیه ۱—۱۱.۱ شرایط (الف) و (ب) با هم معادلند. هم‌چنین اگر $B\in B(H)$، آنگاه

$$B(A-\lambda)=1$$

اگر و تنها اگر

$$(A^*-\overline{\lambda})B^*=1.$$

بنابراین به آسانی می‌توان نشان داد که شرایط (پ) و (ت) با هم معادلند.

شرط (ب)، (پ) را نتیجه می‌دهد: برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم

$$M=ran(A-\lambda)$$

و عملگر $T:H\longrightarrow M$ را با ضابطه

$$Th=(A-\lambda)h$$

تعریف می‌کنیم. در اینصورت T یک عملگر دوسویی است و با استفاده از قضیه نگاشت باز عملگر $T^{-1}:M\longrightarrow H$ پیوسته است. عملگر $B:H\longrightarrow H$ را با قرار دادن $B=T^{-1}$ روی M و $B=0$ روی $M^\perp$ تعریف می‌کنیم. در اینصورت داریم $B\in B(H)$ و

$$B(A-\lambda)=1.$$

شرط (ت)، (ث) را نتیجه می‌دهد: از آنجا که $\overline{\lambda} \notin \sigma_r(A^*)$ عملگر C در $B(H)$ موجود است به قسمیکه

$$(A^* - \overline{\lambda})C = ۱.$$

بنابراین داریم:

$$H = (A^* - \overline{\lambda})CH \subseteq ran(A^* - \overline{\lambda}).$$

شرط (ث)، (الف) را نتیجه می‌دهد: برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم

$$N = \ker(A^* - \overline{\lambda})^{\perp}$$

و عملگر $T : N \longrightarrow H$ را با ضابطه

$$Th = (A^* - \overline{\lambda})h$$

تعریف می‌کنیم. در اینصورت T یک عملگر دوسویی و در نتیجه وارونپذیر است. فرض می‌کنیم عملگر $C : H \longrightarrow H$ با ضابطه

$$ch = T^{-۱}h$$

تعریف شده باشد. داریم

$$CH = N$$

و

$$(A^* - \overline{\lambda})C = ۱.$$

بنابراین

$$C^*(A - \lambda) = ۱.$$

حال اگر $h \in H$ داریم:

$$\|h\| = \|C^*(A-\lambda)h\| \leq \|C^*\|\|(A-\lambda)h\|.$$

در نتیجه

$$\inf\{\|(A-\lambda)h\| : \|h\| = ۱\} \geq \|C^*\|^{-۱}.$$

نمادگذاری: اگر $\Delta \subseteq \mathbb{C}$، آنگاه قرار می‌دهیم:

$$\Delta^* \equiv \{\overline{\lambda} : \lambda \in \Delta\}$$

نتیجه ۱—۲.۲: اگر $A \in B(H)$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \partial\sigma(A) &\subseteq \sigma_l(A) \cap \sigma_r(A) \\ &= \sigma_{ap}(A) \cap \sigma_{ap}(A^*)^*. \end{aligned}$$

اثبات: تساوی بالا بلافاصله از قضیه قبل نتیجه می‌شود. در حقیقت

$$\sigma_l(A) = \sigma_{ap}(A)$$

و

$$\sigma_r(A) = \sigma_l(A^*)^* = \sigma_{ap}(A^*)^*.$$

اگر $\lambda \in \partial\sigma(A)$، آنگاه

$$\lambda \in \sigma_{ap}(A).$$

اما از آنجا که $\overline{\lambda} \in \partial\sigma(A^*)$ داریم

$$\overline{\lambda} \in \sigma_{ap}(A^*).$$