بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض

گرایش آنالیز

بررسی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار چندجمله‌ای‌های ماتریسی

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا افشین

استاد مشاور

دکتر علی آرمندنژاد

دانشجو

سمیه شجاعی

اسفند ۱۳۹۰

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

بررسی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار چندجمله‌ای‌های ماتریسی

سمیه شجاعی

در تاریخ ۹۰/۱۲/۱۷ توسط هیئت داوران زیر بررسی و با درجه . بسیار خوب . . . . به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲- استاد مشاور پایان‌نامه آقای دکتر علی آرمندنژاد با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۳- استاد داور داخل از گروه آقای دکتر احمد صفاپور با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۴- استاد داور خارج از گروه آقای دکتر غلامرضا آقاملایی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۵- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی آقای دکتر حسین شیرانی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج، مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه، متعلق به دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان است.

تشکر و قدردانی

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که، هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به هم‌نشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود.

سپاس همه‌ی آنان را که خوشه‌چین معرفتشان بوده‌ام و آموختن را به گونه‌ای مدیون فضل و کرم آنان هستم. بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی خویش را نثار همه‌ی آنان کنم. به ویژه از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر افشین که از هیچ گونه بذل و راهنمایی‌های عالمانه و مستمر خود در جلا بخشیدن به محتوای این پژوهش دریغ نورزیدند، کمال تشکر را دارم.

از استاد دانشمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر آرمند نژاد که افتخار شاگردیشان را داشتم و زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند کمال امتنان دارم.

بر من وظیفه است سپاس از پدر و مادر مهربانم که نمی‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سپید شد سیاه کنم و نه بر دست‌های پینه بسته‌شان، که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. در برابر وجود گرامی‌شان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و بر دستانشان بوسه می‌زنم. پس خدایا به من توفیق ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

همچنین از مادر بزرگوار همسرم، که در این چند سال، همانند مادری دلسوز بار زندگی مرا به دوش گرفتند قدردانی می‌کنم و تشکر می‌کنم از خواهران و برادر عزیزم به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من بودند.

و با سپاس ویژه از همسر مهربانم، همراه لحظه‌های زندگیم،

او که با گذشت خود سختی‌های روزهای آغازین زندگی مشترکمان را به جان خرید و در تمام لحظات یأس و ناامیدی‌ام، با سخنان گرمابخش و امیددهنده‌ی خویش باعث دلگرمی و موفقیت من در این مرحله از زندگی‌ام گردید.

سمیه شجاعی

اسفند ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار و غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار لولایی برای چندجمله‌ای‌های ماتریسی معرفی می‌شود که بررسی برخی خواص هندسی و جبری آن‌ها مورد تأکید است. همچنین روابط بین طیف، بردهای عددی و غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار مرتبه k-ی چندجمله‌ای‌های ماتریسی مطالعه خواهد شد. به‌علاوه غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس‌های دوری بلوکی A-فاکتور پایه‌ای بررسی می‌شوند. با مطالعه‌ی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار ضرب کرونکر دو ماتریس، غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس‌های دوری بلوکی A-فاکتور پایه‌ای یکانی مشخص خواهد شد.

واژگان کلیدی: چندجمله‌ای ماتریسی، غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار، غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار لولایی، ماتریس دوری بلوکی A-فاکتور پایه‌ای، ماتریس همراه بلوکی، ضرب کرونکر.

پیش‌گفتار

مفهوم غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار یک ماتریس از مرتبه k توسط نوانلینا[1] در سال ۱۹۹۲ تعریف شد[۲۲]. از کاربردهای آن می‌توان به تخمین سرعت همگرایی الگوریتم $GMRES$[2] در حل معادلات خطی $Ax = b$ اشاره نمود [۱۲]. گرین‌بام[3] در مورد غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس‌ها تحقیقات وسیعی انجام داده است که از جمله می‌توان به بررسی کران‌های بالا و پایین روی نرم‌های توابع ماتریسی و تخمین جدید سرعت همگرایی الگوریتم $GMRES$ به کار رفته در بلوک جردن اشاره کرد [۱۱, ۱۳]. دیویس[4] و سالمی در سال ۲۰۰۴ روابط بین غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار از مرتبه‌ی دوی ماتریس‌های نرمال و هذلولی قائم‌الزاویه را بررسی نمودند [۸]. سپس در سال ۲۰۰۸، دیویس، لی[5] و سالمی به کمک فرم ماتریس‌هایی که توان دوم آن‌ها هرمیتی است، احکامی در راستای محاسبه‌ی غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار این ماتریس‌ها مطرح کردند [۷].

افشین، مهرجوفرد و سالمی در سال ۲۰۰۹ به تجزیه و تحلیل غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس‌های نرمال پرداختند. سپس در سال ۲۰۱۱ با استفاده از مفهوم برد عددی اولایی، غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار از مرتبه k برای ماتریس‌های نرمال را بررسی نمودند [۲, ۱]. در این پایان نامه غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار چندجمله‌ای‌های ماتریسی به صورت تحلیلی بیان می‌شود. ساختار کلی این پایان نامه به این شرح است:

[1] Nevanlinna

[2] Generalized Minimal Residual

[3] Greenbaum

[4] Davis

[5] Li

در فصل اول، قضایا و تعاریفی آورده شده که به طور مستقیم یا غیر مستقیم در طول پایان نامه از آنها استفاده شده است.

در فصل دوم، به معرفی غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار برای ماتریس‌ها و بررسی خواص آن پرداخته می‌شود.

مطالب فصل‌های زیر برگرفته از مقالات سالمی و آقاملایی می‌باشد[۲۵، ۲۶].

فصل سوم شامل دو بخش است، که در بخش اول، مفهوم غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار مرتبه‌ی k، درجه مینیمال و مرتبه‌ی عددی برای چندجمله‌ای‌های ماتریسی $Q(\lambda)$ و قضایایی در مورد کران‌داری و متقارن بودن آن‌ها بیان شده است و در بخش دوم تعریف غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار لولایی مرتبه‌ی k و روابط بین طیف لولایی، برد عددی لولایی و غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار لولایی مرتبه‌ی k برای چندجمله‌ای ماتریسی آورده خواهد شد.

کران‌داری و برخی خواص غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار مرتبه k، برای چندجمله‌ای‌های ماتریسی نرمال در فصل چهارم مطرح گردیده است.

برخی ویژگی‌های جبری و هندسی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار لولایی خانواده متناهی از ماتریس‌ها در فصل پنجم بررسی می‌شود.

در فصل ششم، ماتریس دوری بلوکی A-فاکتور پایه‌ای π_A که ماتریس همراه بلوکی چندجمله‌ای ماتریسی $Q(\lambda) = \lambda^m I_n - A$ می‌باشد را معرفی کرده و غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار آن محاسبه می‌شود. هم‌چنین غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار ضرب کرونکر دو ماتریس ذکرکرده و نتایجی برای مشخص کردن $V^k(\pi_A)$، که A، ماتریس یکانی است، بیان خواهد شد.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می‌کنیم. این تعاریف و قضایا برگرفته از منابع [۵، ۱۴، ۱۶، ۱۹، ۲۵] می‌باشند. منظور از $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط، $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح، $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی و M_n جبر همه‌ی ماتریسهای مختلط $n \times n$ است.

۱.۱ مقدماتی از نظر ماتریس‌ها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n$. معادله $Ax = \lambda x$ که λ یک اسکالر و $x \in \mathbb{C}^n$ است را در نظر بگیرید. به اسکالر λ و بردار غیر صفر x که در این معادله صدق کند، به‌ترتیب مقدار ویژه A و بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ گویند. مجموعه تمام مقادیر ویژه A، طیف ماتریس A نام داشته و با $\sigma(A)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n$. به مجموعه‌ی بردارهای $x \in \mathbb{C}^n$ که در معادله $Ax = \lambda x$ صدق می‌کنند فضای ویژه‌ی [۱] A متناظر با مقدار ویژه λ گویند. به عبارتی هر عضو ناصفر این فضای

[۱] eigenspace

ویژه، بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه λ است.

تعریف ۳.۱.۱. چندجمله‌ای مشخصه $A \in M_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_A(t) = det(tI - A).$$

لم ۴.۱.۱. مجموعه تمام ریشه‌های $p_A(t) = 0$ برابر با $\sigma(A)$ است.

قضیه ۵.۱.۱. (قضیه کیلی - همیلتون[۱]) فرض کنید $p_A(t)$ چندجمله‌ای مشخصه $A \in M_n$ باشد. در این‌صورت $p_A(A) = 0$.

تعریف ۶.۱.۱. برای $A \in M_n$، به چندجمله‌ای یکین منحصر بفرد $q_A(t)$ از کمترین درجه که A را پوچ می‌کند، چندجمله‌ای مینیمال A گویند.

قضیه ۷.۱.۱. اگر $\mathbb{P}(.)$ یک چندجمله‌ای و λ یک مقدار ویژه A باشد آنگاه $\mathbb{P}(\lambda)$ مقدار ویژه $\mathbb{P}(A)$ می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱. شعاع طیفی ماتریس $A \in M_n$ عبارت است از

$$\rho(A) = max\{| \lambda | : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

تعریف ۹.۱.۱. به ماتریس $A \in M_n$ که $x^*Ax \geq 0$ برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، ماتریس نیمه-معین مثبت گویند.

در صورتی‌که $x^*Ax \leq 0$ برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، ماتریس A را نیمه-معین منفی نامند.

تعریف ۱۰.۱.۱. ماتریس نیمه-معین ماتریسی است که نیمه-معین مثبت یا نیمه-معین منفی باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. ماتریس $A \in M_n$ نرمال است، اگر $AA^* = A^*A$.

تعریف ۱۲.۱.۱. ماتریس $U \in M_n$ یکانی است اگر $U^*U = UU^* = I$.

[۱] Cayley-Hamilton

قضیه ۱۳.۱.۱. اگر $A=[a_{ij}]\in M_n$ با مقادیر ویژه $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ باشد، آن‌گاه موارد زیر معادل‌اند.

۱) A نرمال است.

۲) A به طور یکانی قطری شدنی است، یعنی ماتریس یکانی U موجود است که

$$U^*AU=\Lambda \ \ s.t.\ \ \Lambda=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

۳) $\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$.

۴) n بردار ویژه A تشکیل یک مجموعه متعامد یکه می‌دهند.

تعریف ۱۴.۱.۱. اگر $F\subseteq M_n$، خانواده‌ای جابه‌جایی از ماتریس‌های نرمال باشد، آن‌گاه F به طور یکانی هم‌زمان قطری‌شونده است.

به عبارتی ماتریس یکانی $U\in M_n$ موجود هست که همه ماتریس‌های خانواده‌ی F را قطری می‌کند.

تعریف **۱۵.۱.۱.** ماتریس $A\in M_n$ هرمیتی است اگر $A=A^*$.

تعریف **۱۶.۱.۱.** فضای برداری H روی $\mathbb{C}$ به همراه عمل دوتایی $\langle .,. \rangle : H\times H\longrightarrow \mathbb{C}$ را یک فضای ضرب داخلی مختلط (یا به اختصار، فضای ضرب داخلی) می‌نامیم هرگاه

۱) $\langle \lambda x+y,z\rangle=\lambda\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$ برای هر $x,y,z\in H$ و $\lambda\in\mathbb{C}$

۲) $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$ برای هر $x,y\in H$ منظور از $\overline{\lambda}$ مزدوج مختلط $\lambda\in\mathbb{C}$ می‌باشد

۳) $\langle x,x\rangle\geq 0$ برای هر $x\in H$ و $x=0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle=0$.

تعریف **۱۷.۱.۱.** در فضای ضرب داخلی H، $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ نرم بردار $x\in H$ است، و به آن نرم القا شده توسط ضرب داخلی گفته می‌شود.

قضیه ۱۸.۱.۱. (نامساوی کشی - شوارتز[1]) اگر $<.,.>$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری V بر میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، آن‌گاه

$$|<x,y>|^2\leq<x,x><y,y>,\ \ \forall x,y\in V.$$

[1] cauchi-schwarz inequality

به‌عبارت دیگر

$$|< x,y >| \leq \| x \| \| y \| \quad , \quad \forall x,y \in V.$$

و تساوی زمانی رخ می‌دهد که x,y وابسته خطی باشند یعنی $x = \alpha y$

تعریف ۱.۱.۱۹. تابع $||| \cdot ||| : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نرم ماتریسی گفته می‌شود اگر برای هر $A, B \in M_n$،

۱) $||| A ||| \geq ۰$ و $||| A ||| = ۰$ اگر و تنها اگر $A = ۰$.

۲) $||| cA ||| = |c| ||| A |||$ برای هر $c \in \mathbb{C}$.

۳) $||| A + B ||| \leq ||| A ||| + ||| B |||$.

۴) $||| AB ||| \leq ||| A ||| ||| B |||$.

تعریف ۱.۱.۲۰. نرم طیفی[۱] ماتریسی روی M_n، نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری اقلیدسی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||| A |||_۲ = max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^*A)\}.$$

ملاحظه ۱.۱.۲۱. قرارداد می‌کنیم که در سراسر این پایان‌نامه منظور از $\| \cdot \|$، نرم ماتریسی و منظور از $\| \cdot \|_۲$، نرم طیفی ماتریسی می‌باشد.

قضیه ۱.۱.۲۲. اگر $\| \cdot \|$ نرم ماتریسی دلخواه بوده و $A \in M_n$ آن‌گاه

$$\rho(A) \leq \| A \| .$$

تعریف ۱.۱.۲۳. فرض کنید V فضای برداری حقیقی یا مختلطی باشد و $S \subseteq V$. غلاف محدب [۲] مجموعه‌ی S، با $Conv(S)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Conv(S) = \left\{ \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i : \alpha_i \geq ۰, \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i = ۱, x_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq V,$$

که در واقع کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل S در V می‌باشد.

---

[۱] spectral norm

[۲] convex hull

قضیه ۲۴.۱.۱. اگر K_1, K_2 زیرمجموعه‌های محدبی از فضای V باشند به‌طوری‌که K_1 بسته و K_2 فشرده باشند، هم‌چنین $K_1 \cap K_2 = \emptyset$، آن‌گاه ابرصفحه بسته‌ای می‌توان یافت، که K_1 و K_2 را به‌طور سره از هم جدا کند.

قضیه ۲۵.۱.۱. (قضیه باناخ آلااوغلو[1]) اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آن‌گاه گوی یکه‌ی X^*، W^* فشرده است.

قضیه ۲۶.۱.۱. (قضیه تیخونوف[2]) هر حاصل‌ضرب دلخواه از فضاهای فشرده با توپولوژی حاصل‌ضربی، فشرده است.

تعریف ۲۷.۱.۱. حاصل ضرب کرونکر[3] $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ و $B = [b_{ij}] \in M_{p,q}$ به‌صورت $A \otimes B$ نوشته و برابر است با

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in M_{mp,nq}.$$

توجه کنید که در حالت کلی $A \otimes B \neq B \otimes A$.

لم ۲۸.۱.۱. برای ماتریس‌های A, B, C, D داریم

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD).$$

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید M_n جبر همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ باشد. فرض کنید

$$Q(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_1\lambda + A_0. \tag{1.1}$$

[1] Banach-Alaoglu

[2] Tikhonov theorem

[3] Kronecker product

به طوری که برای هر $i = \circ, \text{۱}, \ldots, m$ ، $A_i \in M_n$ و $A_m \neq \circ$ و λ یک متغیر مختلط باشد. در این‌صورت $Q(\lambda)$ را چندجمله‌ای ماتریسی از درجه m و مرتبه‌ی n گویند.

تعریف ۳۰.۱.۱. $Q(\lambda)$ را خودالحاق[1] گویند اگر هر ضریب A_i ماتریس هرمیتی باشد.

هم‌چنین، اگر برای هر $\mu \in \mathbb{C}$ ماتریس $Q(\mu)$ نرمال باشد. آن‌گاه $Q(\lambda)$ چندجمله‌ای ماتریسی نرمال نامیده می‌شود.

[1] selfadjoint

فصل ۲

غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس

این فصل را با معرفی برد عددی $A \in M_n$، طیف، برد عددی چندجمله‌ای ماتریسی $Q(\lambda)$ و بررسی خواص آن آغاز می‌کنیم. در ادامه غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس $A \in M_n$ تعریف می‌شود. روابط بین این مفاهیم با ذکر گزاره‌ای بیان خواهد شد. این فصل با معرفی غلاف محدب چندجمله‌ای به پایان می‌رسد.

۱.۲ برد عددی

تعریف ۱.۱.۲. برد عددی برای ماتریس $A \in M_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(A) = \{x^* Ax \, , \, x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\},$$

که به آن برد عددی کلاسیک[1] A هم گویند.

گزاره ۲.۱.۲. $W(A)$ فشرده و همبند است.

---

[1] classical numerical range

برهان. $W(A)$ برد تابع پیوسته $x \mapsto x^*Ax$ روی دامنه‌ی فشرده $\{x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$ می‌باشد و چون تصویر هر مجموعه‌ی فشرده تحت تابع پیوسته، فشرده است، بنابراین $W(A)$ فشرده می‌شود.

به‌طور مشابه چون تصویر هر مجموعه‌ی همبند تحت تابع پیوسته، همبند است، بنابراین $W(A)$ همبند می‌باشد. □

لم ۳.۱.۲. اگر $U \in M_n$ ماتریسی یکانی باشد، آن‌گاه

$$W(U^*AU) = W(A).$$

به عبارتی برد عددی تحت تبدیل تشابه یکانی، پایا است.

گزاره ۴.۱.۲. اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ ماتریسی نرمال باشد، آن‌گاه $W(A) = Conv(\sigma(A))$.

برهان. اگر A یک ماتریس نرمال باشد آن‌گاه بنا به ۱.۱.۳ A متشابه یکانی با یک ماتریس قطری D است به‌طوری‌که عناصر روی قطر D مقادیر ویژه A هستند.

$$A = U^*DU, \quad D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

از طرفی بنا به لم فوق برد عددی تحت تبدیل تشابه یکانی پایا است یعنی

$$W(A) = W(U^*DU) = W(D).$$

لذا کافی است $W(D)$ را حساب کنیم.

$$\begin{aligned}
W(D) &= \left\{ x^*Dx \ : \ x^*x = 1 \ , \ x \in \mathbb{C}^n \right\} \\
&= \left\{ \lambda_1 \mid x_1 \mid^2 + \lambda_2 \mid x_2 \mid^2 + \ldots + \lambda_n \mid x_n \mid^2 \ : \ \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 = 1 \ , \ x \in \mathbb{C}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 \lambda_i \ : \ \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 = 1 \ , \ x \in \mathbb{C}^n \right\} \\
&= Conv(\sigma(A)).
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۱.۲. اگر A ماتریس هرمیتی باشد آن‌گاه $W(A)=[\lambda_{min},\lambda_{max}]$.

برهان. طبق گزاره قبل $W(A)=Conv(\sigma(A))$ از طرفی A ماتریس هرمیتی است پس $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}$ و لذا $Conv(\sigma(A))=[\lambda_{min},\lambda_{max}]$. □

تعریف ۶.۱.۲. عدد مختلط λ_0 مقدار ویژه $Q(\lambda)$ است اگر معادله $Q(\lambda_0)x=0$ دارای جواب ناصفر $x_0\in\mathbb{C}^n$ باشد. به x_0 بردار ویژه‌ی $Q(\lambda)$ متناظر با λ_0 گویند و مجموعه همه مقادیر ویژه $Q(\lambda)$، طیف $Q(\lambda)$ نام داشته و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma[Q(\lambda)]=\{\mu\in\mathbb{C}:detQ(\mu)=0\}.$$

لم ۷.۱.۲. هرگاه $detQ(\lambda)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر nm باشد آن‌گاه $\sigma(Q(\lambda))$ مساوی $\mathbb{C}$ است یا شامل حداکثر nm عدد مختلط.

برهان. طبق تعریف بالا، $\sigma[Q(\lambda)]=\{\mu\in\mathbb{C}:det\ Q(\mu)=0\}$ یعنی ریشه های $detQ(\mu)$ و چون طبق فرض، $det(Q(\lambda))$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر nm است لذا حداکثر nm ریشه دارد و با اینکه برای هر $\mu\in\mathbb{C}$ مقدار دترمینان همیشه صفر است لذا جواب کل $\mathbb{C}$ می‌شود. □

مثال ۸.۱.۲. مقادیر ویژه $Q(\lambda)=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & -۳\end{bmatrix}\lambda+I$ را به‌دست آورید؟

از آن‌جا که

$$۰=detQ(\lambda)=(۳\lambda-۱)(-۳\lambda+۱)\Rightarrow\lambda=\pm\frac{۱}{۳}$$

بنابراین

$$\sigma[Q(\lambda)]=\{+\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۳}\}.$$

لم ۹.۱.۲. λ_0 مقدار ویژه $Q(\lambda)$ است اگروتنهااگر صفر مقدار ویژه $Q(\lambda_0)$ باشد.

برهان. فرض کنید λ_0 مقدار ویژه $Q(\lambda)$ باشد. لذا طبق تعریف،

$$Q(\lambda_0)x=0=0x,\ x\neq0\Leftrightarrow0\in\sigma(Q(\lambda_0)).$$

تعریف ۱۰.۱.۲. برد عددی چندجمله‌ای ماتریسی $Q(\lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W[Q(\lambda)] = \{\mu \in \mathbb{C} : x^*Q(\mu)x = 0, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\}.$$

مثال ۱۱.۱.۲. برد عددی $Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی $[0, 1]$ است.

قرار دهید $0 \neq x := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$0 = x^*Q(\mu)x = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu - 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mu(|a|^2 + |b|^2) - |a|^2$$
$$\Rightarrow \mu = \frac{|a|^2}{|a|^2 + |b|^2}.$$

صورت و مخرج هر دو مثبت اند ومخرج بزرگ‌تر است لذا مقدار این کسر کمتر از یک می‌باشد.

$$\begin{cases} a = 0 \Rightarrow \mu = 0 \\ b = 0 \Rightarrow \mu = 1. \end{cases}$$

چون $W[Q(\lambda)] = W(A)$ پس محدب است و بنابراین $W[Q(\lambda)] = [0, 1]$.

لم ۱۲.۱.۲. برای حالت خاص $Q(\lambda) = \lambda I - A$، و $A \in M_n$ داریم

$$W[Q(\lambda)] = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} := W(A) (1)$$

$$\sigma[Q(\lambda)] = \sigma(A) (2)$$

برهان. **(۱)**:

$$\begin{aligned} \mu \in W[Q(\lambda)] &\Leftrightarrow x^*Q(\mu)x = x^*(\mu I - A)x = 0, \quad x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \mu = \frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{x^*}{\sqrt{x^*x}}A\frac{x}{\sqrt{x^*x}}, \quad x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \\ &\overset{y = \frac{x}{\sqrt{x^*x}}}{\Leftrightarrow} \mu = y^*Ay, \quad y^*y = 1, \quad y \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow \mu \in W(A). \end{aligned}$$