فهرست مندرجات

مقدمه

در سیستم‌های دینامیکی مطالعه روی رفتار مدارهای یک سیستم از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردار است. این که یک سیستم تحت چه شرایطی می‌تواند پایدار باشد یا اصولا چه سیستم‌هایی پایدار هستند، موضوعی است که بسیاری از محققین به مطالعه آن پرداخته‌اند. منظور از پایداری این است که تحت یک تغییر بسیار کوچک توپولوژیکی، نوع رفتار مدارهای سیستم تغییر نکند. از جمله سیستم‌های پایدار، سیستم‌های هذلولوی هستند که نقش به سزایی را در مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی دارند. به طور طبیعی برای مطالعه و شناخت سیستم‌های پایدار و هذلولوی نیاز به ابزارهایی است که یکی از این ابزارها، ویژگی سایه‌ای است. بسیاری از محققین مطالعات وسیعی در زمینه ویژگی سایه‌ای داشته‌اند (رجوع کنید به [۳۶]، [۳۵]، [۳۲]، [۳۱]، [۲۴]، [۲۴]، [۲۳]، [۸]). برای مطالعه‌ی رفتار مدار یک سیستم، به طور طبیعی موقعیت مدار در فضای مورد نظر بایستی بررسی گردد. مثلا برای یک نگاشت مانند f روی اعداد حقیقی و عدد گویایی مانند x، مدار f برای این نقطه، x، $f(x)$، $f^{۲}(x)$ و ...می‌باشد که رایانه موقعیت این نقاط را فقط می‌تواند به صورت تقریبی نشان دهد، نقطه‌ای که رایانه برای $f(x)$ مشخص می‌کند دقیقا خود $f(x)$ نیست بلکه نقطه‌ای مانند $x_۱$ است که بسیار نزدیک به $f(x)$ می‌باشد. برای $f(x_۱)$ نقطه‌ای مانند $x_۲$ مشخص می‌گردد که بسیار نزدیک به $f(x_۱)$ خواهد بود و همین طور برای $f(x_۲)$ و الی آخر. در این فرآیندها به دنباله‌ی جدیدی از نقاط x_n می‌رسیم که برای مطالعه مدار x توسط رایانه مشخص می‌گردد. به این گونه دنباله‌ها، مدارنما گفته می‌شود. سوالی که مطرح است این است که آیا مطالعه این مدارنماها اطلاعاتی دقیق در مورد رفتار مدارهای سیستم به ما می‌دهد؟ اگر یک مدارنما توسط یک مدار سایه زده شود آیا به طور طبیعی رفتار این مدارنما رفتار مدار را نشان خواهد داد، و این همان ویژگی سایه‌ای است. به عبارتی یک سیستم دارای ویژگی سایه‌ای است هرگاه هر مدارنمای آن با یک مدار سایه‌زنی شود. ویژگی سایه‌ای ضعیف، مداری، میانگین، میانگین حدی و معکوس از انواع دیگر ویژگی‌های سایه‌ای هستند که در فصل ۲ این پایان‌نامه به آن‌ها اشاره خواهد شد.

در سال ۱۹۹۵، پیلیوگین[۱] و کارلس[۲] به مطالعه خاصیت ژنریک ویژگی سایه‌ای ضعیف پرداختند و نشان دادند که این ویژگی در منیفلدهای همواره فشرده، C°–ژنریک است [۸]. در سال ۱۹۹۹، پیلیوگین و پلامنفسکایا[۳] نشان دادند ویژگی سایه‌ای در یک منیفلد همواره فشرده C°–ژنریک است [۴۱]. خاصیت هموار بودن منیفلد برای اثبات ژنریک بودن ویژگی‌های سایه‌ای و سایه‌ای ضعیف نقش عمده‌ای را ایفا می‌کند. مازیور[۴] در [۳۱] خاصیت C°–ژنریک بودن ویژگی سایه‌ای ضعیف را در منیفلدهای همگن ناهموار ثابت کرد. همچنین خاصیت C°–ژنریک بودن ویژگی سایه‌ای مداری تناوبی را در این گونه منیفلدها به اثبات رسانید. به عنوان یکی از نتایج اصلی این پایان‌نامه، نشان می‌دهیم که ویژگی سایه‌ای مداری در مجموعه‌های بازی از فضای همه‌ی همیومورفیسم‌ها ژنریک است [۱۹].
همان طور که قبلا اشاره شد ویژگی سایه‌ای معکوس یکی دیگر از انواع سایه‌زنی‌ها است. این ویژگی توسط کارلس و پیلیوگین تعریف شد [۸]. بعدها این تعریف با ایده δ–اسلوب‌ها توسط کلودن[۵] و امباخ[۶] ارائه گردید [۲۶]. با کمک ایده δ–اسلوب‌ها، ویژگی سایه‌ای معکوس به سه رده‌ی از نوع $\mathcal{T}_\circ$، $\mathcal{T}_c$ و $\mathcal{T}_h$ تقسیم می‌گردد که بسیاری از محققین به مطالعه آن‌ها پرداخته‌اند. چوی[۷] و بقیه نشان دادند که ویژگی سایه‌ای معکوس از نوع $\mathcal{T}_h$، C°–ژنریک است [۷].
پیلیوگین و کارلس نشان دادند که سیستم‌هایی که ساختاراً پایدار هستند نمی‌توانند دارای ویژگی سایه‌ای معکوس از نوع $\mathcal{T}_\circ$ باشند [۸]. به عنوان یکی دیگر از نتایج اصلی این پایان‌نامه، سیستم‌هایی که دارای ویژگی سایه‌ای معکوس از نوع $\mathcal{T}_\circ$ هستند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و ارتباط این ویژگی را با Ω–پایداری، مینیمال بودن و ویژگی انبساطی بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم ویژگی سایه‌ای معکوس از نوع $\mathcal{T}_\circ$ در مجموعه‌های بازی از فضای همه همیومورفیسم‌ها ژنریک است. بعلاوه C°–ژنریک بودن ویژگی سایه‌ای معکوس ضعیف از نوع $\mathcal{T}_\circ$ را در مجموعه‌های بازی از فضای دیفیومورفیسم‌ها برای منیفلدهای با بعد ۲ و ۳ نشان می‌دهیم [۲۰]، [۲۱]، [۲۲]. ویژگی نگهدارنده و نگهدارنده ضعیف از جمله مواردی است که در سیستم‌های دینامیکی مورد مطالعه بعضی از محققین قرار گرفته است [۲۸]. ما در این پایان‌نامه، ویژگی اکیدا نگهدارنده و اکیدا نگهدارنده ضعیف که قوی‌تر از ویژگی نگهدارنده و نگهدارنده ضعیف هستند را تعریف می‌کینم و به مطالعه ارتباط این ویژگی‌ها با ویژگی سایه‌ای

[۱] Pilyugin
[۲] Corless
[۳] Plamenevskaya
[۴] Mazur
[۵] Kloeden
[۶] Ombach
[۷] Choi

می‌پردازیم. همچنین خاصیت ژنریک و ویژگی اکیدا نگهدارنده ضعیف را در مجموعه‌های بازی از فضای همیومورفیسم‌ها نشان می‌دهیم [۲۰]. از انواع دیگر سایه‌ای، سایه‌ای میانگین و سایه‌ای میانگین حدی است. ویژگی سایه‌ای میانگین توسط بلنک[۸] تعریف شد [۵]. ساکایی [۹] در [۴۵] نشان داد در یک منیفلد بسته هموار با بعد ۲، C^1-درون مجموعه‌ی C^1-دیفیومورفیسم‌هایی که دارای ویژگی سایه‌ای میانگین می‌باشند، برابر با مجموعه‌ی دیفیومورفیسم‌های آنوسوف[۱۰] است. ویژگی سایه‌ای میانگین حدی توسط گیو[۱۱] ارائه شد و ثابت کرد که اگر f تابعی پیوسته و پوشا بر فضای متریک فشرده X باشد که دارای ویژگی سایه‌ای میانگین حدی است آن‌گاه هر نقطه‌ی X یک نقطه بازگشتی زنجیری است. به عنوان یکی از نتایج اصلی این پایان‌نامه، نشان می‌دهیم که اگر نگاشت f روی یک فضای متریک فشرده دارای بیش از یک مولفه زنجیری باشد آن‌گاه f دارای ویژگی میانگین حدی نیست و نشان می‌دهیم سیستم‌هایی با ویژگی سایه‌ای میانگین حدی تنها دارای یک جاذب هستند که همان مجموعه بازگشتی زنجیری f است. همچنین نشان می‌دهیم C^1-درون مجموعه‌ی C^1-دیفیومورفیسم‌هایی که دارای ویژگی سایه‌ای میانگین حدی در یک منیفلد فشرده با بعد ۲ می‌باشند، دیفیومورفیسم‌های آنوسوف هستند [۱۸].

این پایان‌نامه شامل سه فصل است. در فصل ۱ به مقدمات و تعاریف اولیه می‌پردازیم. در فصل ۲ به بیان انواع ویژگی سایه‌ای و در فصل ۳ به نتایج اصلی پایان‌نامه که حاصل آن پنج مقاله شده است می‌پردازیم.

---

[۸] Blank
[۹] Sakai
[۱۰] Anosov
[۱۱] Gu

فصل ۱

مقدمات

فرض کنیم X یک فضای متریک و f تابعی پیوسته روی X باشد. برای نقطه‌ای مانند a، مدار بجلو[۱] a را با $O^+(a)$ نشان می‌دهیم:

$$O^+(a) = \{f^k(a):\ k \geq 0\}$$

که در آن

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ بار}}.$$

اگر f معکوس پذیر باشد، مدار به عقب[۲] نقطه‌ی a به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$O^-(a) = \{f^k(a):\ k \leq 0\}$$

و مدار کلی a عبارتست از $O(a) = \{f^k(a):\ -\infty < k < \infty\}$.

تعریف ۱.۰.۱ مجموعه‌ی پایدار p که با $W^s(p)$ نشان داده می‌شود عبارتست از

$$W^s(p) = \{q \in X|\ d(f^i(p), f^i(q)) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

---

[۱] Forward orbit

[۲] Backward orbit

همین طور مجموعه‌ی ناپایدار p را با $W^u(p)$ نشان می‌دهیم و عبارتست از

$$W^u(p) = \{q \in X|\ \underset{i \to -\infty}{d(f^i(p), f^i(q))} \to ۰\}.$$

تعریف ۲.۰.۱ نقطه‌ی a را نقطه‌ای تناوبی از تناوب n برای f گوییم در صورتی که عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد به قسمی که $f^n(a) = a$ و برای هر $۰ < j < n$ $f^j(a) \neq a$. اگر $n = ۱$، a را نقطه‌ی ثابت f گوییم. مجموعه‌ی نقاط متناوب از تناوب n و مجموعه‌ی نقاط ثابت f را به ترتیب با

$$\mathrm{Per}(n, f) = \{x :\ f^n(x) = x\}$$

و

$$\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}(۱, f)$$

نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۰.۱ نقطه‌ی p را لیاپانف–پایدار گوییم در صورتی که برای هر $\epsilon > ۰$ وجود داشته باشد $\delta > ۰$ی به قسمی که برای هر x اگر $d(x,p) < \delta$ آن‌گاه برای هر $i \geq ۰$ داشته باشیم $d(f^i(x), f^i(p)) < \epsilon$. نقطه‌ی p را مجانباً پایدار گوییم در صورتی که لیاپانف–پایدار باشد و $W^s(p)$ شامل یک همسایگی از p باشد. اگر نقطه‌ی متناوب p مجانباً پایدار باشد آن را نقطه‌ی متناوب جاذب گوییم و اگر برای نقطه‌ی متناوب p، $W^u(p)$ یک همسایگی از p باشد آن را نقطه‌ی متناوب دافع گوییم.

مثال ۱.۰.۱ برای نگاشت $F_\mu(x) = \mu x(۱ - x)$ (در حالت $\mu = ۴$ این نگاشت به نگاشت لوجستیک معروف است) نقطه‌ی ۰ و $p_\mu = \frac{\mu - ۱}{\mu}$ نقاط ثابت F_μ می‌باشد. نقطه‌ی ثابت صفر یک نقطه‌ی جاذب برای $۱ < \mu < ۳$ و یک نقطه‌ی دافع برای $۰ < \mu < ۱$ است. نقطه‌ی ثابت p_μ برای $۱ < \mu < ۳$ جاذب و برای $۰ < \mu < ۱$ و $\mu > ۳$ دافع است.

۱.۱ مجموعه‌های حدی و بازگشتی

تعریف ۱.۱.۱ نقطه‌ی y را یک نقطه‌ی ω—حدی x برای f گوییم در صورتی که زیر دنباله‌ای از اعداد طبیعی مانند $\{n_k\}$ موجود باشد و

$$\lim_{k\to\infty} d(f^{n_k}(x), y) = \circ.$$

مجموعه‌ی نقاط ω—حدی x را مجموعه ω—حدی x خوانیم و با $\omega(x)$ یا $\omega(x,f)$ نشان می‌دهیم. اگر f معکوس پذیر باشد به طور مشابه مجموعه‌ی α—حدی x را با $\alpha(x)$ یا $\alpha(x,f)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a(x,f) = \{y|\ \exists n_k, n_k \underset{k\to-\infty}{\to} -\infty, \lim_{k\to-\infty} d(f^{n_k}(x), y) = \circ\}.$$

مثال ۱.۱.۱ نگاشت دایره $\tau_\rho : S^۱ \to S^۱$ با ضابطه‌ی $\tau_\rho = x+\rho$ را که ρ عددی گنگ است در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in S^۱$ مدار x در $S^۱$ چگال است. بنابراین

$$\omega(x) = \alpha(x) = S^۱$$

تعریف ۲.۱.۱ زیر مجموعه‌ی S از X را مثبت—پایا[۳] گوییم در صورتی که برای هر $x \in S$ داشته باشیم $f(x) \in S$. به عبارت دیگر $f(S) \subset S$.
زیر مجموعه S از X را منفی—پایا[۴] گوییم در صورتی که $f^{-۱}(S) \subset S$ و سرانجام زیرمجموعه‌ی $S \subset X$ را پایا گوییم در صورتی که $f(S) = S$.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنیم $f : X \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته روی فضای متریک فشرده‌ی X باشد در این صورت

۱) برای هر x

$$\omega(x) = \bigcap_{N\geq\circ} \overline{\left(\bigcup_{n\geq N} f^n(x)\right)}$$

[۳] Positively invariant
[۴] Negatively invariant

و اگر f معکوس پذیر باشد آن‌گاه

$$\alpha(x) = \bigcap_{N \leq \circ} \overline{\left(\bigcup_{n \geq N} \{f^n(x)\} \right)}$$

۲) برای هر x، $\omega(x)$ یک مجموعه‌ی مثبت—پایای بسته و $\alpha(x)$ یک مجموعه‌ی منفی—پایای بسته می‌باشد.

برهان. با توجه به تعریف $\omega(x)$ و $\alpha(x)$ واضح است. □

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه‌ی S را برای f یک مجموعه‌ی مینیمال گوییم در صورتی که

۱) S بسته، ناتهی و پایا باشد.

۲) اگر B مجموعه‌ای بسته، ناتهی و پایا باشد و $B \subseteq S$ آن‌گاه $B = S$.

مثال ۲.۱.۱ هر مدار متناوب یک مجموعه‌ی مینیمال است و به راحتی می‌توان دید که زیرمجموعه‌ی فشرده و ناتهی S مینیمال است اگر و فقط اگر برای هر $x \in S$، $\omega(x) = S$.

تعریف ۴.۱.۱ نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی ω—بازگشتی گوییم در صورتی که $x \in \omega(x)$ و آن را α—بازگشتی گوییم در صورتی که $x \in \alpha(x)$.

بستار مجموعه‌ی همه‌ی نقاط ω—بازگشتی رامرکز بیرخف[5] گوییم و با $B(f)$ نشان می‌دهیم:

$$B(f) = \overline{\{x : \text{ بازگشتی است—}\omega \text{ ،} x\}}.$$

بستار مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های ω—حدی را مجموعه‌ی حدی f گوییم و با $L(f)$ نشان می‌دهیم:

$$L(f) = \overline{\bigcup \{\omega(x, f) : x \in X\}}.$$

[5] Birkhoff

تعریف ۵.۱.۱ نقطه‌ی $p \in X$ را یک نقطه‌ی ناسرگردان برای f گوییم در صورتی که برای هر همسایگی U از p عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد به قسمی که

$$f^n(U) \cap U \neq \varnothing.$$

مجموعه‌ی همه‌ی نقاط ناسر گردان f را مجموعه ناسرگردان گوییم وبا$\Omega(f)$ نشان می‌دهیم.
تعریف ۶.۱.۱ یک $\varepsilon-$زنجیر به طول n از x به y برای تابع f عبارتست از یک دنباله مانند $\{x = x_\circ, \cdots, x_n = y\}$ به طوری که برای هر $1 \leq j \leq n$،

$$d(f(x_{j-1}), x_j) < \varepsilon$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم $Y \subset X$.مجموعه‌ی حدی $\varepsilon-$زنجیری Y عبارتست از

$$\Omega^+_\varepsilon(Y, f) := \left\{ x \in X : \begin{array}{l} \text{برای هر } n > 1 \text{ وجود داشته باشد } y \in Y \text{ای و} \\ \text{یک } \varepsilon-\text{زنجیر از } y \text{ به } x \text{ به طول بزرگتر از } n \end{array} \right\}$$

مجموعه‌ی حدی زنجیری مثبت Y برای f را با $\Omega^+(Y, f)$ نشان داده و داریم

$$\Omega^+(Y, f) := \bigcap_{\varepsilon > \circ} \Omega^+_\varepsilon(Y, f)$$

به طور مشابه

$$\Omega^-_\varepsilon(Y, f) := \left\{ y \in X : \begin{array}{l} \text{برای هر } n > 1 \text{ وجود داشته باشد } x \in Y \text{ی و} \\ \text{یک } \varepsilon-\text{زنجیر از } y \text{ به } x \text{ به طول بزرگتر از } n \end{array} \right\}$$

و

$$\Omega^-(Y, f) := \bigcap_{\varepsilon > \circ} \Omega^-_\varepsilon(Y, f)$$

و سرانجام مجموعه بازگشتی زنجیری f که با $R(f)$ نشان داده می‌شود عبارتست از

$$\begin{aligned} R(f) &= \{x :\ \text{برای هر } \varepsilon > \circ \text{ وجود داشته باشد یک } \varepsilon-\text{زنجیر از } x \text{ به } x\} \\ &= \{x :\ x \in \Omega^+(x, f)\} \\ &= \{x :\ x \in \Omega^-(x, f)\} \end{aligned}$$

تعریف ۸.۱.۱ رابطه‌ی $\sim$ را روی $R(f)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $x,y \in R(f)$، $x \sim y$ اگر و فقط اگر $x \in \Omega^{+}(y,f)$ و $y \in \Omega^{+}(x,f)$.

به راحتی می‌توان دید که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $R(f)$ است و رده‌های هم‌ارزی را مولفه‌های زنجیری $R(f)$ گوییم.

اگر مجموعه‌ی پایای Λ یک مولفه زنجیری برای f باشد گوییم f روی Λ متعدی زنجیری است.

با این تعریف به راحتی می‌توان دید که

$$B(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset R(f)$$

تعریف ۹.۱.۱ نگاشت f را روی مجموعه‌ی پایای Y توپولوژیکی متعدی گوییم در صورتی که وجود داشته باشد $p \in Y$ای به طوری که مدار p در Y چگال باشد. قضیه تعدی بیرکف نشان می‌دهد که f روی Y توپولوژیکی متعدی است اگر و فقط اگر برای هر دو مجموعه‌ی باز U و V از Y، وجود داشته باشد عدد صحیح مثبت n که $f^{n}(U) \cap V \neq \varnothing$.

نگاشت f را توپولوژیکی آمیخته روی Y گوییم در صورتی که برای هر دو مجموعه باز U و V وجود داشته باشد عدد صحیح مثبت $n_{\circ}$ به طوری که $f^{n}(U) \cap V \neq \varnothing$ برای هر $n \geq n_{\circ}$.

مثال ۳.۱.۱ فرض کنیم $\{۱,۲\}^{\mathbb{N}}$ فضای تمام توابع از مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به $\{۱,۲\}$ باشد، که آن را با $\sum_{۲}^{+}$ نشان می‌دهیم. روی $\sum_{۲}^{+}$ متریک زیر را تعریف می‌کنیم

$$d(s,t) = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\delta(s_k,t_k)}{۳^{k}}$$

که $s=(s_{۱},s_{۲},\cdots)$، $t=(t_{۱},t_{۲},\cdots)$ و

$$\delta(i,j) = \begin{cases} ۰ & i=j \\ ۱ & i \neq j \end{cases}.$$

نگاشت نوبت $\sigma : \sum_{۲}^{+} \longrightarrow \sum_{۲}^{+}$ که به صورت $\sigma(s)=t$ تعریف می‌شود که $t_k = s_{k+۱}$ را در نظر می‌گیریم، یعنی $\sigma(s_{۱},s_{۲},\cdots)=(s_{۲},s_{۳},\cdots)$ که $s_i \in \{۱,۲\}$.

اگر تمام حالت‌های جایگشتی ۱ و ۲ را نوشته و کنار هم قرار دهیم به شکل زیر دست پیدا خواهیم کرد

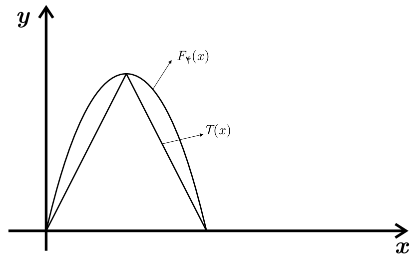
$$s = (\underbrace{۱\ ۲}_{\text{حالت یکتایی}}\ \underbrace{۱۲\ ۲۱\ ۱۱\ ۲۲}_{\text{حالت دوتایی}}\ \cdots).$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که مدار s تحت σ یک مدار چگال در $\sum_{۲}^{+}$ است. این نشان می‌دهد که σ توپولوژیکی متعدی است.

۲.۱ مزدوجی و C^r−مزدوجی

تعریف ۱.۲.۱ دو تابع پیوسته‌ی $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ را مزدوج خوانیم در صورتی که هیومورفیسمی مانند $h : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به قسمی که $h \circ f = g \circ h$.

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد. گوییم دو C^r−دیفیومورفیسم f و g روی M، C^r−مزدوج هستند در صورتی که وجود داشته باشد C^r−دیفیومورفیسمی مانند h روی M به قسمی که $h \circ f = g \circ h$. h را مزدوجی f و g گوییم.



مثال ۱.۲.۱ نگاشت $T(x)$ و $F_۴(x)$ که روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند مزدوجند.

$$T(x) = \begin{cases} ۲x & ۰ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ ۲(۱ - x) & \frac{۱}{۲} < x \leq ۱ \end{cases}$$

$$F_۴(x) = ۴x(۱ - x), x \in [۰, ۱]$$

با محاسبه معمولی می‌توان دید که $F_۴$ و T توسط $h(x) = \frac{۱ - cos\pi x}{۲}$ مزدوج می‌شوند[۴۴].

فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده باشد. مجموعه‌ی همیومورفیسم‌های از X به روی X را با $H(x)$ نشان می‌دهیم. روی $H(x)$ متریک

$$d_\circ(f,g) = \sup_{x\in X}\left\{d(f(x),g(x)), d(f^{-1}(x),g^{-1}(x))\right\}$$

را تعریف می‌کنیم، با این متریک $H(x)$ فضایی کامل است[۲].

فرض کنیم M یک C^r-منیفلد فشرده باشد که $1 \leq r \leq \infty$، باشد. فضای C^r-دیفیومورفیسم‌های از M به M با C^r-توپولوژی را به $Diff^r(M)$ نشان می‌دهیم. یک دنباله‌ی f_n را C^r-همگرا خوانیم در صورتی که همه مشتق‌های f_n با مرتبه‌ی کمتر یا مساوی با r همگرای یکنواخت باشد. برای $r = 0$، $Diff^0(M)$ همان $H(M)$ می‌باشد[۴۴].

تعریف ۲.۲.۱ یک مجموعه در یک فضای توپولوژیک را مانده (ژنریک) خوانیم در صورتی که شامل اشتراکی شمارا از مجموعه‌های باز و چگال باشد. اگر یک ویژگی روی یک مجموعه مانده برقرار باشد گوییم آن ویژگی ژنریک است.

به عنوان مثال یکی از مباحث و پرسش‌های بسیار مهمی که در سیستم‌های دینامیکی مطرح است پاسخ به پرسش‌های زیر است.

۱) آیا $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$ در $Diff^r(M)$ ژنریک است؟

۲) آیا $R(f) = \Omega(f)$ در $Diff^r(M)$ ژنریک است؟

یک پاسخ خاص و مشخص به پرسش ۱ لم بستن پیو[۶] است که در زیر آمده است.

قضیه ۱.۲.۱ $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$ در $Diff^1(M)$ ژنریک است[۴۴].

---

[۶] Pugh

۱.۲.۱ مجموعه‌های هذلولوی

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم Λ یک مجموعه‌ی پایا و بسته برای C^r–دیفیومورفیسم f روی منیفلد M باشد. گوییم Λ یک مجموعه‌ی هذلولوی برای f است اگر یک شکافتن از تحدید کلاف مماس M به Λ به دو زیرفضای خطی از کلاف مماس M وجود داشته باشد به قسمی که Tf نسبت به هر یک از این زیرفضاهای خطی پایا و بر روی یکی از این زیرفضاها حالت انبساطی و برروی دیگری حالت انقباضی داشته باشد به عبارتی شرایط زیر برقرار باشد

۱) $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$،

۲) $Tf(E^s) = E^s$ و $Tf(E^u) = E^u$،

۳) وجود دارد ثابت‌های $c > ۰$ و $۰ < \lambda < ۱$ به طوری که

$$||Tf^n|_{E^s}|| < c\lambda^n, \qquad n \geq ۰$$
$$||Tf^{-n}|_{E^u}|| < c\lambda^n, \qquad n \geq ۰$$

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم $\Lambda = \{p\}$ که $f(p) = p$ و T_pf یک ایزومورفیسم خطی روی T_pM است. در این صورت یک شکافتن هذلولوی وجود خواهد داشت اگر و فقط اگر مقادیر ویژه T_pf نرم مخالف ۱ داشته باشد. در واقع اگر

$E^s =$ ویژه فضای تمام مقادیر ویژه‌ی با نرم کمتر از ۱

$E^u =$ ویژه فضای تمام مقادیر ویژه‌ی با نرم بزرگتر از ۱

آنگاه

$$T_p\Lambda = E^s \oplus E^u \qquad (۱)$$

مثال ۳.۲.۱ فرض کنیم Λ یک مدار تناوبی باشد

$$\Lambda = \{p_۱, \dots, p_k\}$$

و $f(p_i) = p_{i+1} (\text{mod} k)$ در این صورت

$$T_\Lambda M = (T_{p_1} M \cup \cdots \cup T_{p_k} M)$$

که

$$T_{p_i} M = E^s_{p_i} \oplus E^u_{p_i}$$

و

$$Tf(E^s_{p_i}) = E^s_{p_{i+1}} (\text{mod} k)$$

و

$$Tf(E^u_{p_i}) = E^u_{p_{i+1}} (\text{mod} k).$$

تذکر. با توجه به اینکه Λ یک مدار تناوبی است موارد زیر برقرار است

۱) Tf^k یک اتومورفیسم روی هر $T_{p_i} M$ است.

۲) یک شکافتن هذلولوی از $T_\Lambda M$ وجود دارد اگر و فقط اگر هر p_i یک نقطه‌ی ثابت هذلولوی f^k باشد.

تعریف ۴.۲.۱ C^1–دیفیومورفیسم f روی M را آنوسوف خوانیم در صورتی که M یک مجموعه هذلولوی برای f باشد.

مثال ۴.۲.۱ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، $det(A) = 1$. نگاشت $\hat{A}$ روی فضای خارج قسمتی چنبره $T^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ طوری عمل می‌کند که نمودار زیر جابه‌جایی است

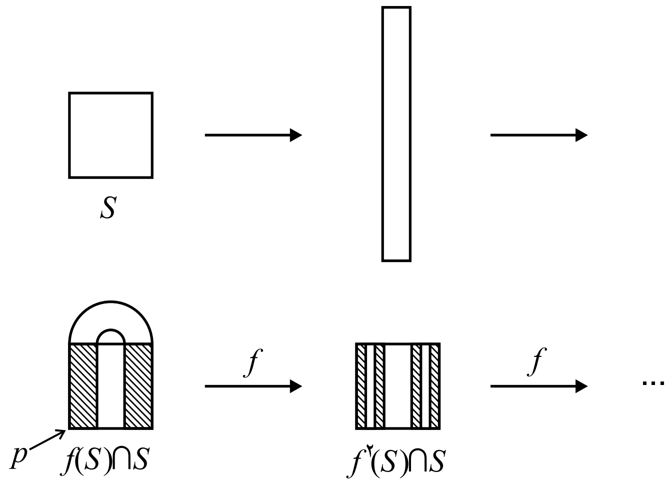
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"] \arrow[d] & \mathbb{R}^2 \arrow[d] \\ T^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2} \arrow[r, "\hat{A}"] & \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2} = T^2. \end{tikzcd}$$

چون مقادیر ویژه A برابر $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ است، پس T^2 برای $\hat{A}$ هذلولوی است، یعنی $\hat{A}$ روی T^2 آنوسوف است.

نعل اسب اسمیل. مثال نعل اسب اسمیل[7] یکی از مهمترین مثال‌هایی است که در سیستم‌های دینامیکی مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در ادامه به بعضی از ویژگی‌های مهم آن اشاره خواهیم کرد. ابتدا نگاشتی از مجموعه‌ی $S = [0, 1] \times [0, 1]$ به توی صفحه $\mathbb{R}^2$ معرفی می‌کنیم و نقاط

[7] Smale

ناسرگردان آن را مشخص می‌کنیم که منجر به مجموعه‌ی پایا و هذلولوی نعل اسب اسمیل می‌شود. نگاشت f را روی مربع S طوری می‌سازیم که مربع را در جهت عمودی منبسط و در جهت افقی منقبض نماید. سپس آن را به صورت شکل زیر تا می‌کنیم.



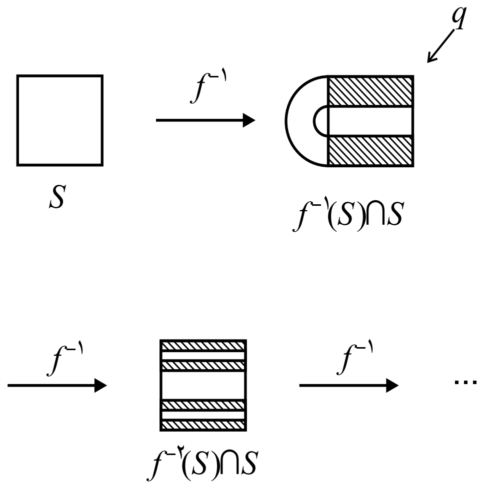
با توجه به تعریف f به راحتی قابل مشاهده است که نقاط p و q، مشخص شده در شکل، نقاط ثابت f هستند. یعنی $f(p) = p$ و $f(q) = q$. بعلاوه p و q نقطه‌های ثابت زینی برای f هستند. مجموعه‌ی

$$\Lambda = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(S)$$

که تحت f پایا می‌باشد بصورت حاصلضرت $C_۱ \times C_۲$ است. که در آن $C_۱$ و $C_۲$ مجموعه‌های کانتورند و برای هر $x = (x_۱, x_۲) \in \Lambda$ می‌توان نوشت

$$T_x\Lambda = E^s_x \oplus E^u_x$$

که $E^s_x = \{x_۱\} \times C_۱$ و $E^u_x = C_۱ \times \{x_۲\}$. بنابراین Λ یک مجموعه پایای هذلولوی برای f است.



۲.۲.۱ منیفلدهای پایدار و ناپایدار برای مجموعه‌های هذلولوی

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم f یک دیفیومورفیسم روی منیفلد M و x یک نقطه در زیرمجموعه‌ای هذلولوی از M باشد. در این صورت مجموعه‌های

$$W^s_\varepsilon(x,f)=\left\{y\in M|\ d(f^n(x),f^n(y))<\varepsilon,\forall n\geq 0,\, d(f^n(x),f^n(y))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$$

و

$$W^s(x,f)=\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x)))$$

را بترتیب منیفلد پایدار موضعی و منیفلد پایدار در نقطه‌ی x خوانیم. به صورت مشابه منیفلد ناپایدار موضعی و منیفلد ناپایدار در نقطه‌ی x عبارتست از

$$W^u_\varepsilon(x,f)=\left\{y\in M|\ d(f^n(x),f^n(y))\leq\varepsilon,\forall n\leq 0,\, d(f^n(x),f^n(y))\underset{n\to-\infty}{\rightarrow} 0\right\}$$
$$W^u(x,f)=\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^u_\varepsilon(f^{-n}(x)))$$

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه‌ی منیفلد پایدار). فرض کنیم Λ یک زیر مجموعه‌ی پایای هذلولوی M باشد. در این صورت $\varepsilon > \circ$ ی وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \Lambda$، $W^s_\varepsilon(x,f)$ یک قرص نشانده شده با بعدی برابر بعد E^s_x است و $T_xW^s_\varepsilon(x) = E^s_x$. به بعلاوه $W^u_\varepsilon(x,f)$ یک قرص نشانده شده با بعدی برابر بعد E^u_x است و $T_xW^u_\varepsilon(x) = E^u_x$ که شرایط زیر برای آن برقرار است.

(۱)

$$d(f^n(x), f^n(y)) \le \lambda^n d(x,y), \qquad \forall y \in W^s_\varepsilon(x), \forall n \ge \circ$$
$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \le \lambda^n d(x,y), \qquad \forall y \in W^u_\varepsilon(x), \forall n \ge \circ$$

که $\lambda < ۱$ طوری است که $\|Df|_{E^s}\| < \lambda$ و $\|Df|_{E^u}\| < \lambda$.

(۲) نشاندن $W^u_\varepsilon(x,f)$ و $W^s_\varepsilon(x,f)$ با x به طور پیوسته تغییر می کند.

(۳)

$$W^s_\varepsilon(x,f) = \{y|\ d(f^n(x), f^n(y)) \le \varepsilon,\ \forall x \ge \circ\}$$
$$W^u_\varepsilon(x,f) = \{y|\ d(f^n(x), f^n(y)) \le \varepsilon,\ \forall x \ge \circ\}$$

(۴) منیفلدهای $W^u_\varepsilon(x,f)$ و $W^s_\varepsilon(x,f)$ منیفلدهایی هموار هستند.(برای اثبات رجوع کنید به [۴۴])

۳.۱ اریبی (تقاطع)

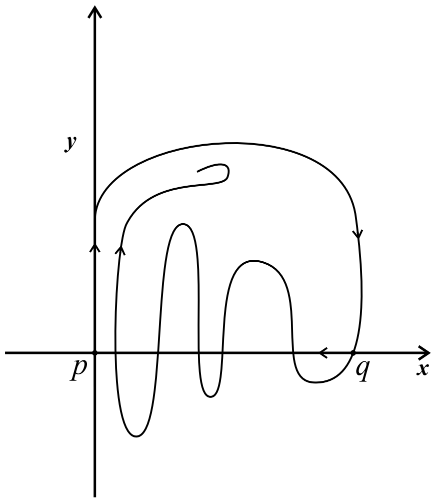
فرض کنیم V و W دو زیر منیفلد M باشند به طوری که در نقطه‌ی p اشتراک دارند. گوییم V و W در نقطه‌ی p اریب هستند یا p یک نقطه‌ی اریبی V و W است، و می‌نویسیم $V \overset{p}{\pitchfork} W$ در صورتی که $T_pV + T_pW = T_pM$.

به طور کلی اگر f یک نگاشت هموار از منیفلد V به منیفلد M باشد و W یک زیرمنیفلد

M ، گوییم f اریب است به W در نقطه p و می‌نویسیم $f \overset{p}{\pitchfork} W$، اگر $f(p) \notin W$ یا $f(p) \in W$ و $T_{f(p)}M = Df_p(T_pV) + T_{f(p)}W$.

گوییم V و W اریب هستند و می‌نویسیم $V \pitchfork W$، در صورتی که V و W در نقاط اشتراکشان اریب باشند.

و$f : V \longrightarrow M$ را اریب به W روی زیر مجموعه‌ی K گوییم اگر f به W در تمام نقاط K اریب باشد.



تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای متریک و f همیومورفیسمی از X بروی X باشد. گوییم f برای زیر مجموعه Y از X انبساطی است، اگر وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ی به طوری که برای هر دو نقطه‌ی متمایز $x, y \in X$ که $y \in Y$ داشته باشیم $\sup_n d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

هنگامی که $Y = X$ گوییم f انبساطی است و بزرگترین عدد $\varepsilon > 0$ با ویژگی فوق را ثابت انبساط f خوانیم.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم p یک نقطه‌ی متناوب هذلولوی با دوره‌ی تناوب n برای دیفیومورفیسم f باشد. داریم

$$W^\sigma(O(p,f)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} W^\sigma\left(f^j(p)\right)$$

و

$$\hat{W}^\sigma(O(p,f)) = W^\sigma(O(p,f)) \setminus O(p,f)$$

که برای آن $\sigma = s, u$. نقطه‌ی $q \in \hat{W}^s(O(p,f)) \cap \hat{W}^u(O(p,f))$ را یک نقطه‌ی هموکلینیک برای p گوییم. نقطه‌ی q را نقطه‌ی هموکلینیک اریبی گوییم در صورتی که منیفلدهای $\hat{W}^s(O(p,f))$ و

$\hat{W}^u(O(p,f))$ در q دارای اشتراک اریبی ناتهی باشد.

قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که وجود یک نقطه‌ی هموکلینیک اریبی، وجود نعل اسب اسمیل را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۱ فرض کنیم q یک نقطه‌ی هموکلینیک اریب متناظر با نقطه‌ی متناوب هذلولوی p برای یک دیفیومورفیسم f باشد در این صورت برای هر همسایگی U از $\{p,q\}$، عدد مثبت n موجود است بطوری که f^n دارای مجموعه‌ی پایای هذلولوی Λ است که $\Lambda \subset U$ و $p,q \in \Lambda$ و f^n روی Λ با نگاشت نوبت به طور توپولوژیکی مزدوج است. بنابراین $\Lambda \subset \overline{\mathrm{Per}(f)} \subset \Omega(f)$ و $q \in \overline{\mathrm{Per}(f)}$.

برهان. [۴۴] را ببینید. □

۴.۱ جاذب‌ها

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم $f: M \longrightarrow M$ یک همیومورفیسم باشد. زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی $N \subset M$ را یک ناحیه‌ی جذب کننده برای f گوییم در صورتی که $f(N) \subset \mathrm{int}(N)$. مجموعه‌ی Λ را یک جاذب برای f گوییم هرگاه وجود داشته باشد ناحیه جذب کننده‌ی N به طوری که $\Lambda = \bigcap_{k \geq ۰} f^k(N)$. هر جاذب که ساختار هذلولوی داشته باشد را جاذب هذلولوی گوییم.

تذکر. در بعضی موارد برای تعریف جاذب این شرط که $f|_\Lambda$ متعدی زنجیری باشد را بیان می‌کنند که در چنین صورتی $\Lambda \subset R(f)$[۴۴].

مثال ۱.۴.۱ جاذب سولنوئید[۸] یک جاذب هذلولوی است که به صورت زیر بیان می‌شود.
فرض کنیم

$$D^۲ = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leq ۱\},\ S^۱ = \{t \in \mathbb{R}\mathrm{mod}\,۱\},\ N = S^۱ \times D^۲$$

نگاشت $g: S^۱ \longrightarrow S^۱$ را به صورت $g(t) = ۲t\mathrm{mod}\,۱$ در نظر می‌گیریم و به کمک آن نگاشت $f: N \longrightarrow N$ را به صورت $f(t,z) = (g(t), \frac{۱}{۴}z + \frac{۱}{۲}e^{۲\pi i t})$ تعریف می‌کنیم در این صورت $\Lambda = \bigcap_{k=۰}^{\infty} f^k(N)$ یک جاذب هذلولوی برای f خواهد بود. در واقع تابع f روی چنبره‌ی توپر N اینگونه

[۸] Solenoid