بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با استفاده از پایه‌های تعمیم یافته بر اساس روش‌های طیفی

دانشجو:

سعید الهی مهر

استاد راهنما:

دکتر کاظم نوری هفت‌چشمه

استاد مشاور:

دکتر باقر کرامتی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم :

به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی، سخاوت، سکوت، مهربانی و . . .

پدرم راه تمام زندگیست

پدرم دلخوشی همیشگیست

تقدیم به مادر عزیزتر از جانم :

مادرم هستی من ز هستی توست تا هستم و هستی دارمت دوست . . .

غمگسار جاودانی مادر است.

چشم سار مهربانی مادر است.

قدردانی

علم همواره عرصه ی سیمرغانی رنگین بال است که سایه ی خویش گسترده اند تا جمیع خلایق، قدر عافیت دانند و بر سبیل عافیت، سر از آستان شکرگذاری اول معلوم عالم، برندارند. امروز که مفتخرم قطره ای از بیکران اقیانوس دانش به مذاق جان ریخته ام؛ دریغم آمد خاضعانه و شاکرانه منت پذیر لطف آنانی نباشم که مهربانیشان بی دریغ بود و مهرشان افزون. سرمستانی از باده ی یار، که دانششان گنج قارونم بود و به همتشان آب حیات بر ظلمات جهل جسته ام، کسانی که بارها بر خواسته های خود چشم پوشیدند، تا خواسته هایم محقق شود، از داشته هایشان گذاشتند تا داشته باشم و چنان بی چشم داشت دوستم داشتند که حتی چشمانم این چنین نبوده اند.

پدرم، می ستایمت که سپیدی موهایت را با سیاهی قلم عوض کردی و خواستی بدانم و بدانم، تویی که داشتنت تداعی البرز است برای آرامش خزر. مادرم، یگانه روزگارم، تو خمخانه ی عشقی، وعده ی دولت بیدار حافظی و طربناکی ترنم باران. چقدر واژه ها شرمسارند که نمی توانند تو را توصیف کنند و من شرمسارتر از همه ی واژه ها.

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر کاظم نوری هفت چشمه که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و با تقوا، جناب آقای دکتر باقر کرامتی که زحمت مشاوره این پایان نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛

و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر جواد میرچی و جناب آقای دکتر بابایی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و نهایتا بر خود واجب می دانم از استاد، دوست و برادر عزیزم آقای خسرویان عرب کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم، انشاالله که در تمامی مراحل زندگی موفق و سربلند باشند.

بارالها، آنان که بیشتر می دانند، نزد تو عزیزترند و هر که عزیزتر است، مسئول تر است. در مسیر دانایانم بدار که عزت جهان به عزیزی نزد توست و قدرتم ده که آن باشم که تو خواهی.

چکیده

معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری کاربرد زیادی در مدل سازی پدیده‌های فیزیکی و علوم مهندسی دارند. اما یافتن جواب تحلیلی و دقیق برای این معادلات در اکثر موارد خصوصا در حالت غیر خطی آنها بسیار دشوار است. در نتیجه استفاده از روش‌های عددی کارآمد برای حل این معادلات بسیار مورد توجه قرار گرفته است. یکی از پرکاربردترین این روش‌ها که از دقت بسیار بالایی نیز برخوردار است، روش‌های طیفی است. در این‌گونه روش‌ها جواب تقریبی مساله را به صورت ترکیب خطی از توابعی مستقل خطی که توابع کوششی نامیده می‌شوند در نظر می‌گیریم و با جایگذاری این جواب تقریبی در مساله، مانده‌ای ایجاد می‌شود که سعی می‌نماییم با کمک توابعی مستقل خطی به نام توابع آزمون این مانده را تحت یک ضرب داخلی وزن‌دار مینیمم کنیم. دسته عمده‌ای از توابع مستقل خطی که در این روش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد چند جمله‌ای‌های متعامد کلاسیک مانند ژاکوبی، لاگور و یا هرمیت می‌باشند. این چند جمله‌ای‌ها در واقع جواب‌های یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم هستند که به آنها مسایل اشتروم-لیوویل گوئیم. با گسترش کاربردهای حسابان کسری در علوم، محققان به فکر این ایده افتادند که خود مساله اشتروم-لیوویل را به صورت مرتبه کسری آن تعمیم دهند تا بتوانند پایه‌هایی را بدست آورند که برای تقریب مسائل کسری بهتر عمل کنند.

در این پایان نامه حالتی از مساله اشتروم-لیوویل مرتبه کسری را بیان می‌کنیم، سپس پایه‌هایی که از این مسایل بدست آمده را معرفی کرده و از آنها برای حل مسایل مرتبه کسری استفاده می‌کنیم و با ارائه مثال‌های عددی نشان خواهیم داد که این پایه‌ها با دقت بالاتری، نسبت به جواب ویژه‌های مسایل اشتروم-لیوویل معمولی، مسایل مرتبه کسری را تقریب می‌زنند.

واژه‌های کلیدی: حسابان مرتبه کسری، مسایل اشتروم-لیوویل، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، انتگرال گیری گوسی، روش‌های طیفی.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

پیشگفتار

همانطور که می‌دانیم، مشتق و انتگرال دارای مفاهیم هندسی بسیار جالبی می‌باشد و تقریبا می‌توان گفت که جزء مفاهیمی هستند که به عنوان ابزار قوی در دست ریاضیدان‌ها، فیزیک‌دانان و مهندسان بوده است. بحث تعمیم مفاهیم که معمولا بعد از ارائه یک مفهوم مطرح می‌شود همواره جزء اصلی‌ترین محور کار دانشمندان بوده است. تا آنجا که سال ۱۶۹۵ هوپیتال طی نامه‌ای از لایبنیتز پرسید که آیا می‌توان مشتقات با مراتب صحیح را به مشتقات با مرتبه اعداد گویا و یا حقیقی تعمیم داد. بدین ترتیب اولین جرقه از مفهوم حسابان کسری زده شد [۳۷]. مشتق مرتبه کسری در ابتدا برای مرتبه‌های گویا و گنگ تعریف شد، سپس این مفهوم برای مرتبه‌هایی مختلط نیز توسعه یافت. به لحاظ تاریخی اولین کاربرد حسابان کسری احتمالا توسط آبل سال ۱۸۲۳ برای مطالعه مساله کوتاهترین زمان ارایه شده است[۴۹].

اولین کنفرانس‌های بین المللی در این زمینه سال‌های ۱۹۷۴،۱۹۸۴ و ۱۹۸۹ برگزار گردید که بیشتر روی مفاهیم ریاضی مشتقات کسری متمرکز بود، بعدها در سال‌های ۲۰۰۳ در شیکاگو، ۲۰۰۴ در فرانسه، ۲۰۰۶ در پرتقال، ۲۰۰۸ ترکیه، ۲۰۱۰ در اسپانیا، ۲۰۱۲ در چین و سال ۲۰۱۳ مجددا در فرانسه گردهمایی‌هایی با عنوان حسابان کسری و کاربردهای آن برگزار گردید. اما اولین کنفرانس علمی درباره سیستم های دینامیکی و کنترل مرتبه کسری سال ۲۰۱۰ در چین تشکیل شد. در آگوست ۲۰۱۱ نیز پنجمین کنفرانس علمی$FDTA$ در واشینگتن برگزار شد. سپتامبر ۲۰۱۱ ششمین کنفرانس روش های تحلیلی معادلات دیفرانسیل به یاد و خاطر آناتولی کیلباس که از محققین برجسته در زمینه حسابان کسری بوده در شهر مینسک بلاروس برگزار گردید. در سال ۲۰۱۲ کنفرانسی با موضوع حسابان کسری و کاربردهای آن در سیستم‌های کنترلی انعطاف پذیر برگزار گردید، سپس در سال ۲۰۱۳ کنفرانس دیگری در مورد کاربردهای حسابان کسری در مکاترونیک برگزار گردید. چندی بعد در همان سال جهان علم شاهد برگزاری کنفرانس دیگری با عنوان کاربرد حسابان کسری در مهندسی تکنولوژی بوده و نهایتا در سال ۲۰۱۴ کنفرانس با عنوان حسابان کسری و کاربرد آن در سیستم‌های کنترلی برگزار گردید. یک فهرست کامل از کنفرانس هایی که در این زمینه در ۳۷ سال گذشته تشکیل شده‌اند به همراه اطلاعات مفید دیگر را در مرجع [۴۲] می‌توان یافت.

در چند سال اخیر روش مانده‌های وزنی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کلاسیک بسیار موفق عمل کرده به طوری که روش‌های طیفی بعنوان حالت خاصی از روش‌های مانده وزنی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مورد استفاده قرار گرفته است. در این‌گونه روش‌ها جواب تقریبی مساله را به صورت ترکیب خطی از توابعی مستقل خطی که توابع کوششی نامیده می‌شوند در نظر می‌گیریم و با جایگذاری این جواب تقریبی در مساله، مانده‌ای ایجاد می‌شود که سعی می‌نماییم با کمک توابعی مستقل خطی به نام توابع آزمون این مانده را تحت یک ضرب داخلی وزن‌دار مینیمم کنیم. عمده ترین توابع مستقل خطی که در این روش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد چند جمله‌ای‌های متعامد کلاسیک مانند ژاکوبی،لاگور و یا هرمیت می‌باشند. این چند جمله‌ای‌ها در واقع جواب‌های یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم هستند که به آنها مسایل اشتروم-لیوویل گوئیم. با گسترش کاربردهای حسابان کسری در علوم محققان به فکر این ایده افتادند که خود مساله اشتروم-لیوویل را به صورت مرتبه کسری آن تعمیم دهند تا بتوانند پایه‌هایی را بدست آورند که برای تقریب مسایل کسری بهتر عمل کنند.

این پایان‌نامه بصورت زیر تنظیم شده است:

- **فصل اول** این پایان نامه به معرفی برخی توابع خاص که ارتباط نزدیکی با مفاهیم مشتق و انتگرال‌های مراتب کسری دارند اختصاص یافته است. بیان تعاریف مشتق و انتگرال‌های مرتبه کسری ریمان-لیوویل،کاپوتو و گرونوالد-لتنیکف مد نظر خواهد بود. در ادامه برخی از خواص مهم این تعاریف، از جمله فرم عملگری، تبدیل لاپلاس و فوریه آنها و ارتباط بین هر یک از این تعاریف مورد بحث واقع می‌شود. نهایتا در انتهای این فصل یک کاربرد فیزیکی از حسابان کسری مورد بررسی قرار می‌گیردو همچنین تعبیر فیزیکی مشتق مرتبه کسری بررسی می‌گردد.

- **فصل دوم** با مروری بر تعاریف و قضایای مقدماتی مربوط به نظریه تقریب آغاز می‌شود. مسایل اشتروم-لیوویل و پایه‌هایی که از آن بدست می‌آید بیان و سپس پایه‌های ژاکوبی را، که در پایان نامه از ویژگی‌های آن استفاده می‌کنیم، دقیق‌تر مطالعه می‌کنیم. همچنین در ادامه به بیان انتگرال گیری گوس-کوادراتور می‌پردازیم و نهایتا روش‌های طیفی را معرفی می‌کنیم.

- **فصل سوم** این پایان نامه با مشورت و همکاری صمیمانه آقای خسرویان عرب که قسمتی از

موضوع رساله دکتری ایشان می‌باشد نگارش یافته است، را با معرفی مطالعاتی که تا به امروز در رابطه با مساله اشتروم-لیوویل مرتبه کسری شده است آغاز می‌کنیم. همچنین در ادامه پایه‌هایی که از این مسایل بدست می‌آید را معرفی و ویژگی‌های آنها را بیان می‌کنیم. این فصل را با استفاده از این پایه ها برای حل مسایل مرتبه کسری بر اساس روش‌های طیفی به پایان می‌رسانیم.

فصل ۱

حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری

۱-۱ مقدمه

همانطور که در پیشگفتار اشاره شد حسابان کسری در سی‌ام سپتامبر ۱۶۹۵ با سوال هوپیتال از لایبنیتز در مورد مفهوم و چگونگی تعریف مشتق مرتبه نیم متولد شد[۴۹, ۵۶]. شاید تا چند دهه اخیر عبارت‌هایی شامل مشتق یا انتگرال مرتبه کسری بیشتر جزء مفاهیم صوری و تئوری در قلمرو ریاضیات بود، اما به سرعت فیزیک‌دانان متوجه شدند که برخی از سیستم‌ها، به ویژه آنهایی که پخش یا انتشار غیر عادی کندی را ارائه می‌کنند، به خوبی توسط حسابان کسری قابل توصیف می‌باشند[۴۵]. و این خود توجیحی مناسب برای توسعه روزافزون این مفاهیم می‌باشد، بطوریکه امروزه در اغلب حوزه‌ها نظیر مکانیک، برق، شیمی، بیولوژی، اقتصاد و به ویژه نظریه کنترل و پردازش سیگنال را به وسیله ابزارهای ریاضی از حسابان کسری که همان مشتق و انتگرال مرتبه کسری است به طور موفقیت‌آمیزی مدل بندی کرده‌اند. مثال‌های برجسته ای در این زمینه در مراجع [۵۷, ۴۹, ۵۱, ۴۵, ۴۳, ۳۳, ۱۶, ۱۴] ارائه شده است. با این وجود بدلیل پراکندگی کاربردها هنوز برخی از پژوهشگران نسبت به این موضوع بی اطلاع هستند و یا اندکی با تردید به آن می‌نگرند.

متناسب با بروز کاربردهای این مفاهیم در علوم، روش‌های عددی برای حل مسایل تولید شده نیز گسترش یافت بطوریکه روش تفاضلات متناهی بر اساس تقریب گرونوالد-لتنیکوف یکی از روش هایی است که در حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بسیار به کار گرفته شده است و گسترش آن مرهون افراد زیادی است [۵۱] .

برخی روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل کلاسیک، با تغییراتی برای حل معادلات دیفرانسل مرتبه کسری به کار گرفته می‌شوند، به طور مثال ایده پیشگو-اصلاح گر در [۲۱] روش رونگه-کوتا در [۴۰] ویا روش‌های چند گامی در[۴۱, ۲۲] از آن جمله‌اند. برای مشاهده روش‌های متنوع دیگر مطرح شده برای حل مسایل مربوط به حسابان مرتبه کسری می‌توانید به [۲۹, ۱۹, ۱۸] مراجعه کنید.
در ادامه مطالب این فصل عمدتاً از مراجع [۵۱, ۲۰] استفاده شده است.

۱-۱-۱ برخی توابع خاص در حسابان کسری

از جمله این توابع می‌توان از تابع گاما، بتا، تابع میتاگ لفلر و تابع رایت نام برد که نقش کلیدی در ارایه تعاریف مشتق و انتگرال از مرتبه دلخواه دارند.

۱-۱-۱-۱ تابع گاما

تابع گاما یا تابع اویلر [۱] نوع دوم یکی از پر کاربرد ترین توابع در مقوله حسابان کسری می‌باشد که تعمیمی از تابع فاکتوریل را بدست می‌دهد. در ادامه به ارائه تعریف این تابع می‌پردازیم.

تعریف ۱-۱.۱. برای هر $z \in \mathbb{C}$ تابع گاما یا اویلر نوع دوم را بانماد $\Gamma(z)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{۱-۱}$$

انتگرال فوق برای کلیه اعداد مختلطی که $\Re(z) > 0$ همگراست.

با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء می‌توان به فرمول بازگشتی زیر رسید:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \Re(z) > 0 \tag{۱-۲}$$

به همین ترتیب با استفاده از این رابطه می‌توان تابع اویلر را برای $\Re(z) \leq 0$ به شرح زیر تعریف کرد:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \Big(Re(z) > -n, n \in \mathbb{N}_0, z \notin \mathbb{Z}_0^- = \{0, -1, -2, \dots\}\Big) \tag{۱-۳}$$

که در آن $(z)_n$ همان نماد پاچ هامر [۲] می‌باشد که برای $z \in \mathbb{C}$ و $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ به صورت زیر تعریف

[۱] Euler

[۲] Pochlammer Symbol

می‌شود:

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1), n \in \mathbb{N}_0, \qquad (۱-۴)$$

با توجه به رابطه $(۱-۳)$ مبین دو مطلب می‌باشد اول آنکه تابع $\Gamma(z)$ یک تابع تحلیلی در کل صفحه مختلط مگر در نقاط $z = 0, -1, -2, \dots$ می‌باشدو دوم آنکه تمامی این نقاط، قطب‌های ساده $\Gamma(z)$ می‌باشند.

۱-۱-۱-۲ تابع بتا

تعریف ۱-۱.۲. فرض می‌کنیم $w, z \in \mathbb{C}$ در این صورت انتگرال اویلر نوع اول را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta(z,w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1}dx, \qquad (۱-۵)$$

می‌توان نشان داد که چنانچه $\Re(z) > 0$ و $\Re(w) > 0$ آنگاه انتگرال فوق همگراست.

۱-۱-۱-۳ تابع میتاگ‌لفلر

نقشی که این تابع در نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ایفا می‌کند دقیقا مشابه نقش تابع نمایی e^x در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. این تابع اولین بار توسط میتاگ لفلر [۱] معرفی شد. شایان ذکر است که این تابع اولین بار توسط آگاروال [۲] مطرح گردید. مطالعه گسترده‌تری در این زمینه توسط ویمان صورت گرفت.

تعریف ۱-۱.۳. تابع میتاگ لفلر یک پارامتری را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad (۱-۶)$$

که در آن $\alpha > 0$ می‌باشد. مطالعات دیگری در این زمینه توسط ویمان و سدلتسکی، گورنفلو،لوخکو و راگزین و پودلوبنی [۳] انجام گرفته است.

تعریف ۱-۱.۴. فرض $\alpha, \beta > 0$ در این صورت تابع میتاگ لفلر دو پارامتری را به صورت زیر تعریف

[۱] Mittag Leffler

[۲] R. P. Agarwal

[۳] I. Podlobny

می‌کنیم:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \tag{۱-۷}$$

روابط زیر از تعریف فوق به آسانی نتیجه می‌شود:

$$۱)E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=e^z, \tag{۱-۸}$$

$$۲)E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\frac{e^z-1}{z}, \tag{۱-۹}$$

$$۳)E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\frac{e^z-1-z}{z^2}, \tag{۱-۱۰}$$

$$۴)E_{1,m}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+m)}=\frac{1}{z^{m-1}}\Big[e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\Big],(m\in\mathbb{N}), \tag{۱-۱۱}$$

$$۵)E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\cosh(z), \tag{۱-۱۲}$$

$$۶)E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sinh(z), \tag{۱-۱۳}$$

فرم تعمیم یافته تابع میتاگ لفلر چند پارامتری نیز توسط حدید و لوخکو ارائه گردید که در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ظاهر می‌شود. فرم کلی این تابع به صورت زیر است :

$$E_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta}(z_1,z_2,\ldots,_m)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_m=k}\frac{(k;l_1,l_2,\ldots,l_m)\prod_{i=1}^{m}(z_i)^{l_i}}{\Gamma(\beta+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i l_i}), \tag{۱-۱۴}$$

که در آن

$$(k;l_1,l_2,\ldots,l_m)=\binom{k}{l_1,l_2,\ldots,l_m}=\frac{k!}{l_1!l_2!\ldots l_m!} \tag{۱-۱۵}$$

ضرایب چند جمله‌ای می‌باشند.

۱-۱-۱-۴ تابع رایت

این بخش به ارائه تعریف و برخی از خواص مهم تابع رایت فاکس [1] یا به اختصار تابع رایت اختصاص یافته است. این تابع همانند تابع میتاگ لفلر یکی از توابع مهم و پرکاربرد در نظریه معادلات دیفرانسیل

[1] Wright-Fox

مرتبه کسری به شمار می‌آید و نقش مهم و کلیدی در ارایه جواب برخی از این دست معادلات دیفرانسیل داراست که از جمله مهمترین این معادلات می‌توان به معادله دیفرانسیل انتشار موج مرتبه کسری اشاره کرد.

این تابع که رابطه نزدیکی با تابع میتاگ لفلر دو پارامتری دارد برای اولین بار توسط رایت معرفی گردید. رایت به مطالعه رفتار حدی این تابع در بینهایت پرداخت. برخی از خواص مهم و کاربردی این تابع توسط دانشمندانی نظیر هامبرت و آگاروال مورد بررسی قرار گرفت.

تعریف ۱-۱.۵. فرض $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ در این صورت تابع رایت که معمولا با نماد $W(z;\alpha,\beta)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W(z;\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)}, \tag{۱-۱۶}$$

که در این صورت می‌توان نشان داد که اگر $\alpha > -1$ در نتیجه سری مذکور مطلقا همگراست و در صورتی که $\alpha = -1$ سری مذکور برای $|z| < 1$ و برای $|z| = 1, \Re(\beta) > -1$ مطلقا همگراست. می‌توان نشان داد که تابع رایت برای $\alpha > 1$ تابعی تام می‌باشد، البته اخیرا میناردی ثابت کرد که تابع اخیر برای $-1 < \alpha < 0$ نیز تام است.

۱-۱-۲ تعاریف و خواص مشتق و انتگرال مراتب کسری

این بخش شامل تعاریف و برخی خواص انتگرال و مشتقات مراتب کسری می‌باشد. برای ارائه مفهوم مشتق و انتگرال مراتب کسری، ابتدا به ارائه تعاریف مشتق و انتگرال مراتب صحیح برای تابع مفروض $f(x)$ می‌پردازیم و سپس این ایده را برای مشتق و انتگرال مراتب کسری تعمیم می‌دهیم. فرض کنید تابع $f(x)$، nبار انتگرال پذیر باشد در اینصورت همانطور که می‌دانیم انتگرال کشی مرتبه nام تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_0^x\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t)dtdt_{n-1}\dots dt_1, \tag{۱-۱۷}$$

با استقرا می‌توان نشان داد:

$$\int_0^x\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t)dtdt_{n-1}\dots dt_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt, n\in\mathbb{N}, \tag{۱-۱۸}$$

برای نمایش اختصاری فرم اخیر می‌توان از اپراتور انتگرال مرتبه nام استفاده کرد که در اینصورت انتگرال کشی مرتبه nام تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, n \in \mathbb{N}, \tag{۱-۱۹}$$

در برخی موارد به جای اپراتور I^n، می‌توان از اپراتورD^{-n} استفاده کرد. از آنجائیکه $\Gamma(n) = (n-1)!$ بنابر این می‌توان رابطه $(۱-۳۴)$ را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$I^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, n \in \mathbb{N}, \tag{۱-۲۰}$$

حال با تبدیل n به α که در آن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ داریم:

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha \in \mathbb{R}^+, \tag{۱-۲۱}$$

رابطه اخیر را فرم تعمیم یافته انتگرال کشی مرتبه nام تابع $f(x)$ می‌نامیم. بطور مشابه می‌توان فرم تعمیم یافته مشتق کشی مرتبه nام تابع $f(x)$ را تعریف کرد. در ادامه نشان میدهیم که این تعاریف چگونه منجر به ارائه تعاریف مشتق و انتگرال مراتب کسری می‌شود.

۱-۱-۲-۱ مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل

در این بخش به ارائه تعریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمان لیوویل که عملا تعمیمی از فرمول‌های مشتق و انتگرال کشی است پرداخته می‌شود و سپس به ارائه برخی از خواص و نتایج مهم در این باره می‌پردازیم، جهت مشاهده جزئیات بیشتر و مطالب تکمیلی می‌توانید به مراجع[۲۰, ۵۱] مراجعه کنید. فرض کنید $\Omega = [a,b]$ یک بازه متناهی بر محور حقیقی $-\infty < a < b < +\infty$ باشد، در اینصورت انتگرال مرتبه کسری راست و چپ ریمان لیوویل را به ترتیب با نماد ها ${}_x^{RL}I_b^\alpha$ و ${}_a^{RL}I_x^\alpha$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_a^{RL}I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, x > a, \alpha \in \mathbb{R}^+, \Re(\alpha) > 0, \tag{۱-۲۲}$$

$${}_x^{RL}I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, x < b, \alpha \in \mathbb{R}^+, \Re(\alpha) > 0, \tag{۱-۲۳}$$

به همین ترتیب مشتق مرتبه کسری راست و چپ ریمان لیوویل را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.
فرض کنید $\Re(\alpha) > 0, \alpha \in \mathbb{C}$ در اینصورت داریم:

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^{n} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, x > a, n = [Re(\alpha)] + 1, \quad (۲۴-۱) $$

$$ {}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-\frac{d}{dx})^{n} \int_{x}^{b} \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, x < b, n = [Re(\alpha)] + 1, \quad (۲۵-۱) $$

که در آن $[\cdot]$ معرف جزء صحیح می‌باشد. فرم عملگری تعاریف $(1-39)$ و $(1-40)$ را به ترتیب می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha} f(x) = (\frac{d}{dx})^{n} \, {}_{a}^{RL}I_{x}^{n-\alpha} f(x), x > a, n = [Re(\alpha)] + 1 \quad (۲۶-۱) $$

$$ {}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha} f(x) = (-\frac{d}{dx})^{n} \, {}_{x}^{RL}I_{b}^{n-\alpha} f(x), x < b, n = [Re(\alpha)] + 1 \quad (۲۷-۱) $$

در حالت خاص وقتی $\alpha = n \in \mathbb{N}$ در اینصورت داریم:

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{RL}D_{x}^{0} f(x) &= f(x), \quad {}_{a}^{RL}D_{x}^{n} f(x) = (\frac{d}{dx})^{n} f(x) = f^{(n)}(x), \\ {}_{x}^{RL}D_{b}^{0} f(x) &= f(x), \quad {}_{x}^{RL}D_{b}^{n} f(x) = (-\frac{d}{dx})^{n} f(x) = (-1)^{n} f^{(n)}(x), \end{aligned} $$

چنانچه $0 < Re(\alpha) < 1$ در اینصورت روابط $(1-39)$ و $(1-40)$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, x > a, 0 < Re(\alpha) < 1, \quad (۲۸-۱) $$

$$ {}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{b} \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt, x < b, 0 < Re(\alpha) < 1, \quad (۲۹-۱) $$

در حالتیکه $\Re(\alpha) = 0, \alpha \neq 0$ در این صورت مشتقات مراتب کسری موهومی محض ایجاد شده و داریم:

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{i\theta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}} dt, x > a, \theta \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (۳۰-۱) $$

$$ {}_{x}^{RL}D_{b}^{i\theta} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{i\theta}} dt, x < b, \theta \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad (۱-۳۱) $$

لیستی از خواص مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل به شرح زیر می‌باشد: **خواص**:

اگر $\Re(\alpha) > 0$ و $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) > 0$ در اینصورت داریم:

$$ {}_{a}^{RL}I_{x}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, \Re(\alpha) > 0, \qquad (۱-۳۲) $$

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, \Re(\alpha) > 0, \qquad (۱-۳۳) $$

$$ {}_{x}^{RL}I_{b}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}, \Re(\alpha) > 0, \qquad (۱-۳۴) $$

$$ {}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}, \Re(\alpha) > 0, \qquad (۱-۳۵) $$

در حالت خاص وقتی $\beta = 1$ داریم :

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}\, 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, 0 < \Re(\alpha) < 1, \qquad (۱-۳۶) $$

$$ {}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha}\, 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, 0 < \Re(\alpha) < 1, \qquad (۱-۳۷) $$

به عبارت دیگر برای $j = 1, 2, \ldots, [\Re(\alpha)] + 1$ داریم:

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = 0 \qquad {}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha}(b-x)^{\alpha-j} = 0, $$

مطالب اخیر را می‌توان در غالب یک نتیجه به صورت زیر بیان کرد:

نتیجه:

فرض کنید $\Re(\alpha) > 0$ و $n = [\alpha] + 1$ در اینصورت داریم: