بسم الله الرحمن الرحیم

حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** است که در شهریور ۱۳۹۳ در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر حمید رضایی** و مشاورهٔ **دکتر حمیدرضا گودرزی** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عملگرهای ترکیبی وزنی وارون پذیر

استاد راهنما

دکتر حمید رضایی

پژوهشگر

آرمان اشکانی اصفهانی

شهریور ۱۳۹۳

عملگرهای ترکیبی وزنی وارون پذیر

به وسیلهٔ

آرمان اشکانی اصفهانی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

ریاضی محض

در تاریخ .... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ .... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما:	دکتر حمید رضایی	با مرتبهٔ علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور:	دکتر حمیدرضا گودرزی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه:	دکتر حسن آزادی کناری	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه:	دکتر مهدی شریف زاده	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۵- نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر رضا خرداد	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء

تقدیم به:

پدر و مادرم خوبم

و

همسرم یاور همیشگی ام

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و ریاضی را آفرید تا شاید عقل آدمی کمی از این دنیای فانی فاصله بگیرد که

آدمی در عالم فانی نمی‌آید به دست — عالمی دیگر بباید ساخت وز نو آدمی

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حمید رضایی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و وجود پر ثمرشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

آرمان اشکانی اصفهانی

شهریور ۱۳۹۳

چکیده

عملگر ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi,\varphi}$ تابع تحلیلی f روی دیسک واحد باز از صفحه مختلط را به تابع تحلیلی $\psi.f\circ\varphi$، که در آن φ یک نگاشت تحلیلی از دیسک واحد باز بتوی خودش و ψ یک نگاشت تحلیلی روی دیسک واحد باز است، می برد. در این پایان نامه وارون پذیری چنین عملگرهایی مطالعه می شود . همچنین وقتی $C_{\psi,\varphi}$ روی فضای هاردی - هیلبرت از دیسک واحد یعنی $H^{2}(U)$ عمل می کند، φ و ψ به طور کامل شناسایی می شوند و با توجه به محل قرار گرفتن نقاط ثابت φ طیف این نوع عملگر مطالعه می شود.

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

فضای هاردی- هیلبرت روی دیسک واحد $\mathbb{D}$ .... $H^p(\mathbb{D})$

عملگر ترکیبی وزنی .... $C_{\psi,\varphi}$

عملگر الحاقی ترکیبی وزنی .... $C^*_{\psi,\varphi}$

عملگر ضربی .... M_ψ

طیف S در نقطه p .... $\sigma_p(S)$

شعاع طیفی S در نقطه p .... $r_p(S)$

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x .... $\lfloor x \rfloor$

فصل ۱

تعاریف و مباحث مقدماتی

۱-۱ پیش‌نیازها

تعریف ۱-۱-۱. فضاهای متری فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، تابع حقیقی d تعریف شده بر $X \times X$ را یک متر روی X نامیم، هرگاه داشته باشیم:

(الف) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y) = 0$ اگر وتنها اگر $x = y$،

(ب) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$،

(پ) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$(نابرابری مثلثی).

مجموعه‌ی X با متر d را یک فضای متری نامیده، و آن را با (X,d) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۲. (زیرفضا) زیرمجموعه M از فضای برداری V را یک زیرفضای V نامیم. اگر M نسبت به جمع و ضرب اسکالر تعریف در V خود یک فضای برداری باشد. شرط لازم و کافی برای آن‌که $M \subset V$ یک زیرفضا باشد این است که هر وقت $x, y \in M$ و α اسکالر باشد آن‌گاه،$\alpha x \in M, x + y \in M$.

تعریف ۱-۱-۳. زیرفضای بسته H از فضای M زیرفضایی است که نسبت به توپولوژی القا شده به وسیله‌ی متر H مجموعه‌ی بسته باشد.

تعریف ۱-۱-۴. اگر X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ باشد، یک نیم‌نرم تابعی مانند $p:X\longrightarrow[0,\infty)$ است که دارای خواص زیر می‌باشد.

(الف) برای هر x و y در X داریم، $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$،

(ب) برای هر $x\in X$ و $\alpha\in\mathbb{F}$ داریم: $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

تعریف ۱-۱-۵. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط و $\|.\|:X\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x,y\in X$ و هر اسکالر $\alpha\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

(الف) $\|x\|\geq 0$ و $\|x\|=0$ اگر وتنها اگر $x=0$،

(ب) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$،

(پ) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$(**نابرابری مثلثی**).

آنگاه $\|.\|$ را یک نرم بر X نامیم و X را یک فضای نرم‌دار گوییم.

ملاحظه ۱-۱-۶. *اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x,y\in X$ قرار دهیم*

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که d یک متر روی X است و لذا هر فضای نرم دار یک فضای متری است. d را متر تولید شده بوسیله‌ی نرم می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنیم (X,S,μ) یک فضای اندازه و $1\leq p<\infty$ قرار می‌دهیم،

$$L^p(\mu)=\{f:X\to\mathbb{F}, \text{اندازه پذیر} f, \int|f|^p d\mu<\infty\} \qquad (1-1)$$

تابعی اندازه پذیر است که نقش معکوس هر بازی اندازه پذیر باشد.

تعریف ۱-۱-۸. برای هر $f\in L^p(\mu)$ به‌طوری‌که $1\leq p<\infty$ قرار می‌دهیم،

$$\|f\|_p=\left(\int|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۱-۱-۹. نامساوی هولدر: اگر p,q اعداد حقیقی نامنفی باشند به‌قسمی‌که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $f\in L^p(\mu)$ و $g\in L^q(\mu)$ آن‌گاه $fg\in L^1(\mu)$ و $\int|fg|d\mu\leq\|f\|_p\|g\|_q$ و تساوی برقرار

است اگر وتنها اگر اعداد حقیقی نامنفی α, β وجود داشته باشند به‌قسمی‌که $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ تقریباًهمه جا.

تعریف ۱-۱-۱۰. (نامساوی مینکوفسکی) : اگر f, g اعضای $L^p(\mu)$ آن‌گاه

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

تعریف ۱-۱-۱۱. اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در $L^p(\mu)$ باشد و $f \in L^p(\mu)$ گوییم $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا به f است (همگرایی در میانگین p) اگر $\|f_n - f\|_p \longrightarrow ۰$ وقتی $n \longrightarrow \infty$ به طریق مشابه گوییم $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $L^p(\mu)$ کوشی است. اگر $\|f_n - f_m\|_p \longrightarrow ۰$ وقتی $m, n \longrightarrow \infty$

تعریف ۱-۱-۱۲. فضای متری (X, d) را **کامل(تام)** نامیم، هرگاه هر دنباله کوشی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در X به عضوی مانند $x \in X$ همگرا باشد.

تعریف ۱-۱-۱۳. اگر X یک فضای نرم‌دار باشد آن‌گاه:

(الف) به‌ازای هر $x \in X$ مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته است .

(ب) تابع مجموع $X \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(x,y) \longrightarrow x+y$ پیوسته است.

(پ) تابع ضرب $\mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ پیوسته است.

تعریف ۱-۱-۱۴. فضای نرم‌دار X را یک فضای **باناخ** گوییم، هرگاه X نسبت به متر تولید شده بوسیله‌ی نرم، فضای متریک کامل باشد.

مثال ۱-۱-۱۵. اگر X یک فضای اندازه دلخواه و μ یک اندازه مثبت باشد آنگاه $L^p(\mu)$ بر X یک فضای باناخ است.

تعریف ۱-۱-۱۶. اگر H و K دو فضای نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. یک تبدیل خطی $T : H \longrightarrow K$ نگاشتی است که دارای خاصیت زیر است.

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

جایی‌که $x, y \in H$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ تبدیل خطی T را کراندار گویند هرگاه عدد ثابت $c > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in H$، $\|Tx\| \leq c\|x\|$ و مجموعه همه تبدیل‌های خطی

و کرندار از H در K را با $B(H,K)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $H = K$ آن‌گاه $B(H)$ بیان‌گر همه عملگرهای خطی کراندار از H در خودش هست.

گزاره ۱-۱-۱۷. فرض کنیم X, Y دو فضای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد، آن‌گاه شرایط زیر با هم معادلند.

(الف) $T \in B(X,Y)$ ،

(ب) T در صفر پیوسته است، یعنی اگر $x_n \longrightarrow \circ$ آن‌گاه $Tx_n \longrightarrow \circ$،

(پ) در بعضی نقاط پیوسته است، T

(ت) مقدار مثبت ثابت c چنان وجود دارد که به‌ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

اگر $T \in B(X,Y)$ و $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\}$ آن‌گاه برای هر $x \in X$

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad x \neq \circ\} \\ &= \inf\{c > \circ \|Tx\| \leq c\|x\|\}. \end{aligned}$$

اثبات. به مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۱۸. اگر X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد، یک نیم‌ضرب داخلی روی X عبارتست از یک تابع $u : X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$ به‌طوری‌که برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و در $x, y, z \in X$ در شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) $u\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha u\langle x, z\rangle + \beta u\langle y, z\rangle$،

(ب) $u\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha} u\langle x, y\rangle + \bar{\beta} u\langle y, z\rangle$،

(پ) $u\langle x, x\rangle \geq \circ$،

(ت) $u\langle x, y\rangle = u\langle y, x\rangle$.

ملاحظه ۱-۱-۱۹. *یک نیم‌ضرب داخلی را ضرب داخلی گویند. اگر $u\langle x, x\rangle = \circ$ آن‌گاه $x = \circ$.*

ملاحظه ۱-۱-۲۰. *اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری H باشد، زوج $(H, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی مختلط و عدد مختلط $\langle x, y\rangle$ را برای هر $x, y \in H$ ضرب داخلی x, y می‌نامیم.*

مثال ۱-۱-۲۱. اگر X مجموعه تمام دنباله‌های $\{\alpha_n \in \mathbb{C} : n \geq 1\}$ باشد به‌قسمی‌که تنها برای تعداد متناهی مقدار n، $\alpha_n \neq 0$ و جمع و ضرب اسکالر راچنین تعریف می‌کنیم.

$$\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\},$$

و

$$\alpha\{\alpha_n\} = \{\alpha\alpha_n\},$$

آن‌گاه X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ است. عمل

$$\langle \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}\overline{\beta}_{2n},$$

یک نیم‌ضرب داخلی روی X است که ضرب داخلی نیست، اما عمل زیر یک ضرب داخلی روی X تعریف می‌کنند

$$\langle \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\overline{\beta}_n.$$

قضیه ۱-۱-۲۲. (نامساوی کوشی-بینکوفسکی - شوارتز) [1] اگر $\langle .,. \rangle$ نیم‌ضرب داخلی روی X باشد،آن‌گاه برای هر $x, y \in X$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

تساوی برقرار است اگر وتنها اگر اسکالرهای مانند $\alpha, \beta \neq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\langle \beta x + \alpha y, \beta x + \alpha y\rangle = 0.$$

اثبات. به مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

[1] cauchy-bunyakowsky-schwarz inequality

تعریف ۱-۱-۲۳. در فضای ضرب داخلی H نرم x که با نماد $\|x\|$ نمایش داده می‌شود را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|x\|^{۲} = \langle x, x\rangle.$$

نتیجه ۱-۱-۲۴. *اگر* $\langle .,.\rangle$ *یک نیم‌ضرب داخلی روی* X *و داشته باشیم* $\|x\| \equiv \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ *آن‌گاه برای هر* $x, y \in X$ *و هر اسکالر* $\alpha \in \mathbb{F}$ *داریم ،*

(الف) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(نامساوی مثلثی)** [۲] .

(ب) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(ج) اگر $\langle .,.\rangle$ *یک ضرب داخلی باشد، آن‌گاه* $\|x\| = ۰$ *نتیجه می‌دهد* $x = ۰$.

اثبات. به مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۲۵. **(فضای هیلبرت)** [۳] فضای برداری H روی $\mathbb{F}$ همراه با ضرب داخلی $\langle .,.\rangle$ به‌طوری‌که نسبت به متر تولید شده بوسیله‌ی نرم، $d(x, y) = \|x - y\|$، یک فضای متریک کامل باشد را یک فضای هیلبرت گوییم.

مثال ۱-۱-۲۶. اگر $H = L^{۲}(\mu)$ و $\langle f, g\rangle = \int f\bar{g}d\mu$ آن‌گاه H نسبت به نرم

$$\|f\|_{۲} = \left(\int |f|^{۲} d\mu\right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

یک فضای هیلبرت است.

مثال ۱-۱-۲۷. برای هر مجموعه دلخواه I فرض کنیم $\ell^{۲}(I)$ را مجموعه تمام توابع $x : I \to \mathbb{F}$ باشد به طوری که برای همه جز تعدادی شمارش پذیر $i \in I$، $x(i) = ۰$ و $\sum_{i\in I} |x(i)|^{۲} < \infty$ تعریف می کنیم ، آن‌گاه $\ell^{۲}(I)$ همراه با این ضرب داخلی یک فضای هیلبرت هست.

مثال ۱-۱-۲۸. فرض کنیم H مجموعه تمام توابع به طور مطلق پیوسته f روی $[۰, ۱]$ باشد به‌قسمی‌که $f(۰) = ۰$، $f' \in L^{۲}[۰, ۱]$ اگر ضرب داخلی $\langle f, g\rangle = \int_{۰}^{۱} f'(t)\overline{g'(t)}$ ،

[۲] Triangular inequality

[۳] Hilbert Space

$f, g \in H$ تعریف شود، آن‌گاه H با ضرب داخلی فوق یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱-۱-۲۹. : فرض کنید G یک زیرمجموعه باز $\mathbb{C}$ باشد. فضای $L_a^2(G)$ را گردایه تمام توابع تحلیلی $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم به‌قسمی‌که

$$\int\int_G |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty.$$

این فضا را **فضای برگمن** می‌نامیم. باید در نظر داشت که $L_a^2(G) \subseteq L^2(\mu)$ و که در آن $\mu = A \mid_G$ که در آن A مساحت ناحیه و $L_a^2(G)$ ضرب داخلی و نرم را از $L^2(\mu)$ می‌گیرد.

قضیه ۱-۱-۳۰. : $L_a^2(G)$ یک فضای هیلبرت است.

اثبات. به مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۳۱. **(انتگرال پواسون)** هرگاه $f \in L^1(T)$ و

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt,$$

آنگاه تابع F تعریف شده در U انتگرال پواسون f نام دارد.

تعریف ۱-۱-۳۲. **(هسته پواسون)** هسته پواسون عبارت است از تابع

$$P_r(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int},$$

برای هر t حقیقی و $0 \leq r < 1$.

تعریف ۱-۱-۳۳. **(حاصل ضرب بلاشکه)** به ازای عدد صحیح نامنفی k و دنباله $\{a_n\}$ در مجموعه U تابع زیر را حاصل ضرب بلاشکه گوییم،

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \frac{|a_n|}{a_n}$$

تعریف ۱-۱-۳۴. (تابع داخلی) یک تابع داخلی عبارتند از یک تابع تحلیلی و کراندار بر دیسک باز واحد به طوری که تابع حد شعاعی آن یعنی M^* تقریباً همه جا بر مرز برابر با یک باشد. یعنی $|M^*| = ۱$ تقریباً همه جا.

۱-۲ سریهای فوریه

تعریف ۱-۲-۱. $\mathbb{T}$ دایره یکه در صفحه‌ی مختلط می‌باشد، یعنی

$$\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} : \|x\| = ۱\}.$$

تعریف ۱-۲-۲. فضای $L^P(\mathbb{T})$ وقتی که $۱ \leq p \leq \infty$ عبارت است از رده تمام توابع مختلط، اندازه پذیر لبگ و ۲π متناوب بر $R^۱$ تعریف می‌کنیم که در آن‌ها نرم $\|f\|_p = \left\{\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{۱}{p}} < \infty$ و $(t \in R)$.

تعریف ۱-۲-۳. $C(\mathbb{T})$ عبارتست از تمام توابع مختلط پیوسته f بر $\mathbb{T}$ با نرم

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|.$$

تعریف ۱-۲-۴. $L^\infty(\mathbb{T})$ فضای تمام (رده‌های هم ارزی) توابع به طور اساسی کراندار نسبت به اندازه لبگ است، به‌ازای $g \in L^\infty(\mathbb{T})$، $\|g\|_\infty$ یعنی سوپرمم اساسی $|g|$.

تعریف ۱-۲-۵. $L(\mu)$ را گردایه تمام توابع اندازه پذیر مختلط f بر $\mathbb{T}$ تعریف می‌کنیم $\int_{\mathbb{T}}|f|d\mu < \infty$.

تعریف ۱-۲-۶. ضرایب فوریه: به‌ازای هر $f \in L^۱(\mathbb{T})$ ضرایب فوریه f را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{f}(n) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

و $(n \in \mathbb{Z})$ که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه تمام اعداد صحیح است. بدین ترتیب به هر $f \in L^۱(\mathbb{T})$ تابع $\hat{f}$ بر $\mathbb{Z}$ را مربوط می‌سازیم.

تعریف ۱-۲-۷. سری فوریه: سری فوریه $f \in L^۱(T)$ عبارتست از

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int},$$

و مجموع‌های جزئی‌اش عبارتست از

$$S_N(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} \qquad (N = ۰, ۱, ۲, ...)$$

قضیه ۱-۲-۸. (ریس- فیشر) [۴]: هرگاه $\{C_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد که

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^۲ < \infty,$$

آن‌گاه تابعی مانند $f \in L^۲(\mathbb{T})$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ،

$$C_n = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

اثبات. به مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱-۲-۹. (اتحاد پارسوال) [۵]. اگر $f \in L^۲(\mathbb{T})$ و $g \in L^۲(\mathbb{T})$ آن‌گاه،

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

که سری سمت چپ به طور مطلق همگراست. و هرگاه S_N همان تعریف بالا باشد، آن‌گاه

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \|f - S_N\|_۲ = ۰$$

.

اثبات. به مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

تعریف ۱-۲-۱۰. فضای $C_۰$ عبارت است از تمام توابع مختلط φ بر $\mathbb{Z}$ می‌باشد ، $\varphi(n) \longrightarrow ۰$ ، وقتی که $n \longrightarrow \pm\infty$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(n)| : n \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$

قضیه ۱-۲-۱۱. نگاشت $\hat{f} \longrightarrow f$ یک تبدیل خطی کراندار یک به یک از $L^۱(\mathbb{T})$ به توی $C_۰$ است.

---

[۴] Ris-Phisher Theorem

[۵] Parsaval Theorem

اثبات. به مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

۱-۳ ناحیه های تقرب

به ازای $\circ < \alpha < ۱$، Ω_α را اجتماع قرص‌های $D(\circ;\alpha)$ و پاره‌خط‌ها از $z = ۱$ تا نقاط $D(\circ;\alpha)$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر،Ω_α کوچکترین مجموعه‌ی باز محدبی است که شامل $D(\circ;\alpha)$ بوده و دارای نقطه‌ی ۱ نقطه مرزی اش می‌باشد. Ω_α در مجاورت $z = ۱$ یک زاویه است که به‌وسیله‌ی شعاع$\mathbb{U}$ که در ۱ ختم شده نصف می‌شود و این زاویه مساوی است با۲θ که $\alpha = \sin\theta$. منحنی‌هایی که در Ω_α به ۱ نزدیک می‌شوند نمی‌توانند بر $\mathbb{T}$ مماس باشند. لذا Ω_α را ناحیه‌ی تقرب غیرمماسی به راس ۱ می‌نامند. ناحیه‌های Ω_α با افزایش α منبسط می‌شوند. اجتماعشان $\mathbb{U}$ و اشتراکشان شعاع $[\circ, ۱)$ است.
نسخه‌های دوران یافته‌ی Ω_α به راس $e^{i\theta}$ را با $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۱-۳-۱. ما به هر $f \in L^۱(R^k)$ تابع ماکزیمال $Mf : R^k \longrightarrow [\circ,\infty]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم
:

$$(Mf)(x) = sup_{\circ<r<\infty} \quad \frac{۱}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} | f | \, dm.$$

مربوط می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۲. اگر $\circ < \alpha < ۱$ و u یک تابع مختلط با قلمرو $\mathbb{U}$ باشد، تابع ماکزیمال غیرمماسی $N_\alpha u$ بر $\mathbb{T}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(N_\alpha u)(e^{it}) = \sup\{| u(z) |: \quad z \in e^{it}\Omega_\alpha\},$$

به همین نحو، تابع ماکزیمال شعاعی u عبارت است از