دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه
جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
(آنالیز عددی)

تحلیلی بر رده‌ای از معادلات تفاضلی و کاربردها

نگارش :
نرگس رستگار

استاد راهنما:
دکتر مهدی دهقان

استاد مشاور:
دکتر رضا معمارباشی

آبان ۱۳۸۶

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

فرم اطلاعات پایان‌نامه
کارشناسی- ارشد و دکترا

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی:نرگس رستگار   ● دانشجوی آزاد   ○ بورسیه   ○ معادل

شماره دانشجوئی:۸۴۱۱۳۰۳۲   دانشکده: ریاضی وعلوم کامپیوتر   رشته تحصیلی:ریاضی کاربردی   گروه:آنالیز عددی

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: مهدی دهقان   درجه و رتبه : استادیار

نام و نام خانوادگی: درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی:رضا معمارباشی   درجه و رتبه : استادیار

نام و نام خانوادگی: درجه و رتبه:

عنوان پایان‌نامه به فارسی: **تحلیلی بر رده ای از معادلات تفاضلی و کاربردها**

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی: **The Analysis of Some classes of Difference Equations and Applications**

نوع پروژه: کارشناسی ○   ارشد ●   دکترا ○   سال تحصیلی:۸۶-۸۵

کاربردی ●   بنیادی ○   توسعه‌ای ○   نظری ○

تاریخ شروع :۸۵/۱۱   تاریخ خاتمه :۸۶/۸   تعداد واحد :۶   سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه‌های کلیدی به فارسی: **معادله تفاضلی، نیمه دور، نوسان، تناوب، جذب سراسری، فاصله پایا، نقطه تعادل، نگاشت شبه مزدوج.**

واژه‌های کلیدی به انگلیسی :

Difference Equation, Semicycle, Oscillatory, Periodicity, Global Attractivity, Invariant Interval, Equilibriume Point, Semiconjugate Map.

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات96	تصویر ○ جدول ○ نمودار ○ نقشه ○ واژه‌نامه ●	تعداد مراجع54	تعداد صفحات ضمائم۰
زبان متن	فارسی ● انگلیسی ○	چکیده	فارسی ●	انگلیسی ●
یادداشت				

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

دانشجو:

چکیده

معادلات تفاضلی که کاربردهای فراوانی در علوم مختلف همچون جمعیت، اقتصاد، زیست شناسی و شبکه‌های عصبی دارد، اخیراً توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود جلب نموده است. در این پروژه برخی از خانواده‌های معادلات تفاضلی را بررسی می‌کنیم. در ابتدا تعاریف اولیه و لازم و سپس چند قضیه و نتیجه‌ی اساسی بویژه در مورد نیمه‌دورها را بیان می‌کنیم، که در تحلیل‌های بعدی ابزار مناسبی هستند. سپس نتایجی در مورد همگرایی سراسری معادلات تفاضلی مرتبه‌ی بالا آورده خواهد شد. همچنین به مطالعه‌ی سایر ویژگی‌ها همچون فواصل پایا، تناوب، تحلیل نیمه دورها، نوسان، جذب سراسری و پایداری مجانبی سراسری خواهیم پرداخت. به علاوه به معرفی نگاشت شبه مزدوج خواهیم پرداخت. در پایان نیز کاربردهایی از معادلات تفاضلی را در برخی علوم ارایه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: معادله تفاضلی[۱] ، نیمه دور[۲] ، نوسان [۳] ، تناوب[۴] ، جذب سراسری[۵] ، فاصله‌ی پایا[۶] ، نقطه‌ی تعادل [۷] ،نگاشت شبه مزدوج [۸].

---

[۱] Difference Equation

[۲] Semicycles

[۳] Oscillatory

[۴] Periodicity

[۵] Global Attractivity

[۶] Invariant Intervals

[۷] Equilibrium Point

[۸] Semiconjugate Map

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

مقدمه

در این فصل به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم که پایه کار در این پروژه است. به علاوه،تعدادی از تعاریف اساسی و لازم و قضایای ره گشا که در فصل های آتی ما را یاری میکند،ارائه خواهیم کرد.

۱.۱ پایداری، جاذب سراسری، فاصله پایا، تناوب، قضیه پایداری خطی

در اینجا، تعاریف و قضایای مربوط به نقطه تعادل از یک معادله تفاضلی مرتبه بالا را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید که I بازه‌ای از اعداد حقیقی بوده و $f : I^{k+1} \to I$ یک تابع به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشد. آنگاه به ازای هر مجموعه از شرایط اولیه همچون $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_{-1}, y_0 \in I$ معادله تفاضلی

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-k}) \tag{۱.۱.۱}$$

دارای جواب یکتای $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ می باشد.
نقطه $\bar{y}$ را نقطه تعادل معادله(۱.۱.۱) گوییم اگر:

$$\bar{y} = f(\bar{y}, \bar{y}, ..., \bar{y}),$$

بنابراین برای $n \geq 0$، $y_n = \bar{y}$ یک جواب معادله (۱.۱.۱) می باشد و یا به عبارت دیگر $\bar{y}$ نقطه ثابت تابع f است.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید $\bar{y}$ نقطه تعادل معادله (۱.۱.۱) باشد. آنگاه:

(i) نقطه تعادل $\bar{y}$ به طور موضعی پایدار(پایدار)است هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر مجموعه‌ای از شرایط اولیه $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_{-1}, y_0 \in I$ که $\sum_{i=-k}^{0} |y_i - \bar{y}| < \delta$ باشد،داشته باشیم:

$$|y_n - \bar{y}| < \epsilon \quad \forall n \geq -k.$$

(ii) نقطه تعادل $\bar{y}$ به طور موضعی مجانبی پایدار(پایدارمجانبی)است اگر پایدار موضعی بوده و همچنین، عدد $\gamma > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هرمجموعه از شرایط اولیه $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_{-1}, y_0 \in I$ که $\sum_{i=-k}^{0} |y_i - \bar{y}| < \gamma$، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}.$$

(iii) نقطه تعادل $\bar{y}$ جاذب سراسری است اگر به ازای هرمجموعه از شرایط اولیه $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_{-1}, y_0 \in I$، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}.$$

(iv) نقطه تعادل $\bar{y}$ پایدار موضعی سراسری است اگر پایدار موضعی و جاذب سراسری باشد.

(v) نقطه تعادل $\bar{y}$ را ناپایدار نامند اگر پایدار نباشد.

(vi) نقطه تعادل $\bar{y}$ را یک منبع نامند اگر عدد $r > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هرمجموعه از شرایط اولیه $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_{-1}, y_0 \in I$ که $\sum_{i=-k}^{0} |y_i - \bar{y}| < r$،عدد صحیح

$N \geq ۱$ وجود داشته باشد به طوری که $|y_N - \bar{y}| \geq r$.

معادله خطی شده‌ی مربوط به معادله تفاضلی (۱.۱.۱) در نقطه تعادل $\bar{y}$ به فرم زیر است:

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{y}, \bar{y}, ..., \bar{y}) y_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, ... \qquad (۱.۱.۲)$$

معادله مشخصه آن نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\lambda^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{y}, \bar{y}, ..., \bar{y}) \lambda^{k-i}. \qquad (۱.۱.۳)$$

حال به بیان تعدادی لم و قضیه به شکل زیر می‌پردازیم.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه پایداری خطی شده)
فرض کنید که f یک تابع C^1 و $\bar{y}$ نقطه تعادل معادله (۱.۱.۱) باشد. نتایج زیر را خواهیم داشت:

۱) اگر تمام ریشه‌های معادله(۳.۱.۱) درون گوی یکه قرار گیرد، آنگاه نقطه تعادل معادله (۱.۱.۱) پایدار موضعی مجانبی است.

۲) اگر حداقل یکی از ریشه‌های معادله(۳.۱.۱) دارای اندازه بزرگتر از یک باشد، آنگاه نقطه تعادل معادله(۱.۱.۱) ناپایدار است.

۳) اگر تمام ریشه‌های معادله‌ی (۳.۱.۱) دارای اندازه‌ی بزرگتر از یک باشند، آنگاه نقطه‌ی تعادل معادله‌ی (۱.۱.۱) یک منبع است.

تعریف ۳.۱.۱ نقطه‌ی تعادل $\bar{y}$ از معادله‌ی (۱.۱.۱) را هایپربولیک نامند اگر هیچ یک از ریشه‌های معادله‌ی (۳.۱.۱) دارای اندازه‌ی مساوی بایک نباشد. اگر یکی از ریشه‌هاروی گوی یکه قرار بگیرد، $\bar{y}$ را ناهایپربولیک گویند.

تعریف ۴.۱.۱ نقطه‌ی تعادل $\bar{y}$ را یک نقطه‌ی زینی نامند، اگر هایپربولیک بوده و به علاوه معادله‌ی (۳.۱.۱) ریشه‌هایی با اندازه‌ی کمتر و بیشتر از یک باشد.

جهت بررسی خصوصیت پایداری(پایداری مجانبی موضعی) مربوط به نقاط تعادل برخی معادلات تفاضلی، می‌توان به قضایای زیر استناد کرد.

قضیه ۲.۱.۱ چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\lambda^{k+1} - p_{0}\lambda^{k} - ... - p_{k-1}\lambda - p_{k} = 0,$$

که در آن ضرایب $p_i, (0 \leq i \leq k)$ اعداد حقیقی هستند. اگر:

$$|p_0| + |p_1| + ... + |p_k| < 1;$$

آنگاه تمام ریشه‌های چندجمله‌ای درون گوی یکه قرار می‌گیرد.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید$a, b \in \mathbb{R}$ و $k \in \{1, 2, 3, ...\}$. آنگاه نامعادله

$$|a| + |b| < 1, \tag{۴.۱.۱}$$

یک شرط کافی برای پایداری مجانبی معادله تفاضلی

$$y_{n+1} - ay_n + by_{n-k} = 0, n = 0, 1, 2, ... \tag{۵.۱.۱}$$

می باشد.به علاوه فرض کنید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

۱) k فرد و $b < 0$ باشد.

۲) k زوج و $ab < 0$ باشد.

آنگاه نامعادله (۴.۱.۱)یک شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی معادله (۵.۱.۱) خواهد بود.

قضیه ۴.۱.۱ چند جمله‌ای

$$P(\lambda) = \lambda^{۳} + a_{۲}\lambda^{۲} + a_{۱}\lambda + a_{\circ},$$

را در نظر بگیرید، که در آن $a_i \in \mathbb{R}$ برای $i = ۱, ۲, ۳$. آنگاه هر سه ریشه‌ی چند جمله‌ای درون گوی یکه $|\lambda| < ۱$ قرار دارد اگر و تنها اگر

$$|a_{۲} + a_{\circ}| < ۱ + a_{۱} \quad , \quad |a_{۲} - ۳a_{\circ}| < ۳ - a_{۱} \quad , \quad a_{\circ}^{۲} + a_{۱} - a_{\circ}a_{۲} < ۱.$$

قضیه ۵.۱.۱ معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید:

$$y_{n+۱} = f(y_{n-k+۱}, y_{n-۲k+۱}),$$

و فرض کنید معادله خطی شده‌ی وابسته به آن حول نقطه‌ی تعادل $\bar{y}$ به صورت

$$\lambda^{۲k} - p\lambda^{k} - q = \circ$$

باشد. آنگاه:

۱) یک شرط لازم و کافی برای آنکه تمام ریشه‌های معادله‌ی فوق درون گوی یکه $|\lambda| < ۱$ قرار گیرد آن است که:

$$|p| < ۱ - q < ۲.$$

۲) یک شرط لازم و کافی برای آنکه تمام ریشه‌های معادله‌ی فوق خارج از گوی یکه $|\lambda| < ۱$ قرار گیرد آن است که:

$$|p| < |۱ - q| \quad , \quad |q| > ۱.$$

۳) یک شرط لازم و کافی برای آنکهk ریشه‌ی معادله اندازه‌ی کمتر از یک و بقیه‌ی ریشه‌ها دارای اندازه‌ی بزرگتر از یک باشند آن است که:

$$p^۲ + ۴q > ۰ \quad , \quad |p| > |۱ - q|.$$

۴) یک شرط لازم و کافی برای آنکه‌یکی از ریشه‌های معادله دارای اندازه‌ی یک باشد آن است که:

$$|p| = |۱ - q|,$$

یا

$$q = -۱ \quad , \quad |p| < ۲.$$

۲.۱ جذب سراسری

هدف در این بخش بررسی شرایط مربوط به جاذب سراسری بودن نقطه‌ی تعادل یک معادله‌ی تفاضلی است.
مهم‌ترین قضیه در این بخش که توسط G. Karakostas بسط داده‌شده است، ابزار بسیار مناسبی جهت نشان دادن جاذب سراسری بودن یک نقطه‌ی تعادل است. در زیر به این قضیه اشاره می‌کنیم و در ادامه تعدادی قضیه که در این مورد می‌تواند به ما کمک کند را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنید $f \in C[I^{k+۱}, I]$ بوده که I بازه‌ای از اعداد حقیقی و k یک عدد صحیح نامنفی است. همچنین فرض کنید $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ یک جواب معادله‌ی تفاضلی (۱.۱.۱) باشد و ثابت‌های $A, B \in I$ وجود داشته باشد طوری‌که:

$$A \leq y_n \leq B \quad \forall n \geq -k.$$

اگر $\pounds_\circ$ یک نقطه‌ی حدی دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ باشد آنگاه گزاره‌های زیر درست خواهد بود.

۱) جواب $\{L_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ از معادله‌ی (۱.۱.۱) وجود دارد طوری که $L_\circ = \pounds_\circ$ و به ازای هر $N \in \{..., -۱, \circ, ۱, ...\}$، L_N یک نقطه‌ی حدی جواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ باشد.

۲) به ازای هر $i_\circ \le -k$، زیردنباله‌ی $\{y_{n_i}\}_{i=\circ}^{\infty}$ از جواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ وجود خواهد داشت به قسمی که:

$$L_N = \lim_{i\to\infty} y_{r_i+N} \quad \forall N \ge i_\circ.$$

اثبات: اثبات در مرجع [۴] صفحه‌ی ۱۰ به طور کامل بیان شده است.

▲ قضیه‌ی زیر نیز که کاربرد فراوانی در زیست‌شناسی دارد، در بسیاری از معادلات جهت نشان دادن جاذب سراسری بودن نقطه‌ی تعادل به کار میرود. برای مطالعه‌ی بیشتر به [۱۵] مراجعه کنید.

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید $I \subset [\circ, \infty)$ و $f \in C[I \times I, (\circ, \infty)]$ بوده طوری که:

۱) $f(x, y)$ نسبت به هر دو متغیرش نانزولی باشد.

۲) معادله‌ی تفاضلی

$$y_{n+۱} = f(y_n, y_{n-k}) \qquad (۱.۲.۱)$$

($k \in \{۱, ۲, ۳, ...\}$)، یک نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد $\bar{y} \in I$ داشته باشد و در شرط پسروی منفی صدق کند، یعنی:

$$(y - \bar{y})(f(y, y, ..., y) - y) < \circ, \quad \forall y \in I - \{\bar{y}\}.$$

آنگاه تمام جواب‌های معادله‌ی تفاضلی (۱.۲.۱) با شرایط اولیه در بازه‌ی I به نقطه‌ی تعادل $\bar{y}$ همگرا خواهند بود.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید:

$$f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$$

یک تابع پیوسته بوده که:

۱) اعداد L, U $(0 < L < U)$ وجود داشته باشد طوری که:

$$f(L, L) \geq L \quad , \quad f(U, U) \leq U,$$

و $f(x, y)$ نسبت به هر دو متغیرش در بازه‌ی $[L, U]$ نانزولی باشد.

۲) معادله‌ی

$$f(x, x,) = x$$

تنها یک جواب در بازه‌ی $[L, U]$ داشته باشد.

آنگاه معادله‌ی تفاضلی

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-k})$$

تنها دارای یک نقطه‌ی تعادل $\bar{y} \in [L, U]$ بوده و تمام جواب‌های آن با شرایط اولیه در بازه‌ی $[L, U]$ به سمت $\bar{y}$ همگرا خواهد بود.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید $[a, b]$ بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد و

$$f : [a, b] \times [a, b] \to [a, b],$$

یک تابع پیوسته باشد به قسمی که:

۱) $f(x, y)$ نسبت به هردو متغیر x و y ناصعودی باشد.

۲) اگر $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ یک جواب دستگاه

$$f(m, m) = M \qquad and \qquad f(M, M) = m,$$

باشد آن‌گاه $m = M$.

آن‌گاه معادله‌ی

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-k}), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

تنها یک نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد در بازه‌ی $[a, b]$ دارد و همه‌ی جواب‌ها به سمت این نقطه‌ی تعادل همگراست.

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید $[a, b]$ بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد و

$$f : [a, b] \times [a, b] \to [a, b],$$

یک تابع پیوسته باشد به قسمی که:

۱) $f(x, y)$ نسبت به متغیر x ناصعودی و نسبت به متغیر y نانزولی باشد.

۲) اگر $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ یک جواب دستگاه

$$f(m, m) = M \qquad and \qquad f(M, M) = m,$$

باشد آن‌گاه $m = M$.

آن‌گاه معادله‌ی

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-k}), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

تنها یک نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد در بازه‌ی $[a, b]$ دارد و همه‌ی جواب‌ها به سمت این نقطه‌ی تعادل همگراست.

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید

$$f : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}$$

یک تابع پیوسته باشد به طوری که:

۱) اعداد L, U $\quad (۰ < L < U)$ وجود داشته باشد به قسمی که:

$$f(L, U, U) \geq L \quad , \quad f(U, L, L) \leq U.$$

۲) $f(x, y, z)$ نسبت به متغیر x نانزولی و نسبت به متغیرهای z,y ناصعودی باشد.

۳) اگر $(m, M) \in [L, U] \times [L, U]$ جواب دستگاه

$$M = f(M, m, m) \quad , \quad m = f(m, M, M)$$

باشد آنگاه

$$m = M.$$

آنگاه معادله‌ی تفاضلی

$$y_{n+۱} = f(y_n, y_{n-۱}, y_{n-k})$$

یک نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد $\bar{y} \in [L, U]$ داشته و همه‌ی جواب‌های آن با شرایط اولیه در بازه‌ی $[L, U]$ به سمت $\bar{y}$ همگرا خواهد بود.

قضایای مشابه را که از آن‌ها می‌توان به عنوان ابزار مناسبی جهت بررسی جاذب سراسری بودن نقطه‌ی تعادل معادلات استفاده نمود در مراجع [۱۵] و [۴] یافت.

۳.۱ فواصل پایا و جواب‌های تناوبی

در این بخش به بیان تعریف فاصله پایاو جواب‌های تناوبی معادله (۱.۱.۱) می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱ یک فاصله پایا برای معادله تفاضلی (۱.۱.۱) یک فاصله I با این خاصیت است که اگر برای یک $N \geq 0$، $y_{N-k}, ..., y_{N-1}, y_N \in I$ باشد آنگاه به ازای $n > N$ داشته باشیم $y_n \in I$.

تعریف ۲.۳.۱ یک فاصله‌ی پایا برای معادله‌ی

$$y_{n_{m+1}} = f(y_{n_m}, y_{n_{m-1}}) \quad , n = 0, 1, 2, ...$$

بازه‌ای چون I با این ویژگی است که اگر دو مؤلفه‌ی متوالی از جواب آن در بازه‌ی I باشد آنگاه تمام مؤلفه‌های بعدی در I قرار گیرند.به عبارتی اگر به ازای یک $M \geq 0$،

$$y_{n_m}, y_{n_{m+1}} \in I$$

آنگاه به ازای هر $m > M$، $y_{n_m} \in I$.

تعریف ۳.۳.۱ معادله‌ی تفاضلی

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1})$$

را در نظر بگیرید. گوییم این معادله دارای یک تابع پایاست اگر تابع نابدیهی $F(x, y)$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر جواب $\{y_n\}_{n=-1}^{\infty}$ معادله، داشته باشیم:

$$F(y_{n-1}, y_n) = F(y_{-1}, y_0) \qquad \forall n \geq 0.$$

تعریف ۴.۳.۱

۱) جواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ از معادله تفاضلی (۱.۱.۱) را تناوبی با دوره تناوب p گوییم، اگر

$$y_{n+p} = y_n, \forall n \geq -k. \qquad (۶.۱.۱)$$

۲) جواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ از معادله تفاضلی (۱.۱.۱) را$p-$دوری نامند اگر تناوبی با دوره تناوب p بوده و همچنین p کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که به ازای آن معادله (۶.۱.۱)اتفاق می‌افتد.

۴.۱ آنالیز شبه‌دورها

در این بخش، تعاریف مربوط به کاراکتر شبه‌دور و جواب‌های نوسانی معادله(۱.۱.۱) را بیان می‌کنیم.همچنین نتایج مربوط به کاراکتر شبه‌دور معادله

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-k}), \quad n = 0, 1, 2, ... \qquad (۱.۲.۱)$$

جایی که $f : I^2 \to I$ بوده و شرایط اولیه در بازه I باشد.

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید$\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ یک جواب معادله (۱.۲.۱) باشد.یک شبه‌دور مثبت از جواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ عبارت است از مولفه‌های $\{y_l, y_{l+1}, ..., y_m\}$ که همگی بزرگتر یا مساوی نقطه تعادل بوده و $l \geq -k$ و $m \leq \infty$ به قسمی که:

$$l = -k \qquad or \qquad l > -k \quad and \quad y_{l-1} < \bar{y}$$

و

$$m = \infty \qquad or \qquad m < \infty \quad and \quad y_{m+1} < \bar{y}.$$

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنید$\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ یک جواب معادله (۱.۲.۱) باشد.یک شبه‌دور منفی ازجواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ عبارت است از مولفه‌های $\{y_l, y_{l+1}, ..., y_m\}$ که همگی کوچکتراز نقطه تعادل بوده و $l \geq -k$ و $m \leq \infty$ به قسمی که:

$$l = -k \qquad or \qquad l > -k \quad and \quad y_{l-1} \geq \bar{y}$$

و

$$m = \infty \qquad or \qquad m < \infty \quad and \quad y_{m+1} \geq \bar{y}.$$

تعریف ۳.۴.۱ جواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ از معادله(۱.۲.۱) را نانوسانی حول $\bar{y}$ نامند اگر عدد $N \geq -k$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$y_n > \bar{y} \qquad \forall n \geq N,$$

یا

$$y_n < \bar{y} \qquad \forall n \geq N,$$

قابل ذکر است که جواب $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ را نوسانی حول $\bar{y}$ نامند، اگر نانوسانی نباشد.
حال، نتایج مربوط به کاراکتر شبه‌دور معادله(۱.۲.۱) را بیان می‌کنیم.
نتایج بعدی تعمیم قضایای (۱.۷.۱)، (۱.۷.۲)، (۱.۷.۳)و (۱.۷.۴) درمرجع [۱۵] می‌باشد.

قضیه ۱.۴.۱ فرض کنید $f \in C[(0 \times \infty) \times (0 \times \infty), (0 \times \infty)]$ بوده و $f(x,y)$ نسبت به متغیر x نزولی و نسبت به متغیر y صعودی باشد. فرض کنید $\bar{y}$ نقطه تعادل معادله(۱.۲.۱) باشد. آنگاه بجز احتمالا اولین شبه‌دور، هر جواب نوسانی معادله(۱.۲.۱)، شبه‌دورهای با طول حداکثر k دارد.

اثبات: برای $k=1$، اثبات قضیه در مرجع[۱۵] قضیه(۱.۷.۱) بیان شده است.
فرض کنید $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ یک جواب نوسانی معادله(۱.۲.۱) باشد. آنگاه عدد $N \geq 0$ وجود دارد به قسمی که:

$$y_{N-1} < \bar{y} \leq y_N,$$

یا

$$y_{N-1} \geq \bar{y} > y_N. \qquad (۲.۲.۱)$$

فرض کنید نامساوی (۲.۲.۱)اتفاق بیفتد. حالت دوم مشابه حالت اول بوده و پذیرفته می‌شود. حال اگر $\bar{y} \geq y_{N+1}, y_{N+2}, ..., y_{N+k-1}$ باشد، آنگاه با استفاده از خاصیت یکنوایی تابع $f(x,y)$، خواهیم داشت:

$$y_{N+k} = f(y_{N+k-1}, y_{N-1}) < f(\bar{y}, \bar{y}) = \bar{y},$$

و اثبات کامل است. ▲

قضیه ۲.۴.۱ فرض کنید $f \in C[(0 \times \infty) \times (0 \times \infty), (0 \times \infty)]$ بوده و $f(x,y)$ نسبت به هردو متغیر xو y نزولی باشد. فرض کنید $\bar{y}$ نقطه تعادل معادله(۱.۲.۱) باشد. آنگاه هر جواب نوسانی معادله(۱.۲.۱)، شبه‌دورهای با طول حداکثر $k+1$ دارد.

اثبات: برای $k=1$، اثبات قضیه در مرجع [۱۵] قضیه(۱.۷.۲) بیان شده است.
فرض کنید $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$ یک جواب نوسانی با $k+1$ عضو متوالی $y_{N-1}, y_N, ..., y_{N+k-1}$ در یک شبه دور مثبت باشد که:

$$y_{N-1} \geq \bar{y}, y_N \geq \bar{y}, ..., y_{N+k-1} \geq \bar{y},$$

و حداقل یکی از نامساوی‌های فوق به صورت اکید باشد. آنگاه با استفاده از خاصیت یکنوایی تابع $f(x,y)$، خواهیم داشت:

$$y_{N+k} = f(y_{N+k-1}, y_{N-1}) < f(\bar{y}, \bar{y}) = \bar{y}.$$