بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهرا (س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک

عنوان

معرفی دو رگولاتور در فضای پنج بعدی کالوتزا-کلاین

استاد راهنما

دکتر کامران کاویانی

استاد مشاور

دکتر فاطمه شهشهانی

دانشجو

زهرا ثنایی جوان

شهریور ماه ۱۳۸۹

«تا وقتی که خرد انسان در برابر خداوند جهالت است، جهان راه خود را به سمت نور ادامه خواهد داد».

پائولو کوئیلو

با تشکر از زحمات استاد محترم جناب آقای

دکتر کامران کاویانی

چکیده

در نظریهٔ میدانهای کوانتومی با واگراییهای آشکار بسیاری مواجه می شویم . البته کمیتهای فیزیکی همه متناهی هستند و بنابراین واگراییها تنها در طی مراحل محاسباتی ظاهر می شوند .بنابراین نیاز داریم که واگراییها را به وسیلهٔرگولاتورهای مختلف منظم سازی کنیم .

دو رگولاتور جدید در نظریه میدانهای کوانتومی معرفی می کنیم که مربوط به فضا زمانی با یک بعد اضافی فشرده روی دایره است ، مانند فضا زمان مربوط به تئوری کالوتزا –کلاین .

رگولاتور اول EHC (Extended Hard Cutoff) است که تقارن لورنتس در ابعاد بالاتر را حفظ می کند .

رگولاتور دوم EDR(Extended Dimensional Regularization) است که تقارنهای پیمانه ای و لورنتس را در ابعاد بالاتر حفظ می کند .

فهرست ....صفحه

پیوست

فصل ۱

مقدمه

می‌دانیم که علم فیزیک گسترهٔ وسیعی از پدیده‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهد کـه بـا توجه به سرعت و اندازهٔ ذرات، چهـار گـسترهٔ اساسـی بـرای آن در نظـر مـی‌گیرنـد. شامل: مکانیـک کلاسـیک، فیزیـک نـسبیتی، مکانیـک کوانتـومی و نظریـه میـدان‌هـای کوانتومی. در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، تئوری کوانتوم و نسبیت و مفاهیم میدان با هم پیوند داده می‌شوند.

در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی نیروهای میان ذرات، توسط مبادلـهٔ ذرات دیگـر منتقـل می‌شوند. برای مثال، نیروی الکترومغناطیسی میان دو ذرهٔ باردار مثل الکترون، با رد و بدل کردن فوتون‌ها منتقل می‌شود. پس به طـور کلـی بـه کمـک نظریـه میـدان‌هـای کوانتومی اندر کنش‌های میان ذرات را می‌توان بررسی کرد.

همان طور که در مکانیک کوانتومی دغدغهٔ اصلی، کوانتش سیستم‌های دینامیکی ذرات است، در نظریه میدان‌های کوانتومی از مکانیک کوانتومی برای سیستم‌های دینـامیکی میدان استفاده می‌کنیم. پس به جای ذرات ، با میدان مربوط به ذرات سر وکار داریم.

برای بررسی اندرکنش میان ذرات از دیاگرام‌های فایمن کمک مـی‌گیـریم تـا بتـوانیم اندرکنش‌های میان ذرات، برخورد میان ذرات، دامنهٔ احتمال و احتمال برخـورد میـان ذرات و مقطــع برخـــورد نـــرخ تلاشـــی آنهـــا را بررســـی کنـــیم. [1](منظـــور از [1]، refrence[1] می باشد .)

در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، تقارن‌ها از اهمیت خاصی برخوردارند، از جمله تقارن لورنتش و تقارن پیمانه‌ای. بنابراین باید روش‌ها و ابزارهایی که برای بررسی مسائل به کار می بریم، این تقارن‌ها را حفظ کنند.

به عنوان نمونه، در نظریهٔ میدان بسیار پیش می‌آید که ما با جواب‌های نامتناهی و واگرا مواجه می‌شویم و باید سعی کنیم به طریقی این واگرایی‌ها را کنترل کنیم تا به جوابهای متناهی که به لحاظ تجربی قابل بررسی باشند دست یابیم. برای این امر از روش‌های مختلف رگولاریزاسیون (منظم‌سازی) استفاده می‌کنیم.

از آنجا که در این مطلب قصد داریم که دو روش رگولاریزاسیون را مورد بررسی قرار دهیم، بهتر است اول به پاسخ این سؤال بپردازیم که رگولاریزاسیون یعنی چه؟

رگولاریزاسیون (منظم‌سازی):

همان طور که گفته شد، در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی با واگرایی‌های بسیاری مواجه می‌شویم. البته تمام کمیت‌های فیزیکی که در آزمایشها با آنها سر و کار داریم، متناهی هستند و واگرایی‌ها مربوط به مراحل محاسباتی می‌شوند. از آنجا که بسیاری محاسبات که دچار واگرایی می‌شوند، به دلایل مختلف از جمله دلایل تجربی حائز اهمیت هستند، سعی می‌کنیم این واگرایی‌ها را کنترل کنیم. یعنی کاری می‌کنیم که در انتها یا به جواب‌های متناهی برسیم و یا حداقل جملات اصطلاحاً بیمار را که باعث

واگرایی هستند از سایر جملات مشخص کنیم. با این کار می‌توانیم واگرایی‌های مربوط به اندرکنش‌های مختلف را نیز با هم مقایسه کنیم.

برای انجام این کار از روش‌های مختلف رگولاریزاسیون استفاده می‌کنیم که این رگولاریزه کردن با استفاده از ابزارهایی به نام رگولاتور انجام می‌شود. منظور از رگولاتورهای مختلف، همان روش‌های مختلف رگولاریزه کردن است. یک کمیت واگرا مانند «O» را در نظر می‌گیریم، آنچه رگولاریزاسیون انجام می‌دهد معرفی پارامتر جدیدی مانند « ε » است که O تابعی از ε می‌شود (($O(\varepsilon)$). اگر ε یک کمیت بسیار کوچک باشد، فرض بر آن است که در حد $\varepsilon \to 0$ همان کمیت اولیهٔ O به دست می‌آید، یعنی:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} O(\varepsilon) = O$$

(اگر شرایط به گونه ای باشد که کمیتی واگرا مانند O برحسب پارامتر بزرگی مثل Λمنظم سازی شود ، باید حد $\Lambda \to \infty$ را اعمال کرد).

پس ممکن است دوباره کمیتی واگرا به دست آید، اما هنوز برای مقدار متناهی اما خیلی کوچک ε (یا مقدار بزرگ، اما متناهی Λ)، کمیت متناهی است، یعنی:

$$|O(\varepsilon)| < \infty$$

پس می‌گوییم کمیت واگرای O توسط پارامتر ε منظم سازی شده است.

ارزش یک رگولاتور وابسته به آن است که تا چه میزان به تقارن‌ها احترام بگذارد و کاربردی باشد.

در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی چند نوع رگولاریزاسیون داریم: رگولاریزاسیون cut off ، پائولی ویلارز، ابعادی، تابع زتا، شبکه‌ای و . . .

برای روشن‌تر شدن مطلب به ذکر دو مثال می‌پردازیم.

*** روش Cut off**:

به عنوان یک مثال عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum = \int \frac{d^2 P}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

که P ممنتوم است. این انتگرال در ممنتوم‌های بزرگ به صورت لگاریتمی واگراست. یک پارامتر بزرگ اما متناهی مانند Λ^2 برای حد انتگرال در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\sum &= \int_{\circ}^{\Lambda^2} \frac{d\ P^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\ln(p^2 + m^2)\right]_{\circ}^{\Lambda^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} Ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2}\end{aligned}$$

بنابراین کمیت واگرای □ برحسب پارامتر بزرگ اما متناهی Λ منظم سازی شده است .

* **رگولاریزاسیون ابعادی (Dimensional Regularization):**

فضا- زمانی را با بعد d در نظر می‌گیریم که یک بعد زمانی و ۱-d بعد فضایی دارد. به عنوان یک مثال انتگرالی که چرخش ویک [پیوست(۴)] برای آن انجام شده، در نظر می‌گیریم :

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

که $\int d\Omega_d$ سطح کرهٔ واحد با ابعاد d می‌باشد (این انتگرال تنها به عنوان نمونه برای نشان دادن روش منظم سازی ابعادی در نظر گرفته شده است).

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\pi})^2 &= (\int dx e^{-x^2})^d = \int d^d x \ \exp(-\sum_{i=1}^{d} x_i^2) \\
&= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \int (d\Omega_d) . \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2)(x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} \\
&= \int (d\Omega_d) \frac{1}{2} \Gamma(\frac{d}{2}) \\
&= \int d\Omega_d = \frac{2(\sqrt{\pi})^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$\int d\Omega_d$	$\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$	d
2	$\sqrt{\pi}$	1
2π	۱	2
4π	$\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$	3
$2\pi^2$	۱	4

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\int_0^\infty dl \frac{\ell^{d-1}}{(\ell^2+\Delta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty d(\ell^2)\frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell^2+\Delta)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}\int_0^1 dx x^{(1-\frac{d}{2})}(1-x)^{\frac{d}{2}-1}$$

که $x \equiv \frac{\Delta}{\ell^2+\Delta}$ و در نتیجه $\ell^2 = \frac{\Delta(1-x)}{x}$ و $\ell^2+\Delta = \frac{\Delta}{x}$

در تعریف تابع beta داریم:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

بنابراین

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

فرمول‌های انتگرال‌گیری کلی به صورت زیر هستند:

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}}$$

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1}$$

(1.1)

تعریف می‌کنیم $\varepsilon \equiv 4-d$ و با توجه به اینکه

$$\Gamma(2-\frac{d}{2})=\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})=\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+O(\varepsilon^2)$$

و

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma(z)}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

داریم:

$$\int\frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2}\xrightarrow[d\to 4]{}\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\log\Delta-\gamma+\log(4\pi)+O(\varepsilon^2)\right) \quad (1.2)$$

Extended Hard Cut off Regularization (EHC):

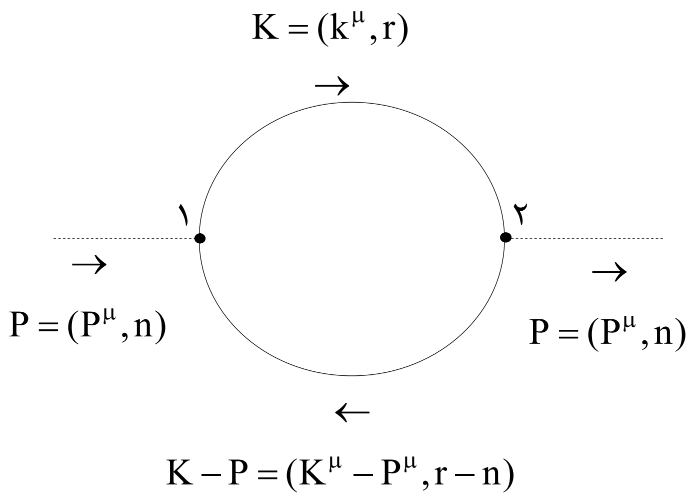
فضا زمانی که در آن به بررسی دو رگولاتور خواهیم پرداخت ، فضازمانی با یک بعد اضافی مکانی است که این بعد اضافی برروی دایره ای با شـعاع $R(x_5+2\pi R\sim x_5)$ فشرده شده است . ممنتوم در بعـد پـنجم در واحـد $\frac{1}{R}$ کـوانتیزه شـده اسـت . یعنـی ممنتومها در بعد فشرده به صورت گسسته هستند.

اگر فضای پنج بعدی بدون هـیچ بعـد فـشرده شـده ای داشـتیم ، انتگـرال پـنج بعـدی ممنتـوم بـه صـورت.... $\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}$ بـود .امـا بـا توجـه بـه فـشرده سـازی تبـدیل می شود به $\frac{1}{2\pi R}\sum_{k5}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$.....

در تئوری کالوتزا – کلاین (Kaluza – Klein) که به اختصار KK نامیده مـی شـود نیز ، فضا به همین شکل در نظر گرفته می شود.

رگولاتور EHC بر اساس روش cut off در چهار بعد بنا شده است، با این تفاوت که در اینجا ما به جای چهار بعد با پنج بعد سر و کار داریم که همان طور که گفتـه شـد، فضا- زمانی که انتخاب می‌کنـیم مربـوط بـه تئـوری KK مـی باشـد. ایـن رگولاتـور ناوردایی لورنتس در پنج بعد را حفظ می‌کند.

برای بررسی رگولاتور EHC یک دیاگرام به عنوان مثال در نظر مـی‌گیـریم کـه ایـن دیاگرام تنها شامل یـک loop مـی‌باشـد و در واقـع بـه عنـوان دیـاگرام سـاده‌ای کـه دامنه‌اش شامل جملات واگراست، می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد:



شکل «۱»

همان طور که می‌بینیم، در این دیاگرام دو رأس وجود دارد. ذره‌ای بـا ممنتـوم P کـه دارای چهار ممنتوم P^{μ} و عدد مُد n می‌باشد، به رأس «۱» وارد می‌شود.

این اندرکنش را برای یک میدان اسکالر در نظر می‌گیریم، بنابراین باید انتـشارگرهای موجود در loop را برای میدان اسکالر بنویـسیم. از آنجـا کـه بایـد در رئـوس ۱ و ۲ پایستگی تکانه داشته باشیم، باید از رأس ۲ دوباره ذره با همان تکانـۀ $P=(p^{\mu},n)$ خارج شود.

از آنجا که عبارات موجوددر دامنۀ loop است که باعث ایجاد جملات واگرا می‌شـود، تنها جملۀ مربوط به loop را بررسی مـی‌کنـیم و آن را بـا $L_n(P)$ نـشان مـی‌دهـیم. منظور از nو r عدد مُد مربوط به تئوری KK می باشد. برای بررسیL از قواعدفایمن استفاده می‌کنیم [پیوست(۲)].

$$L_n(p)=\sum_r\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\frac{r^2}{R^2}-M^2}\frac{1}{(k-p)^2-\frac{(r-n)^2}{R^2}-M^2} \quad (1.3)$$

با در نظر گرفتن تعاریف زیر:

$$\ell\equiv k-xp \;,\; \ell^4\equiv(r-xn)/R \;,\; (1.4)$$

(که مؤلفه‌های تانسوری و بردرای مربوط به بعد پنجم را با نمای «۴» نشان می‌دهیم، یعنی منظور از ℓ^4، مؤلفۀ پنجم بردار ℓ می‌باشد. پس به جای $\mu=0,1,2,3$ ضـرایب لورنتس به صورت $M=0,1,2,3,4$ می‌باشد.)

$$M^2(x) \equiv M^2 + x(x-1)\left[P^2 - \frac{n^2}{R^2}\right]$$

(1.5)

و با به کار بردن قضیهٔ پارامترهای فایمن و انجام چرخش Wick به دست می‌آوریم:

$$L_n(p) = i\int_\circ^1 dx \sum_r \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{\ell_E^2 + \ell^{4^2} + M^2(x)}\right]^2 \quad (1.6)$$

اثبات:

طبق قضیهٔ پارامترهای فایمن:

$$\frac{1}{AB} = \int_\circ^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_\circ^1 dxdy\delta(x+y-1)\frac{1}{[xA + yB]^2}$$

برای عبارت مربوط به $L_n(p)$:

$$\frac{1}{(k^2 - \frac{r^2}{R^2} - M^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 - \frac{(r-n)^2}{R^2} - M^2 + i\varepsilon)} = \int_\circ^1 dxdy\,\delta(x+y-1)\frac{2}{D^2}$$

$$D \equiv y(k^2 - \frac{r^2}{R^2} - M^2 + i\varepsilon) + x\left((k-p)^2 - \frac{(r-n)^2}{R^2} - M^2 + i\varepsilon\right)$$

$$= i\varepsilon(x+y) + (x+y)K^2 - M^2(x+y) + xp^2 - \frac{r^2}{R^2}(x+y) - \frac{n^2}{R^2}x - 2kxp + \frac{2rn}{R^2}x$$

$$= i\varepsilon + K^2 - M^2 + xp^2 - \frac{r^2 + n^2x}{R^2} - 2kxp + \frac{2rn}{R^2}x$$

که با توجه به $\delta(x+y-1)$ ، $x+y=1$:

$$\Delta \equiv -xp^2(1-x)+M^2-\frac{r^2}{R^2}-\frac{n^2}{R^2}x+\frac{2rn}{R^2}x-\frac{n^2x^2}{R^2}+\frac{n^2x^2}{R^2}$$
$$=-xp^2(1-x)+M^2+\frac{(r-xn)^2}{R^2}+\frac{n^2}{R^2}x(1-x)$$

$$=M^2+(\ell^4)^2+x(x-1)\left[P^2-\frac{n^2}{R^2}\right]$$
$$\ell \equiv k-xp \ , \ d^4k=d^4\ell$$

$$D=\ell^2-\Delta+i\varepsilon$$
$$\Rightarrow L_n(p)=\int_{\circ}^{1}dx\sum_r\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{\ell^2-(\ell^4)^2-M^2(x)}\right]^2$$

از طرف دیگر با استفاده از چرخش ویک «Wick Rotation» داریم:

$$\ell^{\circ}_E \equiv i\ell^{\circ} \ , \ \vec{\ell}_E \equiv \vec{\ell} \ , \ \ell^2 \equiv -\ell^2_E$$

[پیوست (۴)]

بنابراین:

$$L_n(p)=i\int_{\circ}^{1}dx\sum_r\int\frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{\ell^2_E+(\ell^4)^2+M^2(x)}\right]^2$$

در رابطهٔ (1.6) دو واگرایی وجود دارد. یکی واگرایی مربوط به انتگرال و دیگری واگرایی مربوط به $\sum$. پس به منظور کنترل این واگرایی‌ها، کمیتی بزرگ، اما متناهی مانند Λ را در نظر می‌گیریم که تکانه‌ها را به شکل زیر مقید می‌کند:

$$\ell_E^2 + (\ell^4)^2 \le \Lambda^2$$

این معادله قیدی ، cut off مربوط به انتگرال روی چهار ممنتوم ℓ_E را با توجه به تعریفی که برای ℓ^4 به صورت $\ell^4 = \frac{r - xn}{R}$ داشتیم، به cut off مربوط به $\sum_r$ مربوط می‌کند:

$$-\Lambda R + xn \le r \le \Lambda R + xn$$

اثبات:

$$\ell^4 = \frac{r - xn}{R} \;,\; \ell_E^4 + (\ell^4)^2 \le \Lambda^2$$
$$\xrightarrow{\ell_E^2, (\ell^4)^2 > 0} (\ell^4)^2 \le \Lambda^2 \to -\Lambda \le \ell^4 \le \Lambda$$

$$-\Lambda \le \frac{r - xn}{R} \le \Lambda$$
$$-\Lambda R + xn \le r \le \Lambda R + xn$$

پس محدودیت انتگرال ℓ_E به این صورت می‌شود:

$$\begin{aligned} \ell_E^2 &\le \Lambda^2 - (\ell^4)^2 \\ &\le \Lambda^2 - (r - xn)^2 / R^2 \end{aligned} \qquad (1.9)$$

بنابراین ما با روابط (1.7) و (1.8) هر پنج مؤلفه را همزمان و با روابطی که وابسته به هم هستند، رگولایزه کردیم و هیچ جهتی با جهت دیگر تفاوت و ارجحیت ندارد و اگر تعریف کنیم:

$$f_n(p,r,x) \equiv \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{\ell_E^2 + (\ell^4)^2 + x(x-1)[p^2 - \frac{n^2}{R^2}]}\right]^2 \qquad (1.10)$$

به طور کلی داریم:

$$L_\circ(p) = i\int_\circ^1 dx \sum_{r=-\Lambda R}^{\Lambda R} f_\circ(p,r,x) \qquad (1.11)$$

و

$$L_n(p) = i\int_\circ^1 dx \sum_{r=-\Lambda R+xn}^{\Lambda R+xn} f_n(p,r,x) \qquad (1.12)$$

که منظور از $\underset{\circ}{L}(p)$ حالتی است که عدد مد KK برابر صفر است.

ΛR را مانند یک عدد صحیح در نظر می‌گیریم. می‌بینیم که برای عبارت مربوط به $\underset{\circ}{L}(p)$ حدود $\sum$ مستقل از پارامترهای فایمن هستند. اما در $L_n(p)$، حدود $\sum$ به پارامتر فایمن بستگی دارد $(-\Lambda R + xn \le r \le \Lambda R + xn)$.

ولی ما خواهان آن هستیم که حتی برای $n \neq \circ$ نیز، حدود $\sum$ مستقل از پارامتر فایمن باشد و یک حالت کلی داشته باشد. پس باید سعی کنیم به روشی این بستگی را از بین ببریم، به طوری که $\sum_{r=a}^{b}$ جمعی روی مقادیر صحیح r در بازهٔ $a \le r \le b$ باشد. حتی اگر a و b خودشان اعداد صحیح نباشند.