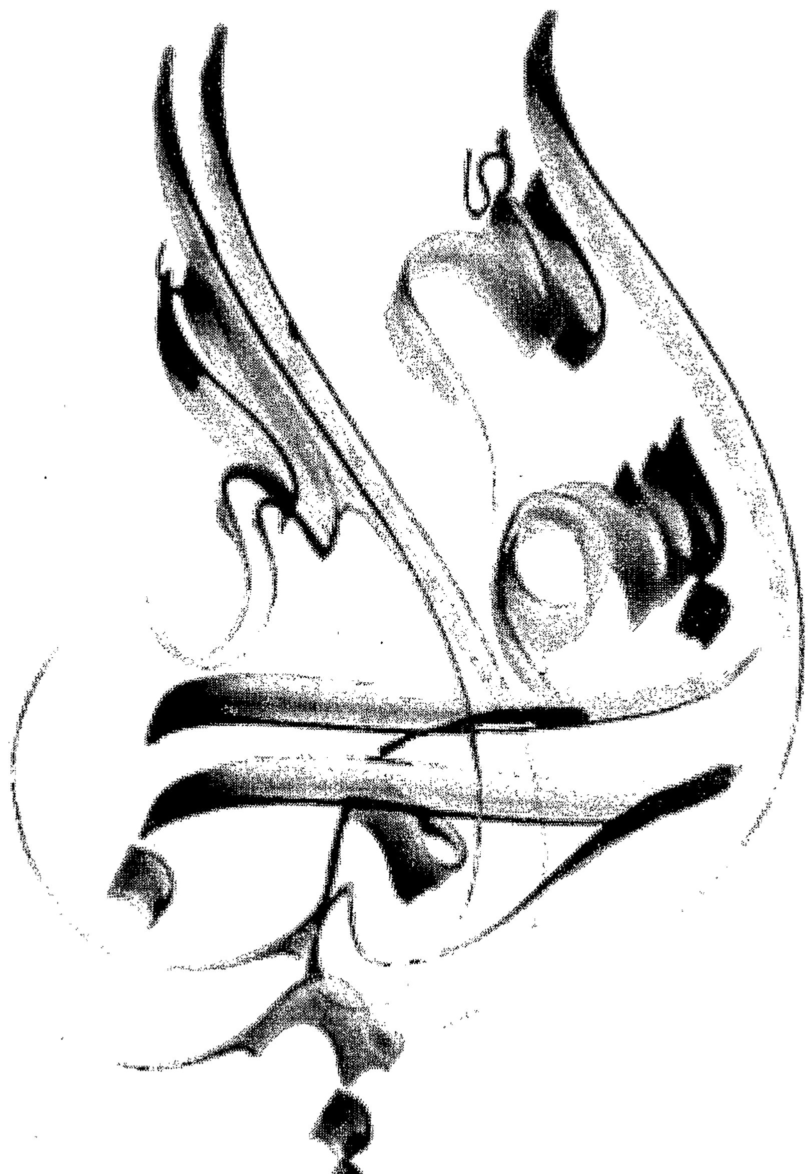

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

ایده‌آل‌های یک طرفه و متناهی البعد در جبرهای وابسته به یک گروه موضعاً فشرده

توسط:
مریم حسن‌زاده رستمی

استاد راهنما:
دکتر غلامحسین اسلام‌زاده

شهریور ۱۳۸۷

به نام خدا

ایده‌آل‌های یک طرفه و متناهی البعد در جبرهای وابسته به یک گروه موضعاً فشرده

به وسیله‌ی:

مریم حسن‌زاده رستمی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض (آنالیز)

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر غلامحسین اسلام‌زاده، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)......................................

دکتر بهمن طباطبایی، دانشیار بخش ریاضی......................................

دکتر محسن تقوی، دانشیار بخش ریاضی......................................

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیم به:

ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج)،

پدر ، مادر

و

همسرم

که تمام هستی و تلاشم را مدیون وجودشان هستم.

سپاسگزاری

سپاس و ثنا یگانه خالقی را که ذرات وجودم از جوشش مهرش جان می‌گیرد، او که یگانه‌ترین در عظمت، تنهاترین در اوج و پاک‌ترین در وجود است.

بر خویش واجب می‌دانم تا از سر سپاس و حق شناسی مراتب تشکر و قدردانی خود را از جناب آقای دکتر غلامحسین اسلام‌زاده ـ استاد راهنما ـ ابراز نمایم. همچنین از اساتید مشاورم آقایان دکتر بهمن طباطبایی و دکتر محسن تقوی که در به انجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، سپاسگذارم.

از خانواده مهربانم، که همواره مشوق اصلی من در تمام دوران تحصیل بوده‌اند. تشکر و قدردانی می‌نمایم، اگر صبوری و مهربانی آنها (به ویژه همسرم) نبود شاید آغاز و طی این مسیر برایم مقدور نمی‌گردید.

همچنین از خانواده محترم پارسا به خاطر همراهی‌شان متشکرم.

در پایان از زحمات برادران عزیز و خواهر مهربانم نیز تشکر می‌کنم.

پیروزی و سعادت تمامی شما عزیزان را از خداوند منان خواستارم.

مریم حسن‌زاده رستمی

شهریور ۸۷

چکیده

ایده‌آل های یک طرفه و متناهی البعد در جبرهای وابسته به یک گروه موضعاً فشرده

به وسیله‌ی :

مریم حسن زاده رستمی

پایان نامه حاضر بر اساس مقاله های :

The ideal structure of some Banach algebras ,111,(1992),567 – 576.

Finite – dimensional left ideals in some algebras associated with a locally compact group,127,(1999),2325 – 2333.

Finite – dimensional right ideals in some algebras associated with a locally compact group,127,(1999),1729 – 1734.

نگارش *M. Filali* نوشته شده است.

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. ابتدا به مطالعه‌ی مجموعه تابعک های χ – پایا و توپولوژیک χ – پایا می‌پردازیم (جایی که χ یک مشخصه پیوسته G است.) و نشان می‌دهیم که ایده‌آل های چپ مینیمال در $L^{\infty}(G)^*$, $LUC(G)^*$ موجودند هرگاه G آبلی باشد. سپس نشان می‌دهیم که ایده‌آل های چپ متناهی البعد در $LUC(G)^*$, $L^1(G)^{**}$ موجودند اگر و تنها اگر G میانگین پذیر باشد و در $L^1(G)$, $M(G)$ موجودند اگر و تنها اگر G فشرده باشد. در خاتمه به بررسی ایده‌آل های راست متناهی البعد در $UC(G)$, $UC(G)^*$ می‌پردازیم، وقتی که G یک گروه موضعاً فشرده آبلی یا یک گروه گسسته یا نیم گروه حذفی جابجایی باشد و نشان می‌دهیم ایده‌آل های راست متناهی البعد در $UC(G)^*$ موجودند اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

فهرست

عنوان صفحه

فصل اول:

مقدمات

۱-۱ تاریخچه :

ضرب آرنز توسط ریچارد آرنز (Richard Arens) در سال ۱۹۵۱ تعریف شد. این ضرب روی فضای مزدوج دوم یک جبر باناخ تعریف می شود. سیوین (Civin) و یود (Yood) در سال ۱۹۶۰ با استفاده از این ایده آرنز، به مطالعه روی فضای دوگان دوم یک جبر باناخ به عنوان یک جبر پرداختند و نشان دادند که هر ایده آل مدولار (چپ، راست یا دوطرفه) از یک جبر B (در B^{**}) ، شامل ایده آلی از همان نوع در B^{**} است. همچنین نشان دادند که اگر T یک همریختی پیوسته از جبر باناخ B_1 به توی یک جبر باناخ B_2 باشد آنگاه T^{**} نیز یک همریختی پیوسته از B_1^{**} به توی B_2^{**} است .

در سال ۱۹۹۴ ، در مقاله مشترکی که توسط بیکر (Baker) و فیلالی (Filali) نوشته شد نتیجه ای به صورت زیر مطرح گردید[I] .

" فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده با مجموعه ای از نمایشهای متناهی البعد روی G که نقاط G را از هم جدا می کنند. فرض کنید I یک ایده آل مینیمال از $L^1(G)$ یا $M(G)$ باشد آنگاه G فشرده و I متناهی البعد است. "

(برهان : به مرجع شماره [I] صفحه ۴۸۸ مراجعه کنید .)

در این پایان نامه ما به بررسی ایده آل های یک طرفه (چپ یا راست) با بعد متناهی در جبرهای وابسته به یک گروه موضعاً فشرده می پردازیم .

در فصل دوم ساختار ایده آل های بعضی جبرهای باناخ را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از تعریف ضرب آرنز و تعاریف χ - پایا و توپولوژیک χ - پایا، نتیجه اصلی زیر را اثبات خواهیم نمود .

نتیجه : " فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد. آنگاه :

الف) m یک ایده آل مینیمال چپ $L^\infty(G)^*$ است اگر و تنها اگر $m=\mathbb{C}v$ ، جایی که v یا یک پوچ ساز راست $L^\infty(G)^*$ باشد یا توپولوژیک $\overline{\chi}$- پایا باشد برای یک $\chi\in\hat{G}$.

ب) m یک ایده آل مینیمال چپ $LUC(G)^*$ (یا $WAP(G)^*$) است اگر و تنها اگر $m=\mathbb{C}v$ ، جایی که v ، χ- پایاست برای یک $\chi\in\hat{G}$."

در فصل سوم و چهارم به ترتیب به نتایج زیر و اثبات آنها می پردازیم.

نتیجه۱ : " ایده آل های چپ با بعد متناهی در $LUC(G)^*$ و $L^1(G)^{**}$ موجودند اگر و تنها اگر G میانگین پذیر باشد .و این ایده آلها در $L^1(G)$, $M(G)$ موجودند اگر و تنها اگر G فشرده باشد. "

نتیجه۲ : "ایده آل های راست با بعد متناهی در $UC(G)^*$ موجودند اگر و تنها اگر G فشرده باشد."

که برای رسیدن به این نتایج نیاز به بیان و اثبات چند قضیه در هر فصل داریم .

۱-۲ جبرهای باناخ :

در سرتاسر این پایان نامه، میدان اسکالرها را میدان اعداد مختلط در نظر می گیریم .

تعریف ۱-۲-۱ : فضای باناخ A یک جبر باناخ است اگر در آن یک ضرب شرکت پذیر چنان تعریف شده باشد که:

الف) $\|xy\|\le\|x\|\,\|y\| \qquad (\forall x,y\in A)$

ب) قوانین پخش پذیری $x(y+z)=xy+xz \quad , \quad (y+z)x=yx+zx$

و رابطه‌ی $(\lambda x)y=\lambda(xy)=x(\lambda y)$

به ازای هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x,y,z\in A$ برقرار باشند.

مثال ۱-۲-۲: فرض کنید X یک فضای موضعاً فشرده باشد. $C(X)$ که فضای همه‌ی توابع پیوسته روی X است، با جمع و ضرب نقطه به نقطه ای معمولی توابع به صورت زیر:

$$(f+g)x = f(x)+g(x) \quad , \quad (fg)x = f(x)\,g(x)$$

و نرم سوپریمم:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \ : x\in X\}$$

یک جبر باناخ است .

تعریف ۱-۲-۳ : یکانی سازی یک جبر نرم دار A که با A_e نمایش داده می شود عبارت است از : $A_e = A\oplus \mathbb{C}e$.

که جمع و ضرب اسکالر و ضرب در آن به صورت زیر تعریف می شود :

$$\forall \alpha,\beta\in \mathbb{C} \quad , \quad \forall x,y\in A$$

$$(x,\alpha)+(y,\beta) = (x+y,\alpha+\beta)$$

$$\beta(x,\alpha) = (\beta x,\beta\alpha)$$

$$(x,\alpha)\ \ (y,\beta) = (xy+\alpha y+\beta x\ ,\alpha\beta)$$

و نرم آن به صورت $\|(x,\alpha)\| = \|x\|+|\alpha|$ تعریف می شود.

بنابراین A_e، یک جبر نرم دار یکدار با یکه‌ی $(\circ,e)$ می باشد.

تعریف ۱-۲-۴ : یک فضای برداری A با یک توپولوژی که نسبت به این توپولوژی دو نگاشت زیر پیوسته باشند را یک فضای برداری توپولوژیک (T.V.S) گویند.

$$\begin{aligned} A\times A &\to A \\ (x,y) &\mapsto xy \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F\times A &\to A \\ (\alpha,x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

تعریف ۱-۲-۵ : یک T.V.S که توپولوژی آن با خانواده‌ی P از نیم نرم‌ها با شرط $\bigcap_{p\in P}\{x:\ p(x)=\circ\} = \{\circ\}$ ایجاد می‌شود را یک فضای موضعاً محدب (L.C.S) گویند.

تعریف ۱-۲-۶ : فرض کنید X یک L.C.S باشد. توپولوژی تعریف شده روی X به وسیله‌ی خانواده‌ی نیم نرم‌های $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ به طوری‌که: $p_{x^*}(x) = |< x, x^* >|$ را توپولوژی ضعیف روی X گویند که اغلب با نماد $\sigma\left(X, X^*\right)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱-۲-۷ : فرض کنید X یک فضای موضعاً محدب (L.C.S) باشد. توپولوژی تعریف شده روی X^* به وسیله‌ی خانواده‌ی $\{p_x : x \in X\}$ از نیم نرم ها به طوری که: $p_x\left(x^*\right) = \left|\langle x, x^* \rangle\right|$ را توپولوژی *- ضعیف روی X^* گویند که اغلب با نماد $\sigma(X^*, X)$ نمایش داده می شود.

توجه : تور $\{x_i^*\}_{i \in I}$ در X^* به طور *- ضعیف همگراست به $x^* \in X^*$ اگر و تنها اگر

$$\forall x \in X \qquad : \qquad \langle x \ , \ x_i^* \rangle \to \langle x \ , \ x^* \rangle$$

تعریف ۱-۲-۸ : فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. یک تابعک ضربی روی A یک تابعک خطی غیرصفر ضربی مانند $\phi : A \to \mathbb{C}$ است به طوری که:

1) $\phi(x y) = \phi(x) \ \phi(y)$

2) $\phi(\alpha x + y) = \alpha \phi(x) + \phi(y) \qquad ; \ \forall x, y \in \mathrm{A} \ , \alpha \in \mathbb{C}$

تعریف ۱-۲-۹ : ایده آل M در جبر A را مینیمال گویند اگر $M \neq \{0\}$ و به ازای هر ایده‌آل K از A که $\{0\} \subseteq K \subseteq M$ آنگاه یا $K = \{0\}$ یا $K = M$ باشد.

تعریف ۱-۲-۱۰ : یک ایده آل چپ [راست] محض I از جبر A مدولار است اگر عنصر $u \in A$ موجود باشد به طوری که $A(1-u) \subseteq I$ $[(1-u)A \subseteq I]$ که $A(1-u) = \{a - au | a \in A\}$. u را همانی مدولار راست [چپ] برای I گویند.

ایده آل I مدولار است اگر عنصر $u \in A$ موجود باشد به طوری که :

$$A(1-u) + (1-u)A \subset I$$

یک ایده آل چپ محض I را ماگزیمال مدولار گویند اگر محض، مدولار و شامل در هیچ ایده آل چپ محض مدولار دیگری نباشد.

لم ۱-۲-۱۱ : فرض کنید A یک جبر دلخواه و M یک ایده آل مینیمال چپ در A باشد به طوری که $M^2 \neq \{0\}$ ، آنگاه عنصر خودتوان $a \in A$ وجود دارد به طوری که $M = Aa$ و $aAa = \mathbb{C}a$. (aAa یک جبر بخشی با عنصر یکانی a است .)

برهان : به مرجع شماره [20] صفحه ۴۵ مراجعه کنید .

قضیه۱-۲-۱۲ : هر ایده آل مدولار محض زیرمجموعه یک ایده آل مدولار ماگزیمال است.

برهان : به مرجع شماره [19] صفحه ۵۸ مراجعه کنید .

قضیه۱-۲-۱۳ : فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی مختلط و M یک ایده آل مدولار ماگزیمال A باشد. فرض کنید R ، بستار به طور *- ضعیف $\pi(M)$ باشد. آنگاه R یک ایده آل دو طرفه مدولار ماگزیمال A^{**} است. (جایی که π یک نگاشت نشاننده طبیعی از A به توی A^{**} است.)

برهان : به مرجع شماره [5] صفحه ۸۶۵ مراجعه کنید

تعریف ۱-۲-۱۴ : فرض کنید X , Y, W فضاهای باناخ باشند و $\phi : X \times Y \to W$ یک نگاشت دو خطی باشد. نگاشت های ϕ^* و ϕ^{**} و ϕ^{***} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi^* : W^* \times X \to Y^*$$
$$\langle \phi^*\left((w^*, x)\right), y\rangle = \langle w^*, \phi(x, y)\rangle$$

$$\phi^{**} : Y^{**} \times W^* \to X^*$$
$$\langle \phi^{**}\left(\left(y^{**}, w^*\right)\right), x\rangle = \langle y^{**}, \phi^*\left(w^*, x\right)\rangle$$

$$\phi^{***} : X^{**} \times Y^{**} \to W^{**}$$
$$\langle \phi^{***}\left(\left(x^{**}, y^{**}\right)\right), w^{**}\rangle = \langle x^{**}, \phi^{**}\left(y^{**}, w^{**}\right)\rangle$$

همچنین $\phi' : Y \times X \to W$ به صورت $\phi'(y,x) = \phi(x,y)$ تعریف می شود و $\left(\phi'\right)^*$ و $\left(\phi'\right)^{**}$ و $\left(\phi'\right)^{***}$ به طریق مشابه تعریف می شود. در یک مورد خاص اگر $X = Y = W = A$ یک جبر باناخ باشد و ϕ ضرب A باشد آنگاه ϕ^{***} و $\phi'^{***'}$ به ترتیب ضرب های اول و دوم آرنز روی A نامیده می شوند. در این حالت برای ساده تر شدن ϕ و ϕ' را به ترتیب با . و $\triangleleft$ نمایش می دهیم. برای هر $a, x \in A$ و $f, g \in A^*$ و $m, n \in A^{**}$ ضرب های اول و دوم آرنز را به صورت زیر تعریف می کنیم .

ضرب اول آرنز :

$$L_a f \in A^* \quad , \quad \langle L_a f , x\rangle = \langle f , ax\rangle$$

$$T_m f \in A^* \ , \ \langle T_m f , a\rangle = \langle m, L_a f\rangle$$

$$n.m \in A^{**} \ , \ \langle n.m, f\rangle = \langle n, T_m f\rangle$$

ضرب دوم آرنز :

$$a \lhd f \in A^* \quad , \quad \langle a \lhd f, x\rangle = \langle f, xa\rangle$$

$$f \lhd m \in A^* \ , \langle f \lhd m, a\rangle = \langle m, a \lhd f\rangle$$

$$n \lhd m \in A^{**} , \langle m \lhd n, f\rangle = \langle n, f \lhd m\rangle$$

در سرتاسر این پایان نامه، از ضرب اول آرنز استفاده می شود.

۱-۳ گروه های توپولوژیک :

تعریف ۱-۳-۱ : فرض کنید G هم یک گروه و هم یک فضای توپولوژیک باشد. فرض کنید :

۱) نگاشت $(x, y) \mapsto xy$ یک نگاشت پیوسته از $G\times G$ به توی G باشد.

۲) نگاشت $x \mapsto x^{-1}$ یک نگاشت پیوسته از G به توی G باشد.

آنگاه G یک گروه توپولوژیک نامیده می شود.

تعریف ۱-۳-۲ : Gرا یک گروه موضعاً فشرده گویند هرگاه G هم یک گروه توپولوژیک و هم همراه با همان توپولوژی یک فضای موضعاً فشرده باشد.

تعریف ۱-۳-۳ : G را یک گروه فشرده گویند هرگاه G هم یک گروه توپولوژیک و هم همراه با همان توپولوژی یک فضای فشرده باشد.

تعریف ۱-۳-۴ : فرض کنید G یک نیم گروه (مجموعه ای غیرتهی همراه با یک عمل ضرب شرکتپذیر) باشد. فرض کنید χ یک تابع مختلط- مقدار روی G باشد به طوری که :

$$\chi(xy) = \chi(x)\ \chi(y) \quad , \ \forall x, y \in G$$

آنگاه χ یک تابع ضربی روی G نامیده می شود. اگر χ کراندار و مخالف صفر باشد، χ یک نیم مشخصه از G نامیده می شود. یک نیم مشخصه از یک گروه، مشخصه نامیده می شود.

تبصره۱-۳-۵ : یک مشخصه از یک گروه G ، یک همریختی از G به توی گروه دایره T است.

$$T = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| = 1\}$$

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۳۴۵ مراجعه کنید .

قضیه ۱-۳-۶ : مجموعه تمام مشخصه‌های G، یک گروه آبلی است با عنصر همانی تابع ثابت یک و اگر χ یک مشخصه از G باشد آنگاه $\chi^{-1} = \overline{\chi}$ است جایی که $\overline{\chi}(s) = \chi(s^{-1})$ به ازای هر $s \in G$.

تعریف ۱-۳-۷ : فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده آبلی باشد. مجموعه‌ی تمام مشخصه‌های پیوسته‌ی G با عمل ضرب تشکیل یک گروه توپولوژیک می دهند، این گروه، گروه مشخصه G نامیده می‌شود و با $\hat{G}$ نمایش داده می‌شود.

$$\hat{G} = \{\chi \mid \ \chi : G \xrightarrow{cont} \mathbb{C}\}$$

توجه :

۱)فرض کنید χ_1 ، χ_2 مشخصه‌هایی از G باشد آنگاه ضرب $\chi_1 \chi_2$ به صورت ضرب نقطه به نقطه تعریف می‌شود یعنی: $(\chi_1 \chi_2)(s) = \chi_1(s)\chi_2(s) \quad , \ \forall s \in G$

۲)فرض کنید $\chi \in \hat{G}$ آنگاه $\|\chi\| = 1$. (زیرا : $\|\chi\|^2 = \chi\overline{\chi} = \chi\chi^{-1} = 1$).

۳)به ازای هر $\chi \in \hat{G}$ و هر $t, s \in G$: $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$.

تعریف۱-۳-۸ : فرض کنید G یک گروه باشد. آنگاه مرکز گروه G که با $Z(G)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$Z(G)=\{x\in G \mid \ \forall y\in G: xy=yx\}$$

توجه : مرکز گروه G یک گروه آبلی است.

لم۱-۳-۹ : فرض کنید B یک زیرجبر بسته از مرکز A باشد و A یک جبر باناخ با همانی e باشد. فرض کنید L یک ایده آل ماگزیمال چپ، راست یا دو طرفه A باشد. آنگاه $L\bigcap B$ یک ایده آل ماگزیمال B است.

برهان : به مرجع شماره [22] صفحه ۲۴ مراجعه کنید .

تعریف۱-۳-۱۰ : فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. یک اندازه هار چپ روی G یک اندازه‌ی رادون غیر صفر λ روی G است به طوری که :

1) $\lambda(\phi)=0$

2) $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(A_i)$ جایی که A_i ها مجزا باشند.

3) $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A_i)$

4) $\lambda(U)\rangle 0$ برای هر مجموعه‌ی باز غیر تهی Uاز G :

5) $\lambda(K)<\infty$ برای هر مجموعه ی فشرده K :

6) $\lambda(aB)=\lambda(B)$ برای هر مجموعه‌ی برل $B\subseteq G$, $a\in G$.

خاصیت ۶ یعنی λ تحت انتقال چپ پایاست.

توجه : $C_c(X)$ نمایش مجموعه تمام توابع پیوسته و مختلط- مقدار مانند f روی X است به طوری که برای یک زیر مجموعه فشرده F از X ، $f(x)=0$ برای همه $x\in F'$

قضیه۱-۳-۱۱ : فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. آنگاه یک تابع I روی $C_c^+(G)$ وجود دارد به طوری که :

۱- $I(f)$ حقیقی و مثبت است برای $f \neq 0$.

۲- $I(f+g)=I(f)+I(g) \quad ; \forall f,g \in C_{00}^{+}(G)$

۳- $I(\alpha f)=\alpha I(f) \quad ; \alpha \geq 0 \, , f \in C_{00}^{+}(G)$

۴- $I(L_s f)=I(f) \quad ; f \in C_{00}^{+}(G) \, , s \in G$ ، که $L_s f$ انتقال چپ f به وسیله s است.

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۱۸۵ مراجعه کنید.

توجه : I توصیف شده در قضیه قبل، انتگرال هار چپ روی $C_{00}^{+}(G)$ نامیده می شود.

نکته : I قابل توسیع به $C_{00}(G)$ است .

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۱۹۳ مراجعه کنید.

قضیه ۱-۳-۱۲ : فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد و فرض کنید I یک انتگرال هار چپ روی $C_{00}(G)$ باشد. برای $f \in C_{00}^{+}(G)$ و $f \neq 0$ و برای $x \in G$ ، فرض کنید $\Delta(x)=\dfrac{I(L_{x^{-1}}f)}{I(f)}$. آنگاه Δ تنها به x وابسته است و به I یا f وابسته نیست. تابع Δ پیوسته و در سرتاسر G مثبت است و در معادله تابعی زیر صدق می کند.

$$\Delta(xy)=\Delta(x)\Delta(y) \quad ; \quad \forall x,y \in G$$

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۱۹۵ مراجعه کنید .

تعریف ۱-۳-۱۳ : تابع Δ تعریف شده در قضیه (۱-۳-۱۲) ، تابع مدولار روی گروه موضعاً فشرده G نامیده می شود.

توجه : اگر $\Delta=1$ روی G باشد آنگاه G تک مدولی نامیده می‌شود.

قضیه۱-۳-۱۴ : هر گروه فشرده، تک مدولی است.

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۱۹۶ مراجعه کنید.

تبصره۱-۳-۱۵ : هر گروه آبلی موضعاً فشرده، تک مدولی است .

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۱۹۶ مراجعه کنید .

قضیه۱-۳-۱۶: فرض کنید f یک تابع اندازه پذیر λ و غیرمنفی روی G باشد. آنگاه :

$\widetilde{f}$ نیز یک تابع اندازه پذیر λ است و الف) $\int_G \widetilde{f} d\lambda = \int_G \frac{1}{\Delta} f\, d\lambda$ ، ب) $\int_G f\, d\lambda = \int_G \frac{1}{\Delta} \widetilde{f}\, d\lambda$ اگر $f \in L^1(G)$ باشد آنگاه $\frac{1}{\Delta} \widetilde{f} \in L^1(G)$ و $\|f\|_1 = \left\|\frac{1}{\Delta} \widetilde{f}\right\|_1$.

جایی که : $\widetilde{f}(s) = f(s^{-1})$ به ازای هر $s \in G$ ، Δ تابع مدولار روی G و λ یک اندازه هار است.

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۲۸۴ مراجعه کنید .

فصل دوم:

ساختار ایده آل های بعضی جبرهای باناخ

۲-۱ تعاریف :

تعریف ۲-۱-۱ : فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. برای توابع اندازه‌پذیر f ، g روی G، ضرب پیچشی که با * نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$(f*g)(s)=\int_{t} f(t)\ g(t^{-1}s)d\lambda(t)$$

جایی که انتگرال موجود باشد و λ یک اندازه هار ثابت و $s,t\in G$.

قضیه ۲-۱-۲ : $f*(g*h)=(f*g)*h$ ، برای توابع اندازه‌پذیر f , g , h روی G.

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۲۶۲ مراجعه کنید .

قضیه ۲-۱-۳ : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده باشد و $L^1(G)$ فضای کلیه‌ی توابع مختلط – مقدار و اندازه پذیر روی G باشد، که نسبت به اندازه‌ی هار λ انتگرال پذیر هستند . $L^1(G)$ با $\|.\|_1$ و ضرب پیچشی یک جبر باناخ است .

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۱۴۸ ، ۲۹۱ و ۲۹۶ مراجعه کنید .

قضیه ۲-۱-۴ : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده باشد. آنگاه $L^\infty(G)$ یعنی فضای کلیه‌ی توابع اندازه پذیر و مختلط – مقدار روی G که تقریباً همه جا کراندارند، با ضرب نقطه به نقطه و $\|.\|_\infty$ یک جبر باناخ است.

برهان : به مرجع شماره [16] صفحه ۱۴۸ مراجعه کنید .

توجه : $L^1(G)^*=L^\infty(G)$: این بدین معنی است که هر $f\in L^\infty(G)$، متناظر وجود تابعکی در $L^1(G)^*$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود: