بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده عمران

استفاده از روش اجزاء محدود طیفی در تحلیل ارتعاشی اجزاء سازه‌ای، تحت اثر نیروهای ضربه و بارهای متحرک

رساله دکتری سازه

نیما عزیزی

استادان راهنما

دکتر محمد مهدی سعادت‌پور

دکتر مجتبی محزون

۱۳۹۱

گاهی در طول زندگی یک انسان، برخورد و آشنایی با برخی انسان‌های دیگر اثر ژرفی در شکل‌گیری بینش و طرز تفکر او ایجاد می‌کند. بی‌تردید آقایان دکتر سعادت‌پور ودکتر محزون این نقش را در زندگی من داشتند و علاوه بر مسائل درسی، درس‌های دیگری نیز از این عزیزان فراگرفتم که تا پایان عمر از این بزرگواران سپاسگزارم. همچنین از آقای دکتر برومند بابت تمامی مطالب و آگاهی‌هایی که از ایشان آموختم تشکر می‌کنم. از دیگر استادان تأثیرگذار در زندگی من، دکتر حسینعلی رحیمی مدرس دانشگاه یزد می‌باشد که آشنایی با ایشان به من آموخت که اصولاً راه یادگیری بی‌انتهاست. سپس در درجه‌ی اول از پدر و مادر عزیزم و بعد از آن از بقیه‌ی افراد خانواده‌ام بابت لطف، حمایت و محبت بی‌منتشان در طول دوره‌ی زندگی و تحصیلم تشکر می‌کنم. از خانم آستانه بابت همراهی، تایپ و ویرایش رساله سپاسگزارم و همچنین از دوستان گرانقدرم در انجمن تعطیل‌شده‌ی کوهنوردی دانشگاه صنعتی اصفهان بابت دوستی صمیمانه‌شان ممنونم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

فهرست مطالب

فصل سوم- ارتعاش واقع در سطح تیر خمیده تحت اثر بار دینامیکی و متحرک:

فصل چهارم- تحلیل صفحات به روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی زمان:

چکیده

تحلیل سازه‌های مختلف تحت اثر بار متحرک و استفاده از نتایج آن در طراحی اجزای مختلف پل‌ها از قبیل عرشه، تیرها و... همواره مورد توجه بوده است و امروزه با ورود وسایل نقلیه‌ی پرسرعت به سیستم حمل و نقل عمومی، اهمیت تحلیل دقیق سازه‌ها تحت اثر بار متحرک چندین برابر گردیده است. علاوه بر اهمیت تحلیل یک سازه تحت اثر بارهای مختلف، موضوع بررسی و پایش سلامتی سازه‌ها به وسیله‌ی تحلیل انتشار موج، به ویژه در اجزای سازه‌ای مربوط به صنایع هوا–فضا بسیار حیاتی می‌باشد. بنابراین در این رساله سعی بر آن شده تا با استفاده از توانمندی‌های روش‌های طیفی در حوزه‌ی فرکانس و زمان، از این روش‌ها در تحلیل سازه‌ها تحت اثر بار متحرک و بررسی انتشار موج استفاده گردد.

اگرچه از مطرح شدن روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی فرکانس بیش از دو دهه می‌گذرد، اما در بسیاری موارد احتیاج به توسعه و بررسی بیشتری دارد و هنوز از این روش در حوزه‌های مختلفی استفاده نشده است. با توجه به این موضوع در این رساله از روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی فرکانس برای تحلیل تیرهای مستقیم تحت اثر بار متحرک و تیرهای خمیده تحت اثر بار متحرک و ضربه‌ای (تحلیل انتشار موج) استفاده شده است.

در فصل آخر رساله، به دلیل وجود مشکلاتی بر سر راه تحلیل صفحات با استفاده از روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی فرکانس، روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی زمان به کار گرفته شده و نتایج به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه‌ی این فصل، روابط مربوط به ارتعاش صفحات ساخته‌شده از مواد هدفمند تابعی با در نظر گرفتن اتساع جانبی صفحه، استخراج و نمودارهای پاشندگی مربوط به مودهای مختلف موج لمب محاسبه گردیده و سپس ماتریس‌های طیفی مورد استفاده در تحلیل این‌گونه صفحات به دست آمده است. در انتهای این فصل، صفحات تحت اثر بار متحرک با استفاده از المان‌های مرتبه‌ی بالای طیفی تحت اثر بار با دامنه و مسیر دلخواه تحلیل گردیده‌اند.

مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش‌های اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی فرکانس و زمان با نتایج تحلیلی و عددی مختلف، بیانگر دقت و کارایی بسیار مناسب این روش‌ها در تحلیل دینامیکی سازه‌ها تحت اثر بار متحرک و تحلیل انتشار موج می‌باشد.

کلمات کلیدی: آنالیز دینامیکی، روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی فرکانس، روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی زمان، انتشار موج، بار ضربه، بار متحرک.

فصل اول
معادله‌ی اساسی انتشار موج و بررسی مبانی روش طیفی در حوزه‌ی فرکانس

۱-۱- مقدمه

برای بررسی انتشار موج ابتدا معادله‌ی اساسی تعادل دینامیکی یا معادله‌ی ناویر[۱] بیان می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل پایستگی تکانه خطی یا معادله‌ی دیفرانسیل تعادل دینامیکی در هر نقطه از محیط پیوسته در غیاب نیروی بدنه، به صورت معادله‌ی (۱-۱) می‌باشد [1]. در به دست آوردن این معادله از قضیه‌ی انتقال[۲] برای بیان ثابت بودن جرم در یک حجم مشخص ماده و همچنین از فرض جابه‌جایی‌های کوچک استفاده شده است.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} i_m = (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x_m}(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}) i_m + \mu \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_k} i_m \qquad (۱-۱)$$

در این رابطه ρ_0، u_m، G، λ و i_m به ترتیب چگالی اولیه‌ی ماده، جابجایی در راستای x_m (در دستگاه دکارتی)، مدول برشی، ضریب لامه ($\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$) و بردار یکه در جهت x_m می‌باشند.

این معادله بیانگر ارتعاش یک سیستم پیوسته در حالت خطی می‌باشد. شکل این معادله به ظاهر پیچیده بوده و با آنچه که به عنوان معادله‌ی موج شناخته می‌شود متفاوت است. برای حل معادلات ارتعاش سیستم پیوسته از جداسازی هلمهولتز[۳] استفاده می‌گردد. بر اساس این روش، جابه‌جایی به صورت گرادیان یک تابع اسکالر و کرل یک تابع برداری فرض می‌شود.

$$\underset{\sim}{u} = \nabla\phi + \nabla\times\psi \qquad (۲-۱)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱-۲) در معادله‌ی (۱-۱) و انجام عملیات ریاضی، معادله‌ی (۱-۳) به دست می‌آید.

$$\nabla(\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2G)\nabla^2\varphi) + \nabla\times(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - G\,\nabla^2\psi) = 0 \qquad (۳-۱)$$

بدیهی است چنانچه ψ و φ در معادلات (۱-۴) و(۱-۵) صدق کند، معادله‌ی (۱-۳) نیز برقرار خواهد بود.

---
[۱] Navier equation
[۲] Transport theorem
[۳] Helmholtz decomposition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi \tag{۴-۱}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \tag{۵-۱}$$

به قسمی که،

$$\alpha = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \beta = \left(\frac{G}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۶-۱}$$

معادله‌ی (۱-۴) معروف به معادله‌ی موج است. باید توجه داشت که چون $\boldsymbol{\psi}$ تابعی برداری است، معادله‌ی (۱-۵) در حقیقت سه معادله‌ی مستقل می‌باشد. هدف اصلی در مسائل ارتعاشات خطی، حل معادلات (۱-۴) و (۱-۵) است و در نهایت با استفاده از معادله‌ی (۱-۲) میدان جابه‌جایی محیط تعیین می‌شود. در بسیاری از مسائل مکانیک جامدات نظیر تار مرتعش، ارتعاش عضو خرپایی یا تیرها و ... معمولاً با استفاده از معادله‌ی تعادل دینامیکی برای یک المان، معادلات حاکم با استفاده از فرض‌های ساده کننده، مستقیماً استخراج می‌شوند.

۱-۲- بررسی برخی روش‌های اولیه‌ی حل مسأله‌ی انتشار موج

در برخی مسائل، مانند تار مرتعش، المانی از یک خرپا یا تیر، می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها که درحل پاره‌ای از معادلات دیفرانسیل کاربرد دارند، معادلاتی به شکل معادله‌ی (۱-۴) را حل کرد [۲، ۳]. در مرجع [۳] با استفاده از همین روش و حل معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر، ماتریس‌های سختی دینامیکی استخراج شده است. برای حل معادله‌ی موج یک بعدی با معادله‌ی،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{۷-۱}$$

روشی به نام روش دالامبر[۱] وجود دارد [۱] که بر اساس تعریف دو متغیر مستقل $\eta = x + \alpha t$ و $\xi = x - \alpha t$ پایه‌گذاری می‌شود. جابه‌جایی، تابعی از این دو متغیر فرض می‌شود سپس با استفاده از قوانین مشتق‌گیری زنجیره‌ای، معادلات در دستگاه جدید به دست می‌آیند و در این دستگاه حل می‌شوند. پاسخ به صورت حاصل جمع دو موج که در دو جهت مثبت و منفی منتشر می‌شوند، ارائه می‌گردد.

روش دیگر به نام روش مشخصه[۲] است. در این روش برای یک موج یک بعدی ثابت می‌شود که در دستگاهی با محور عمودی زمان (t) و افقی مکان (x) خطوطی با زاویه‌ی معین وجود دارند که توابعی از سرعت و کرنش در نقاط مختلف محیط یک بعدی، در روی این خطوط مقدار ثابتی دارند. سپس با استفاده از این قضیه و ارائه‌ی الگوریتم عددی نسبتاً ساده ای، انتشار موج مورد بررسی قرار می‌گیرد.

استفاده از تبدیلات انتگرالی یکی از روش های مرسوم در حل معادلات دیفرانسیل است. برای حل معادله‌ی موج، معمولاً از تبدیل فوریه یا لاپلاس استفاده می‌شود [۱، ۳، ۴]؛ اما معمولاً چون در معکوس این تبدیلات، انتگرال‌گیری از تابع مختلط در صفحه‌ی مختلط صورت می‌گیرد، در مسائل متعددی به صورت عملی نمی‌توان از این

---

[۱] D'Alembert
[۲] Method of characteristics

روش استفاده کرد. از روش‌های معمول عددی دیگر برای تحلیل انتشار موج، روش تفاضل‌های محدود و اجزای محدود می‌باشد.

باید توجه داشت که معادله‌ی تعادل دینامیکی (۱-۱) یک معادله‌ی عمومی ارتعاش است و در مسائل دینامیک سازه دقیقاً به همین معادله پرداخته می‌شود. اما وقتی از لفظ انتشار موج استفاده می‌گردد، در حقیقت هدف بررسی و حل همین معادله است ولی با در نظر گرفتن و تعریف نمودن یک سری مفاهیم خاص و جالب همانند پاشش[۱]، بازتاب، جذب و سرعت گروه موج و ... . برای مثال، با استفاده از یک نرم‌افزار مناسب و کاربرد روش اجزاء محدود برای مدل‌سازی یک صفحه‌ی فولادی می‌توان پاسخ این سیستم را به یک بار ضربه‌ای به دست آورد (با دقت نه چندان مناسب). اما اگر صحبت از انتشار موج در این صفحه شود، تنها مقصود یافتن جابه‌جایی و تنش در هنگام ارتعاش یا موج پایا[۲] نیست؛ بلکه به مفاهیمی همانند سرعت جبهه‌ی موج، جداسازی موج محوری و برشی، زاویه‌ی بازتاب و تفاوت آن در انواع موج، تغییر چگالی در اثر موج محوری و عدم تغییر آن در موج برشی، طول موج و استفاده از اندازه‌ی المان مناسب و ... در موج منتشرشونده[۳] پرداخته می‌شود.

۱-۳- روش طیفی (Spectral Analysis Method) و بررسی منابع

یک سازه یا یک بستر موج[۴] می‌تواند یک تیر یا یک المان ساده‌ی خرپایی، یا بدنه‌ی یک هواپیما باشد. از طرف دیگر با توجه به کاربرد یک سازه، دقت در حل و یا نگرش به یک مسأله‌ی واحد، متفاوت است. انتشار موج تحت اثر یک ضربه در تیر را می‌توان با این دیدگاه بررسی کرد که در اثر این ضربه، یک موج خمشی با معادله‌ی مرتبه‌ی چهار در تیر منتشر می‌شود. دیدگاه دیگر می‌تواند به این صورت باشد که تیر به صورت یک محیط الاستیک که در یک جهت بعد بیشتری نسبت به جهت دیگر دارد و از چند بخش که به هم متصل هستند (بال و جان) تشکیل شده، در اثر ضربه موجی در این محیط منتشر می‌شود. این موج در راستای بعد کوچک‌تر به وجه مقابل تیر می‌رسد و در آنجا منعکس می‌شود و این موج منعکس‌شده با موجی که در راستای بعد بزرگ‌تر است ترکیب گردیده و این روند ادامه پیدا می‌کند. با توجه به این موارد، مسائل مختلفی با شرایط مختلف مرزی یا اولیه، هندسه‌ی کاملاً متفاوت، دقت‌های متفاوت در پاسخ و ... وجود دارد. روش‌های مختلف، هرکدام دارای ضعف‌ها و قوت‌هایی در بررسی این گستره‌ی بزرگ از مسائل می‌باشند. روش‌های ذکر شده در قسمت قبل دارای کاربرد عملی در بازه‌ی محدودی هستند و علاوه بر این از دیدگاه مهندسی یک روش عملی باید قابلیت فرمول‌بندی مناسب و نظم دادن به روند حل و پاسخ ارائه شده تحت یک الگوریتم مناسب را دارا بوده و بتوان با ارائه‌ی یک الگوریتم مشابه مسائل مختلف را حل نمود [۴]. روش به‌کار رفته در تحلیل دینامیکی سازه‌ها در فصل دوم وسوم، استفاده از اجزای محدود طیفی در حوزه‌ی فرکانس است. برای بیان کامل‌تر این مفهوم، ابتدا، یک بررسی اجمالی در ارتباط با مراجع و مقاله‌هایی که مبنای آنها در حل معادلات تعادل دینامیکی، استفاده از توابع شکل خاص یا تبدیلات انتگرالی (به ویژه تبدیل فوریه)

---

[۱] Dispersion
[۲] Standing wave
[۳] Propagating wave
[۴] Wave guide

می‌باشد، صورت می‌گیرد. سپس با توجه به این مطالب، تعریف خاصی که در این پایان‌نامه از روش طیفی در حوزه‌ی فرکانس می‌شود بیان می‌گردد و مزایا و معایب آن ارائه می‌شود.

استفاده از تبدیلات انتگرالی که به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) k(\alpha, x) dx \tag{۱-۸}$$

در حل معادلات دیفرانسیل روش مرسومی است [۵]. با تغییر هسته‌ی این تبدیل $k(\alpha, x)$، تبدیلات لاپلاس ($k(\alpha, x) = e^{-\alpha x}$) و هنکل (با استفاده از تابع بسل) و ... ارائه می‌شود. در مرجع [۵] بخش مجزایی به حل مسائل دینامیکی در دستگاه‌های مختلف با استفاده از تبدیلات انتگرالی اختصاص یافته است. با استفاده از نتیجه روش‌های ارائه شده در مرجع [۵] (به ویژه استفاده از تبدیل هنکل) ، مدیک [۶] نتایج حاصل از آزمایش و تئوری را با هم مقایسه نموده و بحث بسیار جالبی در مورد خطای سرعت جبهه موج که ناشی از تئوری کلاسیک صفحات است انجام داده است. منظور از تئوری کلاسیک صرف‌نظر کردن از تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی تیر در استخراج معادله‌ی دیفرانسیل حرکت است. به عنوان مثال اگر با استفاده از تبدیل فوریه معادله‌ی دیفرانسیل یک تیر کلاسیک (تیر اولر) حل شود، در فرکانس‌های بالا سرعت موج به سمت بینهایت میل پیدا می‌کند؛ به عبارتی در لحظه‌ی اعمال بار دینامیکی ناگهان جبهه‌ی موج تمام محیط را درمی‌نوردد. مدیک نتیجه گرفت این خطا در زمان و فاصله‌ی مناسب از محل اعمال بار که به صورت ضربه در نظر گرفته شده قابل چشم‌پوشی است. زیرا ارتعاشات غیر واقعی با طول موج کوتاه و دامنه‌ی کوچک، به سرعت از نقطه مورد نظرعبور می‌کنند و پاسخ حاصل از ارتعاشات با طول موج بزرگ که پس از ارتعاشات مجازی به نقطه‌ی مورد نظر می‌رسند، قابل اطمینان است (البته به نظر می‌رسد شکل بار مورد استفاده در این مرجع که به صورت پله‌ای است ودامنه‌ی بار در حوزه‌ی فرکانس در این نتیجه‌گیری تأثیر زیادی دارد).

ریچاردز و لونگ [۷] با استفاده از اعمال یک بار هارمونیک به ابتدا و انتهای تیر، معادله‌ی دیفرانسیل ارتعاش تیر را حل نموده و ماتریس سختی دینامیکی تیر را استخراج نمودند. سپس با استفاده از روش‌های مرسوم در سرهم‌بندی کردن المان‌ها، ماتریس سختی دینامیکی کل سیستم را استخراج نموده و فرکانس‌های طبیعی سازه را محاسبه کردند.

پارکز و فلگز [۸] با بررسی حل تفاضل‌های محدود و مقایسه‌ی آن با حل یک المان خرپا و تیر تیموشنکو با استفاده از تبدیل فوریه به مسأله‌ی قفل‌شدگی برشی[۱] و ارتعاشات مجازی[۲] پرداختند و با استفاده از اصلاح مشتق‌گیری عددی، پاسخ را اصلاح کردند.

ولتسوس و همکاران [۹] به بررسی کلی استفاده از تبدیل فوریه‌ی گسسته[۳] (DFT) در مسائل دینامیک سازه پرداختند و با بررسی یک سیستم یک درجه آزاد خطی نکاتی برای بهبود نقاط ضعف این روش ارائه کردند که این نکات در مرجع [۲] نیز وجود دارد.

دویل [۱۰] با اشاره به مزایا و معایب روش تبدیل فوریه‌ی سریع و استفاده از این تبدیل عددی به بررسی انتشار

---

[۱] Shear locking
[۲] Spurious mechanism
[۳] Discrete Fourier Transform (DFT)

موج و بازتاب آن در تیر اولرمی‌پردازد و به خطاهایی که به علت پریودیک بودن تبدیل به وجود می‌آید اشاره می‌کند. در این مرجع به خطاهای ناشی از Time window و Aliasing که در اثر انتخاب Δt بزرگ و پوشش ندادن سهم پاسخ در فرکانس‌های خاص است اشاره می‌شود.

دویل وکمل [۱۱] با نوشتن معادلات تعادل و همسازی برای یک اتصال با طول مشخص که گره اتصال صلب فرض شده است و استفاده از تبدیل فوریه، انتشار موج و بازتاب آن را از گره اتصال بررسی کردند.

دویل [۱۲] مسأله‌ی استفاده از روش طیفی و اجزاء محدود را به طور کامل درهم‌آمیخت و ماتریس سختی طیفی (دینامیکی) را برای المان خرپا ارائه کرد. وی در این مقاله، خرپایی با سطح مقطع متغیر در نظر گرفته و تابع تغییرشکل را با استفاده از توابع بسل به دست آورده است. ماتریس سختی طیفی کل سازه متعاقباً با استفاده از روش‌های مرسوم آنالیز ماتریسی محاسبه شده است.

در مرجع [۱۳] آیزنبرگر با استفاده از فرض حرکت هارمونیک، مشتقات مربوط به زمان در معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای یک المان تیر سه بعدی را حذف کرده و برای حل معادله‌ی حاصل نسبت به مکان از سری توانی استفاده نموده است. سپس ماتریس سختی استخراج گردیده و فرکانس‌های دقیق یک سیستم متشکل از چندین تیر محاسبه شده است.

فرمول‌بندی کاملی از تیر اولر سه بعدی با درنظرگرفتن پیچش و نیروی محوری توسط دویل و فریس [۱۴] انجام شده و ماتریس سختی طیفی وابسته به فرکانس استخراج گردیده است. نتایج حاصل از این روش با روش معمول اجزاء محدود مقایسه شده و علاوه بر فرمول‌بندی پایه روش طیفی که به طور جامع ارائه گردیده، مزیت‌های مهم این روش نیز بیان شده که عبارتند از: زمان محاسبه‌ی کمتر در روش طیفی نسبت به روش اجزاء محدود معمولی در مورد مدل‌های آنالیز شده در این مقاله، عدم وابستگی پاسخ به طول المان و مدل کردن جرم گسترده به صورت دقیق در بازه‌ی فرکانس.

اگر قطعات بستر موج مقاطعی متغیر داشته باشند و این تغییر به نسبت طول المان ملایم باشد، می‌توان از توابع شکل طیفی معمولی استفاده کرد؛ اما اگر این تغییرات زیاد باشند، نیاز به حل دقیق‌تری می‌باشد. در مرجع [۱۵] گوپالاکریشنان و دویل این موضوع را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها با به کار بردن اصل کمینه‌سازی انرژی کل در بازه‌ی فرکانس و استفاده از روش ریتز، با فرض تغییر ارتفاع خطی برای اعضا، توابع شکل را به دست آورده‌اند. حل دقیق معادله‌ی حاکم بر این‌گونه مقاطع به علت پیچیدگی، چندان قابل کاربرد عملی نیست. در مراجعی که در [۱۵] وجود دارند، برخی از این حل‌های تحلیلی برای تیر اولر ارائه شده است. علاوه بر این درجه‌ی آزادی جانبی به المان اضافه شده [۱۶] تا در مقاطع متغیر (مثل تبدیلات در لوله‌ها و اتصالات) اثر پوآسون لحاظ شود. توابع شکل، توابع طیفی دقیق برای تیر با مقطع ثابت فرض شده‌اند و با استفاده از این توابع شکل، ماتریس‌های سختی دینامیکی (تقریبی) و بردار بار به دست می‌آیند. استفاده از این المان‌ها در بازه‌ی فرکانس هرچند که توابع شکل تقریبی دارند، نشان می‌دهد که با تعداد المان بسیار کمتری نسبت به روش اجزاء محدود معمولی در بازه‌ی زمان، جوابی با دقت یکسان به دست می‌آید. اما اگر مسائلی در خود گره، همانند تمرکز تنش در گوشه‌های اتصال با مقطع متغیر و ... مورد نظر باشد، استفاده از روش اجزاء محدود با المان‌بندی مناسب الزامی است. علاوه بر این به علت تقریبی بودن

این روش، پاسخ به طول المان وابسته است و ارتعاش مجازی در بعضی پاسخ‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد المان کاهش می‌یابد.

در مرجع [۱۷] معادلات موج در محیط دو بعدی با استفاده از سری فوریه و تبدیل فوریه‌ی گسسته بر روی مکان وتبدیل فوریه‌ی سریع[۱] (FFT) بر روی زمان، حل شده‌اند [۱۷]. به عبارتی از تبدیل مختصه‌ی y به مختصه‌ی عدد موج در راستای y و تبدیل زمان به فرکانس استفاده شده؛ سپس نتیجه در معادله‌ی دیفرانسیل جایگذاری شده و تابع وابسته به مختصه‌ی x از حل معادله‌ی معمولی دیفرانسیل به‌دست آمده است. با استفاده از تغییرشکل‌های به‌دست آمده، ماتریس سختی طیفی دو بعدی برای المان‌های دو بعدی دو گرهی و تک گرهی نیمه بینهایت محاسبه شده‌اند. منظور از المان دو گرهی، المانی است که در یک راستا دارای طول نامحدود و در راستای دیگر طول محدودی دارد. ضعف این روش همین نامحدود بودن در یک بعد است که برای محیط‌های محدود، این روش با مشکل مواجه می‌شود.

دانیال و همکاران [۱۸] با استفاده از روش طیفی، مسأله‌ی ارتعاش صفحه‌ی نازک را حل کردند. آنها با استفاده از تبدیل فوریه‌ی سریع یک تبدیل روی زمان انجام دادند. سپس با استفاده از سری فوریه تبدیلی را در راستای y بر روی المانی از صفحه که در راستای y طول نامحدودی دارد، اعمال کردند و معادله‌ی دیفرانسیل تعادل دینامیکی صفحه را برای متغیر مستقل x حل نمودند. ضعف این روش همان‌طور که ذکر شد، نامحدود بودن صفحه در راستای y است که در نتیجه شرایط مرزی خاصی در هنگام استفاده از این روش و سری فوریه به سیستم اعمال نمی‌کند. طول دوره‌ی تناوب در راستای y در هنگام استفاده از سری فوریه باید به اندازه‌ای بزرگ انتخاب شود که این فاصله در مدت زمان انتخاب شده برای تحلیل، در پنجره‌ی بعدی اثر نگذارد؛ به این معنی که اگر در مدت زمان تحلیل موج به مرز فاصله‌ی انتخاب شده در راستای y برسد، به علت تناوبی بودن سری فوریه همانند این است که موج در پنجره‌ی مکانی همسایه نیز به مرز رسیده و وارد این پنجره می‌شود (مانند مشکل پنجره‌ی زمانی نامناسب در تبدیل زمان به فرکانس).

لی وهمکاران [۱۹] مسأله‌ی ارتعاش یک صفحه‌ی لوی[۲] راحل کردند. آنها با استفاده از تبدیل فوریه‌ی سریع، مسأله را از حوزه‌ی زمان به فرکانس تبدیل نمودند. سپس در راستای مفصلی توابع شکل را سینوسی فرض کردند؛ در نتیجه در راستای y توابع شکل از حل معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش صفحه به دست می‌آید. یوسیک لی و همکاران در مرجع [۲۰] یک مرور کلی بر روش طیفی با استفاده از تبدیل فوریه انجام دادند و اضافه کردند این روش کماکان در ابتدای مسیر توسعه است و غیر از مسائل مربوط به تیر و خرپا، جای توسعه‌ی بسیار دارد.

استفاده از روش طیفی تنها به حل تیر های ساده محدود نبوده؛ بلکه انتشار موج در تیرهایی با مواد هدفمند تابعی[۳] نیز توسط این روش قابل بررسی است [۲۱]. در ادامه‌ی توسعه‌ی روش طیفی با استفاده از تبدیل فوریه، پالاز و همکاران [۲۲] یک تیر تیموشنکو از جنس مواد مرکب چند لایه‌ای[۴] را با استفاده از توابع شکل استاندارد و مرسوم در

---

[۱] Fast Fourier Transform
[۲] Levy
[۳] Functionally graded beams
[۴] Laminated multilayer composite beam

روش طیفی که توابع مورد استفاده‌ی دویل است، حل نمودند. تنها در معادلات توسعه یافته ضرایب ثابتی وجود دارند که تابع ویژگی‌های لایه‌های مختلف هستند. در این مرجع تأثیر جهت تارها و لایه‌بندی در سرعت و شکل موج مورد بررسی قرار گرفته است.

استفاده از روش طیفی تنها به تبدیل فوریه محدود نیست و از تبدیل هنکل و لاپلاس نیز استفاده شده است. استفاده از تبدیل لاپلاس و تلفیق آن با روش اجزاء محدود توسط ایگاوا و همکاران [۲۳] ارائه شد. در این روش از الگوریتم عددی مناسبی برای محاسبه‌ی وارون این تبدیل استفاده گشته و ماتریس سختی دینامیکی تیر در بازه‌ی s (متغیر مستقل مشابه با زمان) ارائه شده است. دقت این روش در صورت استفاده از یک المان برای مدل کردن تیر، همانند استفاده از تبدیل فوریه است که همگرا با پاسخ حاصل از روش اجزاء محدود معمولی با تعداد المان بسیار بیشتر می‌باشد. علاوه بر این تبدیل لاپلاس مشکل تناوبی بودن تبدیل فوریه را ندارد.

به تدریج که از توسعه‌ی فرمول‌بندی و ارائه‌ی روش طیفی می‌گذرد دامنه‌ی کاربرد این روش گسترش می‌یابد. در برخی مراجع قبلی کاربرد این روش در تیرهای غیر ایزوتروپیک مورد بررسی اجمالی قرار گرفته است. علاوه بر این در مرجع [۲۴] وینود و همکاران از این روش برای یافتن فرکانس‌های طبیعی و تحلیل دینامیکی پره‌ها و تیرهای چرخنده، همانند ملخ هلیکوپتر یا پره‌های موتور جت استفاده کرده‌اند. این خود گویای توانمندی این روش در هنگام نیاز به یافتن پاسخ به محرک در فرکانس‌های بالا است. به علت این‌که در آزمایش‌هایی که در مورد سلامت این تیغه‌ها صورت می‌گیرد یا هنگام برخورد این پره‌ها به جسم خارجی (همانند پرندگان) بار به صورت ضربه به سازه اعمال می‌شود، احتیاج به محاسبه‌ی پاسخ در برابر بار ضربه‌ای وجود دارد. بنابراین روش اجزاء محدود طیفی مناسب می‌باشد؛ زیرا روش‌های مرسوم اجزاء محدود پاسخ مناسبی در فرکانس‌های بالا ارائه نمی‌دهند. وینود و همکاران با اعمال تبدیل فوریه‌ی سریع، معادله‌ی دیفرانسیل ارتعاش پره را در بازه‌ی فرکانس به دست آورده‌اند. در این معادله یک ضریب وابسته به مختصات، مربوط به نیروی محوری حاصل از دوران که تابعی از بازوی دوران است، وجود دارد. برای حذف این ضریب وابسته به متغیر مستقل از دو راه استفاده کردند:۱- استفاده از حداکثر این نیرو و حل معادله‌ی دیفرانسیل برای یافتن توابع شکل با این ضریب ثابت، ۲- استفاده از توابع شکل طیفی معمولی بدون در نظر گرفتن این نیرو. آنها با استفاده از این دو فرض، معادله‌ی ارتعاش حاکم بر سیستم را حل کرده و نتیجه گرفتند که در مسائل تحلیل شده در مقاله روش اول کلاً مناسب‌تر می‌باشد.

لی و هوآ [۲۵] برای تحلیل دینامیکی دو تیر موازی که به وسیله‌ی فنرهای الاستیک به هم متصل هستند از فرض پاسخ هارمونیک استفاده کردند و مشتقات وابسته به زمان را حذف نمودند.

در مرجع [۲۶] چاکرابورتری و همکاران، صفحه‌ی کامپوزیت تحت بار را توسط روش اجزاء محدود طیفی در حوزه‌ی فرکانس مدل کرده‌اند. صفحه در یک بعد دارای طول نامحدود است. علاوه بر کامپوزیت بودن صفحه مسأله‌ی اصلی بحث شده در این مرجع، محاسبه‌ی عدد موج (یا به عبارتی حل یک مسأله‌ی مقدار ویژه) با الگوریتم‌های نوین است. آنها نشان دادند روش طیفی در حوزه‌ی فرکانس به خوبی انتشار موج در یک محیط غیرهمگن را مدل می‌کند. با استفاده از این روش به بررسی محل ترک و آسیب‌دیدگی ورق کامپوزیت پرداختند. باید توجه داشت که در این مقاله نیز در یک بعد ورق نامحدود فرض شده است. با توجه به مراجع ذکر شده،

نامحدود بودن محیط دوبعدی به صورت عمومی در مقاله‌های مختلف که از روش طیفی در حوزه‌ی فرکانس استفاده می‌کنند وجود دارد. دلیل این امر عدم اعمال شرایط مرزی در راستای نامحدود می‌باشد. در این مرجع با استفاده از تبدیل فوریه بر روی مختصات، شکل موج به صورت مجموعه‌ای از جملات سینوسی (یا کسینوسی) بیان گشته و سپس جابه‌جایی در راستای عمود بر طول نامحدود با توجه به معادله‌ی دیفرانسیل و شرایط مرزی به صورت دقیق به‌دست می‌آید. تنها مسأله‌ی مهم همان‌طور که در مرجع [۱۸] ذکر شده، این است که پنجره‌ی مکانی در راستای نامحدود باید به اندازه‌ای بزرگ انتخاب شود که در پایان زمان تحلیل، موج به مرز این پنجره نرسیده باشد؛ درغیراین‌صورت اثر موج پنجره‌ی مکانی همسایه به منطقه‌ی مورد تحلیل وارد شده و جواب دارای خطای قابل توجهی می‌شود.

۱-۴- مقایسه‌ی روش اجزاء محدود طیفی و اجزاء محدود استاندارد و بیان برخی مزایا و معایب هر کدام

با توجه به توسعه‌ی روزافزون روش اجزاء محدود و وجود نرم‌افزارهای قدرتمند در مدل‌سازی با این روش، جای این سؤال باقی است که چرا روش اجزاء محدود استاندارد برای برخی مدل‌سازی‌ها استفاده نشده است. با بررسی چند مرجع و بیان برخی مسائل به این پرسش پاسخ داده می‌شود. بازانت [۲۷] با استفاده از روش اجزاء محدود و استفاده از المان مستطیلی چهار گرهی خطی به بررسی انتشار موج صفحه‌ای پرداخته است. او از ماتریس جرم پیوسته و متمرکز و ماتریس جرم ثابت که ماتریسی میان این دو حالت است، استفاده کرده است. در ماتریس جرم ثابت، بخشی از جرم ابتدا به صورت متمرکز به گره‌ها اختصاص داده شده و بقیه‌ی جرم به صورت گسترده بر روی المان توزیع می‌شود و این جرم گسترده با استفاده از توابع شکل، به درجات آزادی اختصاص می‌یابد. در این مقاله برای حل معادله‌ی وابسته به زمان به صورت عددی، مشتق دوم زمانی به صورت زیر (روش تفاضل مرکزی) بیان می‌شود.

$$\ddot{u}_k \approx \frac{1}{\tau^2}(u_{k,r+1} - 2u_{k,r} + u_{k,r-1}) \qquad (۱-۹)$$

در این رابطه τ، k و r به ترتیب نمایانگر گام زمانی، شماره‌ی گره و شماره‌ی گام زمانی می‌باشند. برای بررسی کامل‌تر از دو اندازه‌ی المان استفاده شده است تا بازتاب[۱] مجازی در محل تغییر اندازه‌ی المان‌ها (محلی که طول المان‌ها در شبکه‌ی اجزاء محدود تغییر می‌کند) ارزیابی شود. نتایج این بررسی بسیار جالب است؛ بر اساس این نتایج، نشان داده شده است که برای نسبت طول موج به طول المان کوچک‌تر از ۱۰ برای حالت جرم متمرکز و نسبت طول موج به طول المان کوچک‌تر از ۶ برای جرم گسترده بازتاب مجازی از مرز تغییر اندازه‌ی دو المان با اهمیت می‌شود. باید توجه داشت که در محیط الاستیک مورد بررسی در این مقاله بازتاب و پاشندگی در واقعیت وجود ندارد و هر نوع بازتاب یا پراش مجازی است. مورد جالب دیگر، حساسیت تحلیل به جهت حرکت موج و طول المان‌ها است. اگر موج از سمت المان کوچک‌تر وارد محیط با المان بزرگ‌تر شود، موج وارد شده به قسمت با المان بزرگ‌تر

[۱] Reflection

دامنه‌اش نیز بزرگ‌تر می‌شود! این موضوع با بقای انرژی در تضاد نیست زیرا در مرز دو نوع المان، بخشی از موج اولیه بازتاب مجازی پیدا می‌کند و شار انرژی موج وارد شده کمتر از شار انرژی موج اولیه است. اگر شار انرژی موج وارد شده و موج منعکس شده با هم جمع شوند باید برابر با شار انرژی (یا همان نرخ انجام کار) موج اولیه در محل تغییر اندازه‌ی المان شود که این موضوع می‌تواند برای صحت تحلیل مورد استفاده قرار گیرد. نتیجه‌ی دیگری که بازانت ارائه کرد این بود که استفاده از فرمول (۱-۹) اثر ناچیزی بر بازتاب مجازی می‌گذارد که این موضوع به شرط برقراری شرط پایداری برای انتخاب گام زمانی صحت دارد. البته باید تـأکید شود که این مطلب در مورد روش صریح[۱] به کار رفته در این مقاله صادق بوده و در مورد روش ضمنی[۲] با توجه به بزرگی گام زمانی، مسأله نیاز به بررسی بیشتری دارد. در این مدل‌ها جرم پیوسته با طول المان بزرگ‌تر در مقایسه با جرم متمرکز و المان با بعد کوچک‌تر، فرکانس‌های طبیعی صحیح‌تری ارائه می‌دهد. اما بالعکس، جرم متمرکز پایداری عددی مناسب‌تری دارد و با انتخاب τ بزرگ‌تر جواب همچنان پایدار می‌ماند. بازانت پیشنهاد داد که تمامی فرکانس‌هایی که باعث ایجاد طول موجی کوچک‌تر از ۱۰ برابر بزرگ‌ترین المان می‌شوند، فیلتر شده و از پاسخ حذف گردند؛ زیرا به پاسخ در این بازه از فرکانس اعتمادی نیست. بنابراین اگر سازه تحت اثر باری باشد که در حوزه‌ی فرکانس گستردگی داشته باشد (همانند بار ضربه یا بار ناشی از عبور یک اتومبیل با سرعت بالا)، به المان‌های بسیار کوچک نیاز است که از بازده تحلیل به روش اجزاء محدود با توابع شکل استاندارد می‌کاهد.

جیانگ و راجرز [۲۸] پاشش و ارتعاش مجازی را در یک شبکه‌بندی یکنواخت یک بعدی با استفاده از المان خرپای معمولی بررسی کردند. در این مقاله با استفاده از شبکه‌بندی یکنواخت و المان‌هایی با طول یکسان، اثر خطای ناشی از تغییر اندازه‌ی المان حذف شده و تنها به بررسی اثر گسسته‌سازی بر روی میزان خطای تحلیل پرداخته شده است. آنها به جای انتگرال‌گیری از معادلات، از آنالیز مودال استفاده کردند تا اثر گام‌های زمانی بر ارتعاش مجازی وارد نشود و بار را به گونه‌ای انتخاب کردند که حل تحلیلی برای آنالیز مودال و بار مودی حاصل وجود داشته باشد. ماتریس جرم مورد استفاده همانند مقاله بازانت جرم متمرکز، جرم پیوسته یا بین این دو می‌باشد. با مشاهده‌ی اختلاف پاسخ با پاسخ تحلیلی، دو دلیل اصلی برای این خطا ارائه شد: ۱- وجود فرکانس قطع[۳] به علت کاهش درجات آزادی از بینهایت به مقدار محدود در مدل گسسته ۲- خطای قابل ملاحظه در محاسبه‌ی فرکانس مودهای بالاتر. هرچند که استفاده از ماتریس جرم پیوسته یا ترکیبی این خطا را کاهش می‌دهد، ولی این خطا هیچ‌گاه در اجزاء محدود عادی صفر نمی‌شود، علاوه بر این مشاهده می‌شود که اشکال مودی به نسبت فرکانس‌ها دارای خطای کمتری هستند. موضوع مهم دیگری در این مقاله وجود دارد که جای دقت دارد. اگر شکل موج منتشرشده در میله‌ای با میرایی صفر که در ابتدای آن بار پله‌ای اعمال شده است، از ابتدا تا جبهه‌ی موج ترسیم شود، دیده می‌شود که این شکل به تعداد المانی که موج از آن عبور کرده بستگی دارد؛ یعنی مثلاً اگر موج از ۱۵ المان ۱۰ سانتی‌متری عبور کرده باشد، شکل موج در این طول ۱۵۰ سانتی‌متری مشابه شکل موج در هنگامی است که از ۱۵ المان ۵ سانتی‌متری عبور کرده، نه ۳۰

[۱] Explicit
[۲] Implicit
[۳] Cut off frequency

المان ۵ سانتی‌متری که برابر ۱۵۰ سانتی‌متر می‌شود. علاوه بر این، شکل ارتعاش مجازی نیز به تعداد المانی که موج از آن عبور کرده بستگی دارد. به طور کلی در این مقاله بیان می‌شود که اجتناب از خطاهای فوق در روش‌های معمول اجزاء محدود با توابع شکل مرسوم ناممکن است.

چروکوری [۲۹] به بررسی انتشار موج صفحه‌ای در محیط دو بعدی پرداخته است. او برای تحلیل عددی مسأله از دو روش اجزاء محدود و تفاضل محدود استفاده کرده و انتشار موج هارمونیک را مورد بررسی قرار داده است. پاسخ استخراجی با حل تحلیلی مقایسه گردیده و نشان داده می‌شود که رفتار موج در تحلیل عددی یک صفحه‌ی همسانگرد با ابعاد بزرگ، وابسته به جهت انتشار است؛ حال آنکه رفتار واقعی موج در این صفحات، وابسته به جهت انتشار نیست.

به علت وجود خطاهای ذکر شده، محققین سعی در ارائه‌ی روشی نو در اجزاء محدود برای بررسی انتشار موج نمودند [۳۰، ۳۱]. در مرجع [۳۲] منابع دیگری در ارتباط با این موضوع وجود دارد. این روش‌ها هرکدام دارای معایبی است که در مرجع [۳۲] به آنها اشاره شده است. علی‌رغم وجود مشکلات ذکر شده در روش اجزاء محدود در بررسی انتشار موج و پاسخ دینامیکی سازه، این روش توانایی بالایی در مدل کردن مسائل غیر خطی هندسی و مادی دارد که این قابلیت در روش اجزاء محدود طیفی استاندارد در حوزه‌ی فرکانس وجود ندارد و این روش به مسائل خطی هندسی و مادی محدود می‌شود. اما روش طیفی با توجه به محاسبه‌ی مناسب توابع شکل، دقت زیادی در تخمین پاسخ دینامیکی سازه‌ها به تحریکاتی با محتوای فرکانسی بالا دارد و با در نظر گرفتن محدودیت‌ها و نکات ضروری در روند کلی حل به وسیله‌ی این روش، ابزاری توانمند در حل مسائل ارتعاش سازه‌ها می‌باشد.

۱-۵- تبدیل پیوسته[۱] و گسسته[۲] فوریه [۴ و ۳۳]

تبدیل پیوسته‌ی فوریه و تبدیل معکوس فوریه به ترتیب چنین تعریف می‌شوند [۴]؛

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad (۱۰-۱)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \qquad (۱۱-۱)$$

تبدیل پیوسته‌ی فوریه بر روی یک تابع تحلیلی که در کل دامنه‌ی $(-\infty,+\infty)$ تعریف شده باشد قابل کاربرد است. اما در عمل بسیاری از توابع ورودی به صورت آزمایشگاهی و گسسته وجود دارند و تنها در بازه‌ی زمانی محدودی تعریف می‌شوند. علاوه بر این لزوماً همواره حل تحلیلی برای انتگرال‌های روابط (۱-۱۰) و(۱-۱۱) وجود ندارد. در این مواقع استفاده از تبدیل فوریه‌ی گسسته مناسب می‌باشد. تبدیل گسسته‌ی فوریه و معکوس آن به شکل زیر تعریف می‌شوند؛

$$\hat{f}(\omega_n)=\Delta t\sum_{m=0}^{N-1} f_m\, e^{-\mathrm{i}\omega_n t_m}=\Delta t\sum_{m=0}^{N-1} f_m\, e^{\frac{-\mathrm{i}2\pi n m}{N}} \qquad (۱۲-۱)$$

---

[۱] Continuous Fourier transfom

[۲] Discrete Fourier transform

$$f(t_m)=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{f}_n\, e^{\mathrm{i}\omega_n t_m}=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{f}_n\, e^{\frac{\mathrm{i}2\pi n m}{N}} \tag{۱۳-۱}$$

که در این روابط

$$T=N\,\Delta t$$
$$\omega_n=\frac{2n\pi}{T} \tag{۱۴-۱}$$
$$t_m=m\,\Delta t$$

N تعداد کل داده‌ها، T دوره‌ی تناوب و Δt نمو زمانی است. باید توجه داشت که هرچند تعداد کل داده‌ها N است، بیشترین مقدار شمارنده $N-1$ است؛ زیرا شمارنده‌ها از صفر شروع می‌شوند. برای استفاده از این تبدیل فرض می‌شود تابع متناوب است. سپس با اعمال تبدیل گسسته‌ی فوریه تابع در حوزه‌ی فرکانس محاسبه می‌شود. استفاده از تبدیل فوریه‌ی سریع پس از ارائه‌ی الگوریتم تبدیل فوریه‌ی سریع در سال ۱۹۵۶ توسط کولی[۱] و تاکی[۲] گسترش زیادی پیدا کرد. پاسخ‌های حاصل از تبدیل فوریه‌ی گسسته و سریع یکسان می‌باشد. تنها تفاوت این دو روش، در تعداد محاسبات و در نتیجه، زمان محاسبات است. در الگوریتم تبدیل فوریه‌ی سریع از خاصیت یکسان بودن توابع نمایی در مقادیر مشخص از m و n در روابط (۱-۱۲) و(۱-۱۳) استفاده می‌شود. در عمل، استفاده از تبدیل فوریه‌ی سریع به جای تبدیل فوریه‌ی گسسته تعداد عملیات ریاضی (جمع و ضرب) را از مرتبه‌ی $2N^2$ به مرتبه‌ی $\frac{3}{2}N\log_2 N$ کاهش می‌دهد [۴]. با توجه به نوع الگوریتم تبدیل فوریه‌ی سریع برای بهینه شدن محاسبات باید تعداد نقاط توانی از ۲ باشد؛ هرچند که در بسیاری از نرم‌افزارها این مطلب اجباری نیست و تنها باعث افزایش بازدهی الگوریتم است.

نکته‌ای که توجه به آن در برنامه‌نویسی ضرورت دارد، این است که با توجه به روابط (۱-۱۰) قسمت حقیقی $\hat{f}(\omega)$ به صورت تابعی زوج و قسمت موهومی به صورت تابعی فرد است. فرکانس شماره‌ی $N/2$ ($N/2+1$ امین مقدار) را فرکانس نایکوییست[۳] می‌گویند. حال عدد $0<n<N/2$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه‌ی (۱-۱۲) داریم؛

$$\begin{aligned}\hat{f}(N/2+n)&=\Delta t\sum_{m=0}^{N-1}f_m\, e^{\frac{-\mathrm{i}2\pi m(N/2+n)}{N}}=\Delta t\sum_{m=0}^{N-1}f_m\, e^{-\mathrm{i}(m\pi+2\pi m n/N)}=\\&\Delta t\sum_{m=0}^{N-1}f_m\left(\cos(m\pi+2\pi m\, n/N)-\mathrm{i}\sin(m\pi+2\pi m\, n/N)\right)=\\&\Delta t\sum_{m=0}^{N-1}f_m\left(\pm\cos(2\pi m\, n/N)\mp\mathrm{i}\sin(2\pi m\, n/N)\right)\end{aligned} \tag{۱۵-۱}$$

و

---

[۱] Cooley
[۲] Tukey
[۳] Nyquist frequency