دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی‌کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

مسائل طیفی معکوس برای عملگر استورم-لیوویل روی یک گراف d -ستاره و داده‌های طیفی درونی

استاد راهنما

دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام

استاد مشاور

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

معصومه شیری‌آذر

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امید آن دارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز از زحمات خانواده‌ام که در طول دوران تحصیل مشوق و حامی من بودند تشکر و سپاس‌گذاری می‌کنم.
همچنین وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **علی‌اصغر جدیری اکبرفام** صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر **حسین خیری** که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند کمال تشکر را دارم.
همچنین از جناب آقای دکتر **محمد جهانشاهی** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

معصومه شیری آذر
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: شیری‌آذر   نام: معصومه
عنوان: مسائل طیفی معکوس برای عملگر استورم- لیوویل روی یک گراف d -ستاره و داده‌های طیفی درونی
استاد راهنما : دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام استاد مشاور : دکتر حسین خیری
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۶۹
کلید واژه‌ها: عملگر اشتورم- لیوویل، مسأله‌ی طیفی وارون، گراف ستاره‌ای شکل، دسته دیفرانسیل، مسأله‌ی وارون، مقدار ویژه، داده‌های طیفی درونی

چکیده

در این پایان‌نامه، مسائل طیفی وارون برای عملگر اشتورم- لیوویل روی گراف d-ستاره و تعیین دسته دیفرانسیل از داده‌های طیفی درونی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.
ابتدا تعیین دسته دیفرانسیل از داده‌های طیفی درونی بررسی می‌شود.
ما اثبات می‌کنیم که :
با معلوم بودن $p(x)$ یا $q(x)$ روی بازه‌ی $[0,\pi]$ می‌توانیم با داشتن مجموعه‌ی مقادیر توابع ویژه در نقطه‌ی میانی $[0,\pi]$ به علاوه یک طیف یا برخی اطلاعات از توابع ویژه در برخی نقاط داخلی $b \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ و قسمت‌هایی از دو طیف تابع مجهول و همه‌ی پارامترهای شرایط مرزی را روی بازه‌ی $[0,\pi]$ تعیین کرد.
در نهایت مسائل وارون طیفی برای عملگر دیفرانسیل اشتورم- لیوویل روی گراف d-ستاره با شرایط انطباق (جورسازی) استاندارد در رأس داخلی برای $d \geq 2$ بررسی می‌شود.
همچنین اثبات می‌شود که:

اگر تابع پتانسیل $q_j(x)$ روی یال ثابت e_j، در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \pi]$ معین باشد، می‌توانیم با استفاده از طیف تابع $q_j(x)$ را روی بازه‌ی $[۰, \pi]$ تعیین کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

آنالیز طیف معکوس یکی از تحقیقات مهم در فیزیک- ریاضی است. مسائل معکوس آنالیز طیفی شامل دوباره‌سازی یک عملگر خطی با استفاده از مشخصه‌های طیفی است. برای مسأله‌ی معکوس اشتورم- لیوویل چنین مشخصه‌هایی عبارتند از: دو طیف برای شرایط مرزی متفاوت، یک طیف و ثابت‌های نرمال‌ساز، تابع‌های طیفی، نقاط گره (صفرهای توابع ویژه) به عنوان داده‌های طیفی معلوم، داده‌های پراکندگی یا تابع وایلی است. چنین مسائلی نقش مهمی در ریاضیات ایفا می‌کنند و دارای کاربرد فراوان در علوم طبیعی است. مسائل معکوس برای یک رده‌ی خاص از عملگرهای دیفرانسیل معمولی مورد مطالعه قرار گرفته است. بخصوص در مسائل مقدار ویژه‌ی معکوس فرکانس‌های یک سیستم ارتعاشی را اندازه‌گیری می‌کنند و تلاش می‌کنند بعضی خواص فیزیکی سیستم را حدس بزنند.

نتایج مهم اولیه در این زمینه که انگیزه‌ی لازم برای توسعه‌ی بعدی نظریه‌ی مسأله‌ی وارون را ایجاد کرد در [۲] به دست آمده است.

مسأله‌ی معکوس برای داده‌های طیفی درونی عملگر دیفرانسیل در دوباره‌سازی این عملگر بوسیله‌ی برخی مقادیر ویژه و اطلاعاتی در مورد توابع ویژه که در برخی نقاط داخلی بازه مطرح شده است، به کار برده می‌شود. مسائل مشابه برای عملگر اشتورم- لیوویل در [۳۸] و [۴۸] مورد مطالعه قرار گرفته است.

گراف کوانتوم یک عملگر دیفرانسیل خودالحاق روی گراف متری است، یعنی دامنه‌ی عملگر فضای توابع است، هر عضو فضا در شرایط مشخصی در رئوس صدق می‌کند. خواص پراکندگی و طیفی عملگر شرودینگر در چنین ساختاری توجه زیادی را طی سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. ادبیات وسیعی وجود دارد که به مسائل طیفی وارون برای عملگرهای دیفرانسیل معمولی روی بازه‌ی متناهی اختصاص داده شده است، ما برای مثال به [۴، ۷، ۱۳، ۳۳] اشاره می‌کنیم.

اخیراً مسائل طیفی از گراف‌های کوانتوم باعث گسترش سریع حوزه‌هایی در ریاضی و فیزیک- ریاضی شده است و خواص طیفی گراف‌های کوانتوم و مسائل وارون مختلف در [۳، ۸، ۳۹] مورد مطالعه قرار گرفته است.

تا آنجا که می‌دانیم مسأله‌ی معکوس برای داده‌های طیفی درونی برای دسته دیفرانسیل درجه دوم یا عملگر شرودینگر تا به‌حال در نظر گرفته نشده است، برای همین در فصل سوم این پایان‌نامه که روی مقاله‌ی

یانگ و جی یو [۵۰] کار شده است، دو قضیه‌ی منحصربفرد از مقادیر ویژه و اطلاعاتی از توابع ویژه در بعضی نقاط درونی در بازه‌ی $[\circ, \pi]$ ارائه می‌شود. نتایج به دست آمده نو و تعمیم طبیعی معلومات شناخته شده برای عملگرهای اشتورم- لیوویل معروف کلاسیک هستند که در [۳۸] برای حالت خاص $p(x) \equiv \circ$ و پارامترهای ثابت h و H در معادله‌ی شرودینگر مورد مطالعه قرار گرفته است.

در فصل چهارم با تمرکز روی مقاله‌ی بعدی یانگ [۴۹]، حل مسائل طیفی وارون برای عملگر دیفرانسیل اشتورم- لیوویل روی گراف d-ستاره با شرایط انطباق (جورسازی) استاندارد[۱] در رأس داخلی بررسی می‌شود. ما مسائل طیفی وارون را برای دوباره‌سازی تابع پتانسیل روی یال ثابت e_j با استفاده از قسمتی از طیف به دست آمده به طوری که تابع پتانسیل روی سایر یال‌های e_k، برای $k = \overline{۱, d} \setminus \{j\}$ از قبل معلوم است را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

[۱] Standard matching conditions

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به تعریف مفاهیم اولیه که طی فصل‌های بعدی برای تعیین مسأله‌ی عکس اشتورم-لیوویل با داده‌های داخلی و روی گراف d-ستاره مورد نیاز است، می‌پردازیم.

۱.۱ آنالیز مختلط

۱.۱.۱ توابع تحلیلی

فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی باز در صفحه‌ی مختلط باشد.

تعریف ۱.۱.۱. گویند تابع مختلط $f(z)$ که در Ω تعریف شده است، در یک نقطه مانند $z_\circ$ مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود و متناهی باشد:

$$\lim_{z\to z_\circ}\frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}.$$

حاصل این حد را با $f'(z_\circ)$ نشان داده، آن را مشتق $f(z)$ در $z_\circ$ گویند.

تعریف ۲.۱.۱. تابع مختلط $f(z)$ را در Ω تحلیلی گویند هرگاه در هر نقطه‌ی Ω مشتق‌پذیر باشد.

مجموعه‌ی همه‌ی توابعی را که در Ω تحلیلی است، با $\mathcal{H}(\Omega)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. تابع مختلطی را که در تمام صفحه‌ی مختلط تحلیلی باشد، تابع تام گویند.

مجموعه‌ی همه‌ی توابع تام را با $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ نشان می‌دهند.
اگر تابع $f(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی $z_\circ$ تحلیلی باشد، آنگاه $z_\circ$ را یک نقطه‌ی تکین یا تکینی تابع می‌نامند. نقطه‌ی تکین $z_\circ$ را تنها گویند اگر علاوه بر این، همسایگی‌ای از $z_\circ$ موجود باشد که f در سراسر آن بجز در خود نقطه، تحلیلی باشد.
اگر تابع $f(z)$ در یک همسایگی محذوف $z_\circ$ تحلیلی باشد و عدد صحیح مثبت m را بتوان یافت به طوری که

$$\lim_{z\longrightarrow z_\circ}(z-z_\circ)^m f(z)=A\neq \circ,\infty$$

در این صورت نقطه‌ی تکین تنهای $z_\circ$ را قطب مرتبه‌ی m می‌نامند یا به عبارت دیگر، تابع f در $z_\circ$ دارای قطب مرتبه‌ی m است. قطب مرتبه‌ی $m=۱$ را ساده گویند.

قضیه ۴.۱.۱ (قضیه‌ی لیوویل). [۱] *اگر f تابع تام و در صفحه‌ی مختلط کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ ثابت است.*

[1] Liouville's theorem

برهان. به [۹] رجوع شود. □

قضیه ۵.۱.۱ (قضیه‌ی روشه). [۲] *فرض کنید f و g توابعی باشند که در درون و روی مرز ساده و بسته‌ی C که به طور مثبت جهت‌دار شده است، تحلیلی‌اند. اگر در هر نقطه‌ی z روی C، $|f(z)| > |g(z)|$، آنگاه تعداد صفرهای توابع $f(z)$ و $f(z) + g(z)$، با شمردن چندگانگی‌های آنها، باهم برابرند.*

برهان. به [۹] رجوع شود. □

برای تابع تام $f(z)$ تعریف می‌کنیم:

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

تعریف ۶.۱.۱. گوییم تابع تام $f(z)$ از مرتبه‌ی ρ است اگر

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log(r)} = \rho, \qquad (0 \le \rho \le \infty).$$

تعریف ۷.۱.۱. تابع تام $f(z)$ از مرتبه‌ی مثبت ρ را از نوع τ می‌نامند اگر

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-\rho} \log M_f(r) = \tau, \quad 0 \le \tau \le \infty.$$

اگر $\tau = 0$ گویند تابع تام $f(z)$ از نوع مینیمال است، اگر $0 < \tau < \infty$، آن را از نوع نرمال می‌گویند و اگر $\tau = \infty$، از نوع ماکسیمال گفته می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. تابع تام f را از رشد (ρ, τ) گویند، اگر از مرتبه‌ی حداکثر ρ و از نوع حداکثر τ باشد.

تعریف ۹.۱.۱. تابع تام حداکثر از مرتبه‌ی اول و نوع نرمال τ را تابع تام از نوع نمایی τ می‌نامند. توابع از مرتبه‌ی کمتر از یک یا از مرتبه‌ی یک و نوع مینیمال از نوع نمایی صفر نامیده می‌شود.

فضای همه‌ی توابع تام حداکثر از نوع نمایی τ را که به فضای $L_p(-\infty, \infty)$ تعلق دارند با L_p^τ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱. تابع تام $f(z)$ از نوع نمایی $\tau > 0$ را از نوع سینوسی گویند هر گاه به ازای اعدادی ثابت مانند m، M و H (که به $f(z)$ بستگی دارند)، داشته باشیم:

$$0 < m \le f(z)e^{-\tau|\Im z|} \le M < \infty \qquad (\Im z > H)$$

[۲] Rouché's theorem

لم ۱۱.۱.۱ (لم ریمان- لبگ). [۳] *فرض کنیم $f(t)$ تابع انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,b]$ باشد، در این صورت:*

$$
\begin{aligned}
&۱)\ \lim_{\lambda\longrightarrow\pm\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = ۰\\
&۲)\ \lim_{\lambda\longrightarrow\pm\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = ۰\\
&۳)\ \lim_{\lambda\longrightarrow\pm\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = ۰
\end{aligned}
$$

۲.۱ فضاهای برداری

۱.۲.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) باشد. یک نرم بر فضای برداری X، تابعی با مقدار حقیقی بر X است که مقدارش را در $x \in X$ با $\|x\|$ نشان می‌دهند به طوری که به ازای هر $x,y \in X$ و اسکالر α، داشته باشیم:

۱) $\|x\| \geq ۰$،

۲) $\|x\| = ۰ \Longleftrightarrow x = ۰$،

۳) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

۴) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

یک نرم بر فضای برداری X، متری مانند d بر X تعریف می‌کند که با

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad (x,y \in X)$$

داده می‌شود و آن را متر القاء شده بوسیله‌ی نرم می‌نامند. یک فضای نرمدار X، فضایی برداری است که بر آن یک نرم تعریف شده است. اگر فضای نرمدار X با متری که بوسیله‌ی نرم تعریف می‌شود کامل باشد، آن را فضای باناخ می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X فضایی برداری باشد. یک ضرب داخلی بر X نگاشتی از $X \times X$ به‌توی میدان اسکالر K از X است، یعنی، به هر جفت از بردارهای x و y یک اسکالر وابسته است که به صورت $\langle x,y\rangle$ نوشته می‌شود و آن را ضرب داخلی x و y می‌نامند، به طوری که به ازای تمام بردارهای x، y، z و اسکالرهای α، داشته باشیم:

[۳] Riemann- Lebesgue Lemma

۱. $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$،
۲. $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$،
۳. $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$،
۴. $x=0 \Longleftrightarrow \langle x,x\rangle=0$ و $\langle x,x\rangle\geq 0$.

تعریف ۳.۲.۱ (فضای هیلبرت). [۴] یک ضرب داخلی بر X نرمی بر X تعریف می‌کند که با

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

داده می‌شود و یک متر بر X با

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$$

داده می‌شود. یک فضای ضرب داخلی، فضایی برداری مانند X با یک ضرب داخلی است که بر X تعریف شده است.
یک فضای هیلبرت، یک فضای ضرب داخلی کامل است (یعنی با متری که بوسیله‌ی ضرب داخلی تعریف می‌شود، کامل می‌باشد).

بدیهی است که فضاهای ضرب داخلی فضاهایی نرمدار می‌باشند و فضاهای هیلبرت، فضاهای باناخ هستند.

مثال ۴.۲.۱. فضای l_2 متشکل از دنباله‌های $x=(x_i)=(x_1,x_2,\ldots)$ از اعداد مختلط به طوری که $\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{x_i}$ متناهی باشد و ضرب داخلی بین دو عضو $x=(x_i)$ و $y=(y_i)$ به‌صورت $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\overline{y_j}$ تعریف می‌شود یک فضای هیلبرت است.

مثال ۵.۲.۱. فضای $L_2[a,b]$ متشکل از توابع مختلط اندازه‌پذیر لبگ بر $[a,b]$ که ضرب داخلی بین دو تابع مختلط f و g به‌صورت $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$ تعریف می‌شود، یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۶.۲.۱ (حاصل‌ضرب داخلی توابع). فرض کنید توابع f و g بر بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشند و تابع r بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مثبت باشد، حاصل‌ضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن r را توسط انتگرال

$$\int_a^b r(x)f(x)\overline{g}(x)dx$$

تعریف کرده و با نماد $\langle f,g\rangle$ مشخص می‌نمایند.

[۴] Hilbert space

تعریف ۷.۲.۱. یک عضو x از یک فضای ضرب داخلی X بر یک عضو $y \in X$ متعامد گویند هرگاه
$$\langle x, y\rangle = ۰.$$
همچنین می‌گویند که x و y متعامدند و می‌نویسند $x \perp y$.

تعریف ۸.۲.۱. فضای اندازه‌ی (X, M, μ) را در نظر می‌گیریم. اگر f تابع اندازه‌پذیر روی X و $۰ < p < \infty$، تعریف می‌کنیم:
$$\| f \|_p = \left[\int | f |^p \ d\mu\right]^{\frac{۱}{p}}$$
و فضای $L^p(X, M, \mu)$ را تمام توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم که f اندازه‌پذیر و f در
$$\| f \|_p < \infty$$
صدق کند.

۲.۲.۱ فضای سوبولف

تعریف ۹.۲.۱. گیریم Ω دامنه‌ی کراندار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^d$ باشد. بستار Ω را با $\overline{\Omega}$ و مرز آن را با $\Gamma = \partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ نشان می‌دهند. علاوه بر آن خارج دامنه را با $\Omega_e := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ نمایش می‌دهند.

چندتایی $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n)$ که یک n تایی از اعداد صحیح نامنفی است در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم:
$$|\alpha| = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i.$$
هر چندتایی α، عملگر مشتق جزئی از مرتبه‌ی $|\alpha|$ را تعیین می‌کند. یعنی:
$$D^\alpha f = (\frac{\partial}{\partial x_۱})^{\alpha_۱}(\frac{\partial}{\partial x_۲})^{\alpha_۲}...(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} f.$$

تعریف ۱۰.۲.۱ (فضای هولدر). گیریم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ مجموعه‌ای باز و $۰ < \gamma \leq ۱$ باشند. تابع‌های پیوسته k- لیپ‌شیتس، تابع‌هایی مثل $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ هستند که در تعریف زیر صدق می‌کنند:
$$\forall x, y \in \Omega, \quad \exists k \in \mathbb{R}_+ : \quad |f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|$$
فرض کنیم تابع f در شرط
$$\forall x, y \in \Omega, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|^\gamma$$
صدق می‌کند، چنین تابعی را پیوسته هولدر با نمای $\gamma \in \mathbb{R}_+$ می‌نامند.

تعریف ۱۱.۲.۱. فضای خطی از توابع پیوسته روی Ω که مشتقات جزئی

$$D^\alpha f, \quad |\alpha| \leq m$$

موجود و پیوسته هستند را با

$$C^m(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}_0$$

نمایش می‌دهند.

فضای $C^m(\Omega)$ نسبت به نرم

$$\|f\|_{C^m(\Omega)} := \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|$$

فضای باناخ است.

فضای خطی از توابع در $C^m(\Omega)$ که مشتقات جزئی مرتبه mام آن پیوسته هولدر هستند را با

$$C^{m,\alpha}(\Omega), \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad 0 < \alpha < 1$$

نمایش می‌دهند یعنی به ازای $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ با $|\beta| = m$، ثابت‌های $\Gamma_\beta > 0$ وجود دارند به طوری که به ازای $x, y \in \Omega$ رابطه‌ی:

$$|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)| \leq \Gamma_\beta |x-y|^\alpha.$$

برقرار است.

تعریف ۱۲.۲.۱. محمل تابع f، بستار مجموعه‌ای است که تابع f در آن صفر نمی‌شود. یعنی:

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

توجه می‌کنیم که $C^{m,\alpha}(\Omega)$ نسبت به نرم

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\Omega)} := \|f\|_{C^m(\Omega)} + \max_{|\beta|=m} \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

فضای باناخ است.

به علاوه $C_0^m(\Omega)$ و $C_0^{m,\alpha}(\Omega)$ زیر فضاهایی از توابع با محمل فشرده در Ω هستند.

در نهایت، $C^\infty(\Omega)$ مجموعه‌ای از توابع با مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه است و $C_0^\infty(\Omega)$ مجموعه‌ای از توابع $C^\infty(\Omega)$ که دارای محمل فشرده در Ω هستند را نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۳.۲.۱ (مشتق ضعیف). [5] گیریم $f \in L^1(\Omega)$ و $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. گویند تابع f دارای مشتق ضعیف $D_w^\alpha f$ است، اگر تابع $g \in L^1(\Omega)$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

[5] Weak derivative

قرار می‌دهیم:

$$D_w^\alpha f := g.$$

تعریف ۱۴.۲.۱ (فضای سوبولف). $W^{m,p}(\Omega), \quad p \in [1, \infty]$ [6]
فضای خطی $W^{m,p}(\Omega)$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود فضای سوبولف گفته می‌شود:

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D_w^\alpha f \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\}.$$

فضای سوبولف نسبت به نرم:

$$\|f\|_{m,p,\Omega} := (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D_w^\alpha f\|_{p,\Omega}^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|f\|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|\leq m} \|D_w^\alpha f\|_{\infty,\Omega}.$$

فضای باناخ است.
توجه می‌کنیم که $W^{m,2}(\Omega)$ نسبت به ضرب داخلی

$$\langle f, g\rangle_{m,2,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D_w^\alpha f D_w^\alpha g \, dx,$$

یک فضای هیلبرت است.

۳.۱ آنالیز مجانبی

تعریف ۱.۳.۱ (نمادهای O و o). اگر دو تابع f و g با متغیرهای مختلط با دامنه‌ی مشترک D باشند در این صورت گویند $f(z) = O(g(z))$ هر گاه عدد Kی مثبت و $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\forall z : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f| < K|g|$$

و یا

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = K.$$

گویند $f(z) = o(g(z))$ هر گاه

$$\forall z \forall \epsilon \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f| < \epsilon|g|$$

و یا

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

[6] Sobolev space

و همچنین f هم‌ارز g است هر گاه:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

تعریف ۲.۳.۱ (دنباله‌ی مجانبی). دنباله‌ی متناهی یا نامتناهی از توابع $\{\varphi_n(z)\}$ را در نظر بگیرید، این دنباله را دنباله‌ی مجانبی گویند هر گاه:

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \longrightarrow z_0$$

به عبارت دیگر:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = 0.$$

تذکر ۳.۳.۱. تعریف فوق وقتی برقرار است که هیچ صفری از $\varphi_n(z)$ در همسایگی از z_0 قرار نداشته باشد.

تعریف ۴.۳.۱. اگر دنباله‌ی $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی مجانبی از توابع باشد گویند $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$ (a_nها ثابت هستند) یک بسط مجانبی یا تقریب مجانبی از $f(z)$ است هر گاه برای هر N داشته باشیم:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(z) + o(\varphi_N(z)), \quad z \longrightarrow z_0$$

همچنین می‌توان رابطه‌ی بالا را به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n\varphi_n(z) + O(\varphi_N(z)), \quad z \longrightarrow z_0.$$

۱.۳.۱ یادآوری برخی نمادها

در این بخش نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:
یک بازه‌ی باز را با (a, b)، $-\infty \le a < b \le \infty$ نشان می‌دهیم. $[a, b]$ بازه‌ی بسته را نشان می‌دهد که شامل نقطه‌ی انتهایی چپ a و نقطه‌ی انتهایی b است بدون توجه به اینکه این نقاط متناهی یا نامتناهی باشند. به‌ازای هر بازه‌ی J از خط حقیقی که باز، بسته، نیم‌باز، کراندار یا بیکران است، فضای خطی از توابع با مقدار مختلط اندازه‌پذیر لبگ را که بر J تعریف شده‌اند به طوری که

$$\int_J |y(t)|\, dt < \infty.$$

با $L(J, \mathbb{C})$ نشان می‌دهند. نماد $L_{loc}(J, \mathbb{C})$ فضای خطی از توابع y را نشان می‌دهد به طوری که به ازای هر بازه‌ی فشرده‌ی $J \supseteq [\alpha, \beta]$ داشته باشیم $y \in L([\alpha, \beta], \mathbb{C})$. اگر $J = [a, b]$ و هر دوی a

و b متناهی باشند، آنگاه $L_{loc}(J,\mathbb{C}) = L(J,\mathbb{C})$. همچنین مجموعه‌ی توابع با مقدار مختلط y که بر هر بازه‌ی فشرده‌ی $J \supseteq [\alpha,\beta]$ مطلقاً پیوسته‌اند را با $AC_{loc}(J)$ نشان می‌دهیم. نمادهای $L(J,\mathbb{R})$ و $L_{loc}(J,\mathbb{R})$ به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.