

دانشگاه پیام نور

واحد تهران مرکز

دانشکده : علوم پایه و کشاورزی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

برآورد بیزی پارامترهای مدل **ARFIMA**

استاد راهنما: دکتر مسعود یار محمدی

استاد مشاور: دکتر پرویز نصیری

محقق:

راضیه قاسمی

زمستان 1390

تقدیم به

حامیان بی ادعای زندگی پدر و مادر عزیزم و تمام کسانی که به من علم آموختند.

سپاس گذاری:

صمیمانه از جناب آقای دکتر مسعود یار محمدی استاد ارجمندم تقدیر و تشکر می کنم که در راستای این پایان نامه از هیچ کمکی دریغ نفرمودند و در تمام مراحل با راهنمایی های ارزشمند و دلسوزانه شان مرا حمایت نمودند.

همچنین از جناب آقای دکتر پرویز نصیری که با کمک ها و راهنمایی هایشان مرا در انجام این پروژه یاری کردند کمال تشکر و قدردانی را به جای می آورم.

همچنین از تمام دوستانی که مرا کمک کردند تشکر می کنم .

چکیده:

سریهای زمانی با حافظه بلند در علوم مختلف کاربردهای فراوانی دارند. در اینگونه سریهای زمانی، تابع خود همبستگی دوامی نشان میدهد که نه با فرآیندهای $ARIMA(p,1,q)$ و نه با $ARIMA(p,0,q)$ سازگار است. به عبارت دیگر ضرایب خود همبستگی، مانایی سری را تایید نکرده و پس از یکبار تفاضل گیری هم به نظر می رسد که بیش تفاضل گیری شده باشند. سریهای زمانی $ARFIMA$ (در حالی که فرآیندهای با حافظه بلند باشند) با تفاضل گیری کسری میتوان مانا کرد. به همین دلیل این سریها را اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده کسری¹ $ARFIMA$ یا $ARIMA$ با تفاضل گیری کسری می نامند. در این پایان نامه ضمن معرفی سریهای زمانی $ARFIMA$ ، مطالعات شبیه سازی را روی این مدلها انجام می دهیم. بر اساس مطالعاتی که قبلا صورت گرفته است مدل $ARFIMA$ از قدرت پیش بینی کنندگی در مقایسه با مدلهای $ARIMA$ برخوردار است. مثالهای متعددی از فرآیندهای با حافظه بلند در طبیعت وجود دارند. هاسکینگ (1984)، علاوه بر تحقیق روی داده های نیل، وجود حافظه بلند را در داده های میانگین درجه حرارت سالانه انگلستان از سال 1659 تا 1976 نیز تشخیص داده است. یکی از دلایل استفاده روز افزون از آمار بیزی در مقابل آمار کلاسیک، بالا بودن دقت محاسبات در آمار بیزی است، و این به دلیل سهم بودن اطلاعات و عقاید پیشین کاربرد در استنباط آماری می باشد. در این پایان نامه کاربردهای اسلوب شناسی بیزی را با تحلیل داده های سریهای زمانی بلند حافظه را بررسی میکنیم. روش زنجیر مارکوف مونت کارلو (MCMC) یک وسیله محاسباتی مهم برای به دست آوردن نمونه هایی از یک توزیع پسین میباشد.

¹- Auto regressive Fractionally Integrated Moving Average

مقدمه:

سریهای زمانی در علوم مختلف کاربردهای بسیاری دارد. یکی از مدل‌های سری زمانی سری زمانی با حافظه بلند می‌باشد که در بسیاری از علوم همچون اقلیم شناسی، آب شناسی، هوا شناسی و مخصوصاً در اقتصاد کاربرد فراوانی دارند. در دو دهه گذشته پیشرفتهای چشم گیری در زمینه اقتصاد سنجی مربوط به سریهای زمانی انجام شده که در تحلیل سریهای زمانی بلند مدت مستقلاً استفاده شده است. مدل‌های ARFIMA ابتدا به وسیله گرنجر و جیوکس² (1980) ارائه شده است. توسط هسلت و رافتری³ (1989) یکی از این مدلها برای داده های مربوط به نیروی باد پیشنهاد شده است. مدل های با حافظه بلند برای تحقیق درباره علت تغییرات آب و هوایی نیز مفید بوده اند. در اقتصاد مشاهده تجربی اثر حافظه بلند به گرنجر (1966) بر می‌گردد این مدلها بطور گسترده در زمینه های مختلفی همچون تحلیل پدیده ژئوفیزیک نواکز و دیگران⁴ (1988) و بلوم فیلد⁵ (1992)، مدل بندی اقتصاد سنجی (رودبوش⁶ (1989) و سول⁷ (1992))، تحلیل سریهای زمانی مالی (شی⁸ (1991) و چونگ⁹ (1993)) و پیش بینی بلند مدت (گوئک و پورتو-هداک¹⁰ (1993)، ری¹¹ (1993) و ساتکلیف¹² (1993)) استفاده شده اند. برآورد پارامترهای مدل‌های ARFIMA یک مسئله مهم می‌باشد یک سری زمانی با حافظه بلند را میتوان به وسیله تابع خود همبستگی آن که با نرخ هیپربولیک (هذلولی) کاهش می یابد، مشخص کرد. نرخ کاهش هیپربولیک بسیار آهسته تر از نرخ تابع خود همبستگی سری زمانی ای که حافظه کوتاه مدت دارد است. برآورد پارامترهای مدل ARFIMA از ابتدا مورد توجه بوده است. روشهای ML دقیق بوسیله هاسلت و رافتری (1989)، هسکینگ (1984)، لی (1986) و بیرن (1994) روش ML دقیق را ارائه کرده اند. چانگ و بایلی (1993) روش حداقل مربعات شرطی (CSS) را ارائه کردند. تحلیل بیزی مدل‌های ARFIMA بوسیله کوپ، لی، اسیوالسکی و استیل (1997)، جفریز و راویشنکار (1996 و 1998) ارائه شد. توزیع پیشنهادی پارامتر تفاضل گیری کسری بوسیله نان-جانگ و بریدت (2003) ارائه شده است.

در فصل اول این پایان نامه مفاهیم اساسی در بخش اول آورده شده است، در بخش دوم نامانایی در میانگین، در بخش سوم به معرفی الگوی اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده می پردازد، در بخش چهارم به معرفی

² - Granger and Joyeux

³ - Haslett & Raftery

⁴ - Noakea et al

⁵ - Bloomfield

⁶ - Rudebush

⁷ - Sowell

⁸ - Shea

⁹ - Cheung

¹⁰ - Guek & Porter-Hudak

¹¹ - Ray

¹² - Sutcliffe

الگوی اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده (ARIMA)، در بخش پنجم قانون اعداد بزرگ، در بخش ششم درجه پارزن، در بخش هفتم پیش بینی فرآیند های مانا و در بخش هشتم بعضی روشهای پیش بینی را مطرح می کنیم و همچنین الگوریتم داربین-لوینسن را معرفی میکنیم.

در فصل دوم به معرفی و تاریخچه مدل های اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده کسری¹³ می پردازیم و تعاریف جایگزینی برای آن ارائه می دهیم، فرآیندهای ARFIMA نامانارا معرفی می کنیم، بخش 2-9 به آزمونهای تشخیص وجود حافظه بلند می پردازد. در بخش 2-10 مانایی و علت پذیری و وارون پذیری را در فرآیندهای ARFIMA شرح می دهیم. همچنین بسط AR و MA نامتناهی و ویژگی های فرآیند های ARFIMA (p, d, q) را بیان میکنیم.

در فصل سوم در بخش 3-3 روشهای زنجیرمارکوف مونت کارلو را بیان می کنیم والگوریتم متروپلیس-هستینگز و نمونه گیری گیس و راه های تشخیص همگرایی آنها را بیان می کنیم، در بخش 3-4 تعیین زمان توقف و دوره داغیدن و در بخش 3-7 همگرایی کنترل شده را بیان می کنیم.

در فصل چهارم روشهای برآورد برآورد پارامتر تفاضل گیری در ARFIMA مانا را بیان می کنیم. در بخش 3-4 برآورد درستنمایی ماکسیمم، در بخش 4-4 تقریبهای اتورگرسیو، در بخش 4-5 روش هاسلت-رافتری و در بخش 4-6 روش بیرن، در بخش 4-7 روش لگاریتم دوره نگار GPH، در بخش 4-8 روش دوره نگار هموار شده، در بخش 4-9 روش ویتل، در بخش 4-10 روش شبه حداکثر درستنمایی و در 4-11 به برآورد پارامتر تفاضل گیری در ARFIMA نامانا می پردازیم.

در فصل پنجم روش بیزی را مطرح می کنیم، در بخش 5-3 مدل سازی بیزی در قرن 21، در بخش 5-4 مفاهیم و واژگان اختصاصی، بخش 5-6 برآوردگرهای بیز، در بخش 5-7 انتخاب توزیع پیشنهادی و در بخش 5-8 شبیه سازی پسین، در بخش 5-10 روشهای محاسبه بیزی، در بخش 5-11 روشهای بیزی در مدل های ARFIMA، در بخش 5-12 استنباط بیزی، در بخش 5-13 مشکلات مدلسازی بیزی، در بخش 5-14 چارچوب بیزی، در بخش 5-15 شکل چگالی پسین، در بخش 5-16 افزایش تابع درستنمایی، در بخش 5-17 برآورد مستقیم درستنمایی گوسی، در بخش 5-18 مدلسازی بیزی، در بخش 5-18-1 روشهای زنجیر مارکوف مونت کارلو و در بخش 5-20 به کاربرد روی داده های واقعی و مقایسه روشها می پردازیم.

فهرست مطالب

| عنوان..... | صفحه |
|-----------------------------------------------------------------|------|
| چکیده | 1 |
| مقدمه | 2 |
| فصل اول | 4 |
| آشنایی با سری زمانی و مفاهیم اولیه | 4 |
| 1-1 مفاهیم اساسی | 4 |
| 1-1-1 تعریف سری زمانی | 4 |
| 2-1-1 فرآیند تصادفی | 5 |
| 3-1-1 ضرب داخلی | 6 |
| 4-1-1 مجموعه های متعامد | 7 |
| 5-1-1 تکنی و نظم | 8 |
| 6-1-1 علت پذیری | 9 |
| 7-1-1 وارون پذیری | 10 |
| 8-1-1 ارگودیکی | 10 |
| 2-1 نامانایی در میانگین | 12 |
| 1-2-1 الگوهای روند قطعی | 12 |
| 2-2-1 الگوهای روند تصادفی و تفاضلی کردن | 13 |
| 3-1 معرفی الگوی اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده (ARIMA) | 13 |
| 1-3-1 ویژگی های واریانس و اتو کوواریانس ARIMA | 14 |
| 4-1 نمایش طیفی سری زمانی | 14 |
| 1-4-1 دوره نگار | 14 |
| 2-4-1 طیف و نمایش طیفی | 14 |
| 3-4-1 تابع توزیع طیفی | 14 |

| | |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| 15 | 4-4-1 تابع چگالی طیفی |
| 15 | 5-1 قانون اعداد بزرگ |
| 15 | 6-1 دریچه پارزن |
| 16 | 7-1 پیش بینی فرآیند های مانا |
| 16 | 1-7-1 پیش بینی معادلات در دامنه زمان |
| 16 | 2-7-1 معادلات برای پیش بین های یک مرحله ای |
| 17 | 3-7-1 معادلات برای پیش بینی H مرحله بعد، $h \geq 1$ |
| 18 | 4-7-1 روشهای بازگشتی برای محاسبه بهترین پیش بینی خطی |
| 18 | 1-4-7-1 پیش بینی بازگشتی با استفاده از الگوریتم داربین-لوینسن |
| 19 | 5-7-1 محاسبه بازگشتی درستنمایی از یک فرآیند گوسی با میانگین صفر |
| 20 | فصل دوم |
| 20 | مدلهای ARFIMA |
| 20 | 1-2 تاریخچه |
| 22 | 2-2 معرفی فرایندهای با حافظه بلند |
| 24 | 4-2 تعاریف جایگزین |
| 26 | 5-2 مدل اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده کسری (ARFIMA) |
| 30 | 6-2 اهمیت تفاضل گیری کسری |
| 31 | 7-2 مفهوم تفاضل گیری کسری |
| 32 | 8-2 فرایندهای ARFIMA نامانا |
| 32 | 9-2 آزمونهای تشخیص وجود حافظه بلند |
| 33 | 1-9-2 تحلیل دامنه استاندارد شده (R/S) |
| 34 | 2-9-2 تحلیل دامنه استاندارد شده تغییر یافته (MRS) |
| 35 | 3-9-2 تحلیل نوسانات روند زدایی شده DFA |
| 37 | 4-9-2 مقایسه آزمون های R/S, MRS, DFA |
| 38 | 10-2 مانایی و علت پذیری و وارون پذیری |
| 45 | 11-2 بسط AR و MA نامتناهی |
| 47 | شکل 1-2: رسم نمودار بسط نامتناهی AR و MA مجانبی برای ARFIMA با پارامترهای برآورد شده ویتل |

| | |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 48 | شکل 2-2: رسم نمودار بسط نامتناهی AR و MA مجانبی برای ARFIMA با پارامترهای (0.2 و 0.4 و 0) |
| 48 | شکل 3-2: رسم نمودار بسط نامتناهی AR و MA مجانبی برای ARFIMA با پارامترهای (0.7 و 0.5 و -0.2) |
| 49 | 12-2 ویژگی های فرایند های ARFIMA (P, D, Q) |
| 49 | 1-12-2 چگالی طیفی |
| 49 | 2-12-2 تابع اتوکوواریانس |
| 52 | 3-12-2 مقایسه رفتار توابع خودهمبستگی و چگالی طیفی فرآیندهای ARFIMA و ARMA |
| 52 | شکل 4-2: نمایش گرافیکی ARMA در مقابل ARFIMA |
| 54 | 4-12-2 میانگین نمونه |
| 55 | جدول 2-2: واریانس دقیق و مجانبی میانگین نمونه برای داده های سطح رود نیل |
| 56 | 5-12-2 خود همبستگی جزئی |
| 57 | شکل 5-2: نمودار داده های شبیه سازی شده برای مدل ARFIMA(0,0.4,0) |
| 58 | شکل 6-2: تابع خود همبستگی برای مدل ARFIMA(0,0.4,0) |
| 58 | شکل 7-2: تابع خود همبستگی جزئی برای مدل ARFIMA(0,0.4,0) |
| 59 | شکل 8-2: نمودار شبیه سازی شده مدل ARFIMA(1,d,1) با $d=0.4$ و $\phi = -0.7, \theta = -0.2$ |
| 59 | شکل 9-2: نمودار تابع خود همبستگی مدل ARFIMA(1,d,1) با $d=0.4$ و $\phi = -0.7, \theta = -0.2$ |
| 60 | شکل 10-2: نمودار تابع خود همبستگی جزئی مدل ARFIMA(1,d,1) با $d=0.4$ و $\phi = -0.7, \theta = -0.2$ |
| 60 | شکل 11-2: نمودار شبیه سازی مدل ARFIMA(0.5,0.3,0) |
| 61 | شکل 12-2: نمودار تابع خود همبستگی مدل ARFIMA(0.5,0.3,0) |
| 61 | شکل 13-2: نمودار تابع خود همبستگی جزئی مدل ARFIMA(0.5,0.3,0) |
| 61 | 13-2 تخمین فرآیندهای بلند حافظه |
| 63 | 14-2 لم های تکنیکی |
| 65 | فصل سوم: |
| 65 | روشهای زنجیر مارکوف مونت کارلو (MCMC) |
| 65 | 1-3 مقدمه |

| | |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 65 | 2-3 توزیع های شرطی کامل |
| 66 | 3-3 روشهای زنجیرمارکوف مونت کارلو |
| 68 | 1-3-3 الگوریتم متروپلیس-هستینگز |
| 70 | 2-3-3 نمونه گیری گیبس |
| 71 | تشخیص همگرایی در نمونه گیری گیبس |
| 71 | 3-3-3 راه های تشخیص همگرایی |
| 72 | 1-3-3-3 خود همبستگی |
| 72 | 2-3-3-3 نمودار پیشینه سری زمانی |
| 72 | 4-3 تعیین زمان توقف و دوره داغیدن |
| 73 | 5-3 معکوس پذیری |
| 74 | 7-3 توزیع های بسیار پراکنده |
| 75 | 8-3 همگرایی کنترل شده |
| 78 | فصل چهارم: |
| 78 | روشهای برآورد |
| 78 | 1-4 آزمون درستی تشخیص |
| 78 | 2-4 روش های برآورد پارامتر تفاضل گیری در ARFIMA مانا |
| 79 | 3-4 برآورد درستنمایی ماکسیمم |
| 79 | 1-3-4 روش تجزیه چولسکی |
| 80 | 2-3-4 الگوریتم داربین-لویسن |
| 80 | 3-3-4 محاسبه اتوکواریانس ها |
| 81 | 4-4 تقریبهای اتورگرسیو |
| 82 | 5-4 روش هاسلت-رافتری |
| 83 | 6-4 روش بیرن |
| 85 | 7-4 روش لگاریتم دوره نگار GPH |
| 87 | 8-4 روش دوره نگار هموار شده (SPR) |
| 88 | 9-4 روش ویتل (W) |
| 90 | شکل 1-4: نمودار سری زمانی مربوط به داده های رود نیل و نمودار تابع خود همبستگی مربوط به این داده ها |

- جدول 4-1: برای داده های سطح رود نیل از سال 1284-622 ARFIMA(0,d,0) برآورد ویتل با مدل 90
- شکل 4-2: نمودارهای مربوط به باقیمانده ها و تابع خود همبستگی و p -مقدار برای آزمون باکس-لجینگ برای مدل ARFIMA(0,d,0) برای داده های رود نیل 91
- شکل 4-3: نمودار طیف تئوری برای مدل ARFIMA(0,d,0) برای داده های رود نیل 92
- جدول 4-2: برآورد ویتل پارامترهای مدل ARFIMA(1,d,1) برای داده های سطح رود نیل 92
- شکل 4-4: نمودارهای مربوط به باقیمانده ها و تابع خود همبستگی و p -مقدار برای آزمون باکس-لجینگ برای مدل ARFIMA(1,d,1) برای داده های رود نیل 92
- شکل 4-5: نمودار طیف تئوری برای مدل ARFIMA(1,d,1) برای داده های رود نیل 93
- جدول 4-3: برآورد پارامترها برای داده های سطح رود نیل از ARFIMA(0,d,1) برآورد ویتل با مدل 93
- شکل 4-6: نمودارهای مربوط به باقیمانده ها و تابع خود همبستگی و p -مقدار برای آزمون باکس-لجینگ برای مدل ARFIMA(0,d,1) برای داده های رود نیل 93
- شکل 4-7: نمودار طیف تئوری برای مدل ARFIMA(0,d,1) برای داده های رود نیل 94
- جدول 4-4: برآورد پارامترها در مدل ARFIMA(1,d,0) برای داده های رود نیل 94
- شکل 4-8: نمودارهای مربوط به باقیمانده ها و تابع خود همبستگی و p -مقدار برای آزمون باکس-لجینگ برای مدل ARFIMA(1,d,0) برای داده های رود نیل 94
- شکل 4-9: نمودار طیف تئوری برای مدل ARFIMA(1,d,0) برای داده های رود نیل 95
- جدول 4-5: آزمون باکس-لجینگ برای باقیمانده های روشهای مختلف برآورد ویتل 95
- جدول 4-6: مقایسه پارامتر d در 4 روش 95
- 10-4 روش شبه حداکثر درستنمایی QML 95**
- جدول 4-7: مقادیر میانگین و میانگین مربع خطا با استفاده از روشهای مختلف برای اندازه های نمونه متفاوت بر مبنای مدل ARFIMA(0,d,0) و $d=0.1$ 98
- جدول 4-8: مقادیر میانگین و میانگین مربع خطا با استفاده از روشهای مختلف برای اندازه های نمونه متفاوت بر مبنای مدل ARFIMA(0,d,0) و $d=0.3$ 99
- جدول 4-9: مقادیر میانگین و میانگین مربع خطا با استفاده از روشهای مختلف برای اندازه های نمونه متفاوت بر مبنای مدل ARFIMA(0,d,0) و $d=0.4$ 99

| | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 99 | جدول 4-10: مقایسه برآورد GPH و SPER برای داده های رود نیل |
| 100 | 11-4 برآورد پارامتر تفاضل گیری در ARFIMA نامانا |
| 100 | 1-11-4 مقایسه کارایی روش های برآورد پارامتر تفاضل گیری در فرآیند ARFIMA مانا با استفاده از شبیه سازی |
| 100 | مونت کارلو |
| 101 | جدول 4-11: مقادیر میانگین و میانگین مربع خطا با استفاده از روشهای مختلف برای اندازه های نمونه متفاوت بر مبنای ARFIMA(0,d,0) نامانا با $d=0.6$ |
| 102 | جدول 4-12: مقادیر میانگین و میانگین مربع خطا با استفاده از روشهای مختلف برای اندازه های نمونه متفاوت بر مبنای ARFIMA(0,d,0) نامانا با $d=0.8$ |
| 103 | فصل پنجم: |
| 103 | روش بیزی |
| 103 | 1-5 مقدمه |
| 104 | 2-5 آمار بیزی |
| 105 | 3-5 مدل سازی بیزی در قرن 21 |
| 107 | 1-3-5 زنجیر مارکوف مونت کارلو |
| 109 | 4-5 مفاهیم و واژگان اختصاصی |
| 109 | 5-5 پیش بینی در یک مدل ساده |
| 109 | 6-5 برآوردگرهای بیز |
| 111 | 7-5 انتخاب توزیع پیشنهادی |
| 112 | 8-5 شبیه سازی پسین |
| 112 | 9-5 قاعده بیز |
| 114 | 10-5 روشهای محاسبه بیزی |
| 115 | 11-5 روشهای بیزی در مدل های ARFIMA |
| 115 | 12-5 استنباط بیزی |
| 116 | 13-5 مشکلات مدلسازی بیزی |
| 116 | 14-5 چارچوب بیزی |
| 117 | 15-5 شکل چگالی پسین |
| 120 | 16-5 افراز تابع درستمایی |

- 120..... 17-5 برآورد مستقیم درستنمایی گوسی
- 122..... 18-5 مدل‌سازی بیزی
- 123..... 1-18-5 روشهای زنجیر مارکوف مونت کارلو
- 126..... 19-5 کاربرد روی داده های واقعی و مقایسه روشها:
- 126 شکل 5-1: نمودار مربوط به داده های قیمت سکه از سال 1364-1390
- 126 شکل 5-2: نمودار تابع خود همبستگی مربوط به داده های قیمت سکه از سال 1364 تا 1390
- 127 جدول 5-1: برآورد پارامتر d با روش متروپلیس-هستینگز
- 127 جدول 5-2: برآورد پارامتر d با روش ویتل
- 127 جدول 5-3: برآورد پارامترهای مدل $ARFIMA(0,d,5)$ با استفاده از روش ویتل

پیوست ها:

- پیوست 2-1: کدهای R برای ضرایب مجانبی AR و MA متناهی برای $ARFIMA$ برای برآورد ویتل و
- 129..... $ARFIMA(0,0.4,0.2)$ و $ARFIMA(-0.2,-0.5,0.7)$ با نادیده گرفتن بعضی از ضرایب
- پیوست 2-2: کدهای R برای رسم نمودارهای توابع خودهمبستگی و چگالی طیفی فرآیندهای $ARMA$ و
- 130..... $ARFIMA$
- پیوست 3-2: کدهای R برای برآورد پارامتر برای واریانس دقیق و مجانبی بر حسب تابع اتوکواریانس سوول
- 130..... 4-2: کدهای R برای مثال 2-12-1
- پیوست 4-1: کدهای R برای برآورد ویتل در مدل‌های مختلف برای مینیمم سطح آب رود نیل و چک کردن پارامترها
- 131.....
- پیوست 4-2: کدهای R برای مقایسه روشهای مختلف برآورد پارامتر تفاضل گیری در مدل
- 133..... $ARFIMA(0,0.2,0), N=256, N=1000$
- 134..... پیوست 3-4: برآورد GPH و $SPER$ برای داده های رود نیل
- پیوست 4-4: کدهای R برای شبیه سازی مونت کارلو به منظور مقایسه روش های برآورد پارامتر تفاضل گیری در
- 134..... $ARFIMA$ نامانا
- پیوست 5-1: کدهای R برای روشهای متروپلیس-هستینگز و ویتل و محاسبه تابع درستنمایی با استفاده از الگوریتم
- 136..... متروپلیس-هستینگز
- 138..... توابع استفاده شده در پیوستها
- 140..... پکیج های استفاده شده در پایان نامه

143..... منابع

145..... چکیده انگلیسی

فصل اول

آشنایی با سری زمانی و مفاهیم اولیه

برای مطالعه فرآیندهای با حافظه بلند لازم است مروری بر سری زمانی داشته باشیم که قسمتهایی از نمایش طیفی را نیز شامل میشود.

1-1-1 تعریف سری زمانی

یک سری زمانی دنباله ای مرتب شده از مشاهدات است به عبارت دیگر یک سری زمانی عبارت است از داده هایی که از مشاهده یک پدیده در طول زمان به دست آمده اند. گرچه معمولاً بر حسب زمان، بویژه در فواصل زمانی مساوی مرتب میشوند، ولی مرتب شدن ممکن است با توجه به ابعاد دیگری چون فاصله نیز باشد. سریهای زمانی در زمینه های گوناگونی مثل کشاورزی، بازرگانی، مهندسی، صدا، ژئوفیزیک، هواشناسی، سرعت باد در ساعت، میزان باران سالانه، در مطالعات پزشکی (برای اندازه گیری ردهای الکتروانسفاوگرام و الکترو کاردیوگرام)، نرخهای مرگ و میر کاربرد دارد، البته زمینه هایی که در آن سریهای زمانی مشاهده و مطالعه میشود بی پایان است. در یک تقسیم بندی کلی سریهای زمانی را به دو دسته پیوسته و گسسته تقسیم میکنیم. یک سری زمانی نظیر علائم الکتریکی و ولتاژ که مشاهدات در آنها بطور پیوسته در زمان ایجاد میشوند، سریهای زمانی پیوسته میباشند. یک سری زمانی، مانند نرخ های بهره و حجم فروش را که مشاهدات فقط در زمانهای معینی که معمولاً به فواصل مساوی از یکدیگر قرار دارند ایجاد شده باشند، سریهای زمانی گسسته میباشند. یک سری زمانی با توجه به الگوهای پارامتری، از توابع خودهمبستگی و خود همبستگی جزئی استفاده میکند، تحلیل در قلمرو زمان می نامند. یک روش جایگزین را که برای مطالعه تجزیه پارامتری یک سری زمانی به مؤلفه های فرکانس مختلف آن از توابع طیفی استفاده میکند، تحلیل در قلمرو فرکانس می نامند. گرچه این دو روش از نظر

ریاضی معادلند، بدین مفهوم که تابع خودهمبستگی و تابع طیفی یک جفت تبدیل فوریه را تشکیل میدهند ولی مواردی وجود دارد که یک روش بر دیگری رجحان دارد.

1-1-2 فرآیند تصادفی

یک فرآیند تصادفی، خانواده ای از متغیرهای تصادفی $y(w,t)$ است که روی یک فضای احتمال تعریف شده است و w به فضای نمونه و t به یک مجموعه شاخص، متعلق میباشد. برای یک ثابت t ، $y(w,t)$ یک متغیر تصادفی است. برای یک w معلوم $y(w,t)$ به عنوان تابعی از t ، یک نمونه یا یک مصداق نامیده میشود. جامعه ای متشکل از تمام مصداق ممکن در فرایندهای تصادفی و تحلیل سریهای زمانی، یک مجموعه کلی نامیده میشود. بنابراین، یک سری زمانی یک مصداق یا یک تابع نمونه از یک فرآیند تصادفی معین است. در این بحث، مجموعه شاخص را مجموعه تمام اعداد صحیح فرض میکنیم. مجموعه ای متناهی از متغیرهای تصادفی $\{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}\}$ را، از یک فرآیند تصادفی $\{Y(w,t) : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ در نظر میگیریم. و برای آن تابع توزیع π -بعدی زیر را تعریف میکنیم:

$$F(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) = p\{w : y(w, t_1) \leq y_{t_1}, \dots, y(w, t_n) \leq y_{t_n}\}.$$

1-1-3 ضرب داخلی

فرض کنید M یک فضای برداری باشد. یک ضرب داخلی یک تابع بشکل $M \rightarrow R : \langle \cdot, \cdot \rangle$ میباشد چنانکه برای همه $x, y, z \in M$ و $\alpha, \beta \in R$ در شرطهای زیر صدق کند:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad (1)$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (2)$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ و } \langle x, x \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0. \quad (3)$$

فضای برداری M با شرایط بالا یک فضای ضرب داخلی $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ نامیده میشود.

نرم فضای برداری M تابعی است که بصورت $\|\cdot\| : M \rightarrow [0, \infty)$ که برای همه $x, y \in M$ و $\alpha \in R$ در شرایط زیر صدق میکند:

$$\|x\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0. \quad (1)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (2)$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (3)$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی نتیجه میگیریم که $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ در $\{x_t\}$ نشان دهنده یک دنباله کوشی است اگر و تنها اگر برای همه $\varepsilon > 0$ عدد صحیح n وجود داشته باشد طوری که $\|x_t - x_s\| < \varepsilon$ (برای $t, s > n$). فضای برداری M کامل است اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی یک حد در M داشته باشد. با این تعاریف ما فضای هیلبرت را معرفی میکنیم. یک فضای هیلبرت یک ضرب داخلی کامل فضای برداری است. این فضاها مخصوصاً برای تحلیل سریهای زمانی با توجه به قضیه تصویر که در بخش های بعدی آمده است مهم هستند.

تعریف: (گستره¹). گستره $\overline{sp}\{x_t : t \in T\}$ از هر زیر مجموعه $\{x_t : t \in T\}$ از یک فضای هیلبرت H کوچکترین زیر فضای بسته H که شامل هر مولفه $x_t : t \in T$ میباشد، تعریف میشود. نکته: فضای بسته از یک مجموعه متناهی $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعه ای از همه ترکیبهای خطی $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in C \text{ (or) } R$ میباشد. برای مثال اگر $x_1, x_2 \in R^3$ و x_1 یک اسکالر چندگانه² از x_2 باشد آنگاه $\overline{sp}\{x_1, x_2\}$ شامل صفحه ای³ از x_1 و x_2 میباشد.

1-1-4 مجموعه های متعامد⁴:

A یک مجموعه $\{e_t : t \in T\}$ از مولفه های یک فضای ضرب داخلی متعامد گفته میشود اگر برای هر $s, t \in T$ داشته باشیم

$$\langle e_s, e_t \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } s = t \\ 0 & \text{if } s \neq t \end{cases} \quad (1-1)$$

قضیه 1-1:

فرض کنید M یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشد و فرض کنید $x \in H$ سپس

$$(1) \text{ یک نقطه یکتای } y \in M \text{ وجود دارد چنانکه } \|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|$$

1- span
2- multiple
3- plane
4- Orthonormal Sets

(2) $y \in M$ و $\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|$ اگر و تنها اگر $y \in M$ و $\langle x - y, z \rangle = 0$ برای همه $z \in M$

اثبات: [33]

مثال: فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و فضای C^n با ضرب داخلی اقلیدسی زیر:

$$\langle x, y \rangle = x\bar{y} = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)'$, $y = (y_1, \dots, y_n)'$ و \bar{y} مزدج مختلط از y میباشد. آنگاه، C^n یک فضای هیلبرت

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \text{ با اندازه}$$

مثال: فرض کنید $\{y_t : t \in Z\}$ یک فرآیند تصادفی با میانگین 0 واقعی، تعریف شده روی یک فضای احتمالی (Ω, F, p) باشد. آنگاه، $L_2(\Omega, F, p)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle x, y \rangle = E(xy)$ و نرم $\|x\| = \sqrt{E(y^2)}$ (که در آن $E(\cdot)$ عملگر امید ریاضی است)، این فضا L_2 نامیده میشود.

مثال: فرض کنید F تابع توزیع باشد و فرض کنید $f(\lambda), g(\lambda)$ با توابع مختلط-مقدار با دامنه $[-\pi, \pi]$ باشد بطوری که:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty$$

آنگاه

$$\langle f, g \rangle_F = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} dF(\lambda) \quad (2-1)$$

یک ضرب داخلی تولید شده در فضای هیلبرت میباشد که با $L_2(F)$ نشان داده میشود. مشاهده میشود که نوابری هولدر⁵ روی این ضرب داخلی بشکل زیر تعریف میشود:

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^2 dF(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty \quad (3-1)$$

⁵ - Holders

5-1-1 تکین و نظم

اگر $F_t = \overline{sp}\{y_s : s < t\}$ گذشته فرآیند در زمان t باشد و $F_{-\infty} = \bigcap_{t=-\infty}^{\infty} F_t$ فرآیند قطعی⁶ به معنی پیش بینی کننده موثر⁷ است، اگر و تنها اگر $y_t \in F_{-\infty}$ (برای $t \in Z$). عبارت دیگر، یک فرآیند قطعی است اگر و تنها اگر $F_{-\infty} = F_{\infty}$. این فرآیندها همچنین تکین نامیده میشود. از طرف دیگر یک فرآیند غیر قطعی خالص⁸ یا نظم⁹ نامیده میشود اگر و تنها اگر $F_{-\infty} = \{0\}$.

قضیه 5-1-1

فرض کنید $\{x_t\}$ یک فرآیند با میانگین 0 و فرض کنید $\{\varphi_j : j \in Z\}$ یک دنباله مطلقاً جمع پذیر باشد. آنگاه:

(1) فرآیند $\{y_t\}$ بشکل $y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j x_{t-j} = \varphi(B)x_t$ یک فرآیند مانا با میانگین 0 است.

(2) اگر فرآیند مانا $\{x_t\}$ بشکل $x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_j \varepsilon_{t-j} = \eta(B)\varepsilon_t$ باشد آنگاه:

$$y_t = \varphi(B)\eta(B)\varepsilon_t = \eta(B)\varphi(B)\varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t$$

که در آن معادلات میانگین مربع معنی دار¹⁰ میباشد و $\psi(B) = \eta(B)\varphi(B)$.

اثبات: [33]

6-1-1 علت پذیری

فرآیند ARMA (p, q) تعریف شده با معادله $\phi(B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ را علت پذیر یا کازال گوئیم اگر دنباله

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

مثال:

مانایی و علت پذیری دو مفهوم مرتبط هستند اما ضرورتاً معادل نیستند. با نشان دادن این نکته فرض میکنیم که $\{\varepsilon_t\}$ یک دنباله نوفه سفید با $Var(\varepsilon_t) < \infty$ میباشد، برای مثال فرآیند $y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$ را در نظر

⁶- deterministic process

⁷- perfectly predictable

⁸- purely nondeterministic

⁹- regular

¹⁰- sense

بگیرید. این فرآیند مانا است اما علت پذیر نیست زیرا y_t وابسته به مقادیر آینده دنباله $\{\varepsilon_t\}$ میباشد. از طرف دیگر، فرآیند $y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$ مانا و علت پذیر است.

قضیه 1-3 (تجزیه ولد¹¹)

هر فرآیند مانا مجموع یک فرآیند نظم و یک فرآیند تکین میباشد. این دو فرآیند متعامدند و تجزیه یکتا دارند.

طبق قضیه تجزیه ولد، یک فرآیند غیر قطعی محض ممکن است بشکل زیر بیان شود:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \psi(B) \varepsilon_t \quad (4-1)$$

که در آن $\psi_0 = 1$ و $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ ، و $\{\varepsilon_t\}$ یک فرآیند نوفه سفید با واریانس σ^2 میباشد. بسط ولد یکتا

است و $\varepsilon_t \in F_{t+1}$ برای همه $t \in Z$.

اثبات: [33]

1-1-7 وارون پذیری :

یک فرآیند منظم خطی 1-4 یک فرآیند وارون پذیر نامیده میشود اگر یک دنباله از ضرایب $\{\pi_j\}$ وجود داشته باشد چنانکه

$$\varepsilon_t = - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j} \quad (5-1)$$

که همگرا به L_2 میباشد. از 1-4 و با فرض $\pi_0 = -1$ فرآیند $\{y_t\}$ ممکن است بشکل زیر بیان شود:

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$$

1-1-8 ارگودیکی

فرض کنید y_1, \dots, y_n دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند. اگر بخواهیم تابع توزیع $F(y)$ مربوط به آنها را برای تمام y ها برآورد کنیم، میتوانیم این کار را با مشاهده تعدادی متناهی از y ها

¹¹ - Wold Decomposition