وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش هندسه)

نتایجی در مورد حدس C^1-چگالش پالیس

توسط:

سمیه جلالی پو

استاد راهنما:

دکتر عباس فخاری

استادان مشاور:

دکتر محمد ابری

دکتر امین اصفهانی رشیدی

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

نتایجی در مورد حدس C^1 - چگالش پالیس

توسط:

سمیه جلالی پو

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش هندسه)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر عباس فخاری استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محمد ابری استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر امین اصفهانی استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر میثم نصیری استادیار IPM (داور اول)

دکتر علی تقوی استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر ناصر هاشمی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر خوبم

مادر مهربانم

که مهرشان سرآغاز هستی ام گشت.

در پیشگاه این دو بهار زندگی ام زانوی ادب بر زمین می نهم و به پاس تمامی رنج هایی که برای بالندگی من کشیده اند بر دستان پر مهرشان بوسه می زنم.

و نیز این رساله را تقدیم می کنم به

برادر و خواهرانم که همراهان و مشوقانم در زندگی بوده اند.

اساتید ارجمندم که در سایه نفس گرمشان بسیار آموختم.

سپاسگزاری

من تشنه ی آن دو دست خوبم | کز مهر به من نوشتن آموخت
دستم بگرفت و پا به پا برد | تا شیوه ی راه رفتن آموخت

بی گمان موفقیت های ما حاصل راهنمایی ها و اشارت های اساتید دلسوز و فرزانه ای است که بی دریغ ما را از دریای بی کران علم و دانش خویش سیراب می کنند. اکنون به رسم ادب و با تواضع مراتب سپاس خود را از تلاش های صادقانه و بی ریای استاد گرانقدرم *دکتر عباس فخاری* که راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند ابراز می دارم، و امیدوارم که بتوانم شکیبایی ایشان را سرلوحه ی زیستنم قرار دهم.

همچنین از آقایان *دکتر محمد ابری* و *دکتر امین اصفهانی* که زحمت مشاوره ی پایان نامه را بر عهده داشتن بسیار سپاسگزارم.

و از آقایان *دکتر میثم نصیری* و *دکتر علی تقوی* که با پذیرفتن داوری پایان نامه من را از نقطه نظرات ارزشمندشان بهره مند ساختند نهایت سپاس و تشکر را دارم.

چکیده

نتایجی در مورد حدس C^1-چگالش پالیس

به وسیله‌ی:

سمیه جلالی پو

واژه‌های کلیدی: حدس C^1-چگالش، دیفیومورفیسم هذلولوی، مماس هموکلینیک، دور چند بعدی، خاصیت نوعی، تجزیه تسلطی، دور هتروکلینیک، بستار هموکلینیک، مجموعه ترایای ضعیف، مولفه ترایای ضعیف، لم C^1-تماس، نوعی بودن، هذلولوی جزئی.

فرض کنیم M یک منیفلد فشرده بدون کران باشد، و $\mathrm{Diff}^1(M)$ مجموعه تمام دیفیومورفیسم‌های روی M همراه با C^1-توپولوژی باشد. حدس C^1-چگالش پالیس بیان می‌کند که هر دیفیومورفیسم روی M را می‌توان با یک دیفیومورفیسم هذلولوی، یا با دیفیومورفیسم با یک مماس هموکلینیک، یا با دیفیومورفیسم با یک دور چند بعدی C^1-تقریب زد. ما در این پایان‌نامه نتایجی از حدس پالیس را در C^1-توپولوژی ارائه می‌کنیم، و همچنین نتیجه می‌گیریم که قضیه C^1-چگالش سه‌گانه که بیان می‌کند هر C^1-دیفیومورفیسم روی M را می‌توان با یک دیفیومورفیسم هذلولوی، یا با دیفیومورفیسم با تعداد نامتناهی مولفه‌های ترایای ضعیف، یا با دیفیومورفیسم با یک دور چند بعدی C^1-تقریب زد، بیان دیگری از حدس پالیس است.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

فرض کنیم M یک منیفلد فشرده d-بعدی و بدون کران باشد و $\mathrm{Diff}^r(M)$، $r \geq 0$، مجموعه تمام دیفیومورفیسم ها روی M همراه با C^r-توپولوژی باشد. یکی از مسایل اصلی در دینامیک‌های مشتق‌پذیر، حدس مشهور پالیس[۱] است [۳۱، ۳۳] که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

حدس C^r-چگالش پالیس: "C^r- دیفیومورفیسم‌های روی M با یک مماس هموکلینیک یا یک دور چند بعدی، در متمم C^r-بستار سیستم‌های هذلولوی C^r-چگال هستند."

در بعد ۲، حدس پالیس در C^1-توپولوژی توسط پوژالس[۲] و سامبارینو[۳] ثابت شده است [۴۰]. در واقع آن‌ها ثابت کردند که در بعد ۲، هر دیفیومورفیسم را می‌توان با یک دیفیومورفیسم هذلولوی یا با یک مماس هموکلینیک C^1-تقریب زد. در ابعاد بالاتر از ۲ حدس پالیس هنوز باز است هر چند که ون[۴] نتایجی را درباره‌ی حدس پالیس برای ابعاد بالاتر بیان کرده است، او ثابت کرد که اگر دیفیومورفیسم f دور از مماس هموکلینیک و دور چند بعدی باشد، آن‌گاه $\Omega(f)$ ساختار جزئاً هذلولوی دارد [۵۱].

در ابعاد بالاتر از ۲، سیستم‌هایی وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را با سیستم‌های هذلولوی و مماس هموکلینیک تقریب زد [۴۷، ۲۸، ۵، ۷] و حدس پالیس بیان می‌کند که چنین سیستمی را می‌توان با یک دور چند بعدی تقریب زد، البته توجه داریم که دورهای چند بعدی در ابعاد بالاتر از ۳ ظاهر می‌شوند. بناتی[۵]، گن[۶] و ون در بعد ۳،

[۱] Palis

[۲] Pujals

[۳] Sambarino

[۴] Wen

[۵] Bonatti

[۶] Gan

حدس ضعیف پالیس را نتیجه گرفتند [۸]، این حدس بیان می‌کند که هر دیفیومورفیسم C^1-نوعی یا مورس-اسمیل است یا یک کلاس هموکلینیک غیر بدیهی دارد. اخیراً نیز کرویسیر[۷] و پوژالس توانستند حدس پالس را در حوزه‌های جذبی اثبات کنند [۱۳].

همچنین، گن و ون نتایج C^1-نوعی را درباره‌ی تماس مداری، دورهای هتروکلینیک و بستارهای هموکلینیک به‌دست آوردند، و قضیه C^1-چگالش سه‌گانه را به این‌صورت بیان کردند که [۱۶] : "دیفیومورفیسم‌ها با تعداد نامتناهی مولفه‌های ترایای ضعیف یا یک دور چند بعدی، در متمم C^1-بستار دیفیومورفیسم‌های هذلولوی C^1-چگال هستند."

ما در این پایان‌نامه سعی می‌کنیم که قضیه C^1-چگالش سه‌گانه فوق را به‌عنوان بیان دیگری از حدس پالیس ارائه دهیم.

این پایان‌نامه شامل سه فصل می‌باشد، که در هر یک از فصل‌ها مطالب زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

- در فصل اول، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در پایان‌نامه می‌پردازیم.

- در فصل دوم، اثبات حدس پالیس در بعد ۲ را که توسط پوژالس و سامبارینو بیان شد را نشان می‌دهیم، و همچنین نتایجی از حدس پالیس را در بعد ۲ و در ابعاد بالاتر از ۲ بررسی می‌کنیم.

- در فصل سوم، یک نتیجه مهم از حدس پالیس را مورد بررسی قرار می‌دهیم که معروف به قضیه C^1-چگالش سه‌گانه است و توسط گن و ون ثابت شده است.

[۷] Crovisier

فصل ۱

پیش نیازها

۱-۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای فشرده همراه با متر d و ۲^X متشکل از تمام زیرمجموعه‌های بسته X باشد. **متر هاسدورف** d_H روی ۲^X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_H(Y,Z)=\inf\{\epsilon>\circ \ : \ Y\subseteq N_\epsilon(Z)\ ,\ Z\subseteq N_\epsilon(Y)\}$$

که $N_\epsilon(A)=\{x\in X \ : \ d(x,A)<\epsilon\}$ هرگاه $A\subseteq X$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد فشرده و $C^r(M,\mathbb{R}^s)$، $r\geq\circ$، فضای تمام نگاشت‌های C^r از M به $\mathbb{R}^s$ باشد. در این‌صورت می‌توان یک پوشش متناهی از همسایگی‌های باز $V_۱,\dots,V_n$ برای M چنان یافت که هر V_i در دامنه یک همسایگی مختصاتی (U_i,ϕ_i) قرار داشته باشد، به‌طوری‌که

$$\phi_i(U_i)=B_۲(\circ)\quad , \quad \phi_i(V_i)=B_۱(\circ)$$

$B_\epsilon(x)$ یک گوی به شعاع ϵ و مرکز x است. برای هر $f\in C^r(M,\mathbb{R}^s)$ قرار می‌دهیم

$$f_i=f\circ\phi_i^{-۱}:B_۲(\circ)\to\mathbb{R}^s$$

و

$$\|f\|_r=\max_{i=۱,\dots,k}\sup\{\|f_i(u)\|,\|Df_i(u)\|,\dots,\|D^rf_i(u)\| \ : \ u\in B_۱(\circ)\}$$

توپولوژی تعریف شده توسط این نرم را **C^r - توپولوژی** می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که این متریک به انتخاب V_iها وابسته نیست. (برای جزئیات بیشتر به [۳۲] رجوع کنید.)

تعریف ۱.۱.۳. یک **متر ریمانی** روی منیفلد M نگاشت ضرب داخلی

$$< \, , \, >_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \; ; \; p \in M$$

است، به‌طوری‌که برای هر $u_p, v_p, w_p \in T_pM$ خواص زیر برقرارند

۱. $< v_p, v_p >_p \geq 0$، در حالت خاص $v_p = 0$ اگر و تنها اگر $< v_p, v_p >_p = 0$

۲. $< v_p, u_p >_p = < u_p, v_p >_p$

۳. $< \alpha u_p + \beta v_p, w_p >_p = \alpha < u_p, w_p >_p + \beta < v_p, w_p >_p$.

حال یک نرم ریمانی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|v_p\|_p = \sqrt{< v_p, v_p >_p}$$

ملاحظه ۱.۱.۴. برای $r \geq 0$، هرگاه M یک C^r-منیفلد ریمانی، فشرده با بعد متناهی و $f : M \to M$ یک دیفیومورفیسم باشد، $\mathrm{Diff}^r(M)$ فضای تمام C^r-دیفیومورفیسم‌های روی M همراه با C^r-توپولوژی می‌باشند.

تعریف ۱.۱.۵. یک **سیستم دینامیکی** روی M یک نگاشت پیوسته $\phi : M \times G \to M$ است، به‌طوری‌که

۱. $G = \mathbb{R}$ یا $G = \mathbb{Z}$

۲. $\phi(x, 0) = x$

۳. برای $x \in M$ و $s, t \in G$، $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t)$

اگر $G = \mathbb{Z}$ آن‌گاه ϕ یک سیستم دینامیکی **گسسته** و اگر $G = \mathbb{R}$ آن‌گاه ϕ یک سیستم دینامیکی **پیوسته** روی M نامیده می‌شود.

ملاحظه ۱.۱.۶. هدف اصلی سیستم‌های دینامیکی، مطالعه ساختار توپولوژیکی مدارهای f می‌باشد که f می‌تواند یک همیومورفیسم و یا دیفیومورفیسم باشد.

تعریف ۷.۱.۱. **مدارهای مثبت** و **منفی x** از M به‌ترتیب عبارتند از

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) \ : \ n \geq 0\} \quad , \quad \mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) \ : \ n \geq 0\}$$

همچنین $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ را **مدار x** می‌نامیم، یا به‌طور هم‌ارز $\mathcal{O}_f(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(x)$.

تعریف ۸.۱.۱. برای هر $\delta > 0$، دنباله‌ای از نقاط مانند $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ در M را یک **δ-شبه مدار** برای f گوییم، هرگاه برای هر $a \leqslant i \leqslant b-1$،

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta \ ; \ \ 0 \leq i \leq n-1$$

تعریف ۹.۱.۱. برای هر همیومورفیسم f و $x \in M$ گوییم

۱. x یک **نقطه ثابت** برای f است، هرگاه $f(x) = x$ و یا به‌عبارتی $\mathcal{O}_f(x) = \{x\}$ و مجموعه این نقاط را با $Fix(f)$ نمایش می‌دهیم.

۲. x یک **نقطه متناوب** برای f است، هرگاه **عدد** طبیعی n موجود باشد، به‌طوری‌که $f^n(x) = x$ و یا به‌عبارتی

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$$

به کوچک‌ترین عدد nی که در رابطه فوق صدق کند، دوره تناوب x می‌گوییم و مجموعه این نقاط را با $Per(f)$ نمایش می‌دهیم.

۳. x یک **نقطه سرگردان** برای f است، هرگاه یک همسایگی U از x موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر عدد طبیعی n،

$$f^n(U) \cap U = \emptyset$$

در غیر این‌صورت x را یک **نقطه ناسرگردان** گوییم و یا به‌عبارتی، برای هر همسایگی U از x **عدد** طبیعی n موجود باشد، به‌طوری‌که

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset$$

مجموعه این نقاط را با $\Omega(f)$ نمایش می‌دهیم.

۴. x یک **نقطه زنجیر بازگشتی** برای f است، هرگاه برای هر $\delta > 0$ یک δ-شبه مدار $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ برای f از x به خودش موجود باشد، یعنی

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta \ ; \ \ 0 \leq i \leq n-1$$

همچنین $x_\circ = x_n = x$. مجموعه این نقاط را با $CR(f)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $x, y \in M$. هرگاه برای هر $\delta > \circ$ یک δ-شبه مدار $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ از f موجود باشد، به‌طوری‌که $x_a = x$ و $x_b = y$ آن‌گاه می‌نویسیم $x \rightsquigarrow y$. همچنین هرگاه $x \rightsquigarrow y$ و $y \rightsquigarrow x$ آن‌گاه می‌نویسیم $x \leftrightsquigarrow y$. رابطه $\leftrightsquigarrow$ روی $CR(f)$ یک رابطه هم‌ارزی است و کلاس‌های هم‌ارزی آن مولفه‌های زنجیری f نامیده می‌شود و آن را با C_f نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۰. برای هر همیومورفیسم f و $x \in M$

۱. مجموعه‌های **$\boldsymbol{\omega}$ - حدی** و **$\boldsymbol{\alpha}$ - حدی** x را به‌ترتیب با $\omega_f(x)$ و $\alpha_f(x)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega_f(x) = \{y \in M \ : \ \exists\{n_k\} \ ; \ \lim_{n_k \to \infty} f^{n_k}(x) = y\}$$
$$\alpha_f(x) = \{y \in M \ : \ \exists\{-n_k\} \ ; \ \lim_{n_k \to \infty} f^{n_k}(x) = y\}$$

یا به‌طور هم‌ارز،

$$\omega_{f(x)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \geq n} f^i(x)} \ , \ \alpha_{f(x)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \geq n} f^{-i}(x)}$$

به‌وضوح $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$.

۲. قرار می‌دهیم

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \omega_f(x)} \quad , \quad L_-(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \alpha_f(x)}$$

و **مجموعه حدی** f را با $L(f)$ نمایش می‌دهیم، به‌طوری‌که $L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$.

تعریف ۱.۱.۱۱. مجموعه $A \subset M$ یک مجموعه **$\boldsymbol{f}$-پایاست**، هرگاه $f(A) = A$.

نکته ۱.۱.۱۲. به‌وضوح $Fix(f)$، $L(f)$، $\Omega(f)$ و $CR(f)$ مجموعه‌هایی بسته و f-پایا هستند، اما $Per(f)$ در حالت کلی در M بسته نیست. همچنین داریم

$$\overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f),$$

$$K(f) = K(f^{-1}) \ ; \ K = Fix, Per, \Omega, CR.$$

(برای جزئیات بیشتر به [۴۲] رجوع کنید.)

۱-۲ مفاهیم توپولوژیکی

تعریف ۱.۲.۱. دو همیومورفیسم $f : X \to X$ و $g : X \to X$ را **مزدوج توپولوژیک** گوییم، هرگاه همیومورفیسم $h : X \to X$ موجود باشد، به‌طوری‌که $hf = gh$.

نکته ۲.۲.۱. به‌وضوح، مزدوج توپولوژیکی یک رابطه هم‌ارزی روی فضای تمام همیومورفیسم‌هاست. (برای جزئیات بیشتر به [۹] رجوع کنید.)

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند، برای هر همیومورفیسم $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ گوییم f با g، **ϵ-مزدوج** است، هرگاه همیومورفیسمی مانند $h : X \to Y$ که $d(h, id) \leqslant \epsilon$ موجود باشد، به‌طوری‌که $hf = gh$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید X یک فضای متریک باشد. گوییم $\mathcal{R} \subset X$ یک **مجموعه مانده‌ای** در X است، هرگاه شامل اشتراک شمارایی از زیر مجموعه‌های باز و چگال در X باشد.

نکته ۵.۲.۱. به‌وضوح اشتراک شمارایی از مجموعه‌های مانده‌ای، مانده‌ای است.

یادآوری می‌کنیم که Y یک فضای فشرده و 2^Y فضای تمام زیرمجموعه‌های بسته Y همراه با توپولوژی هاسدورف می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید X یک فضای متریک باشد. در این‌صورت نگاشت $\phi : X \to 2^Y$

۱. در نقطه $x_\circ \in X$ **نیمه پیوسته پایینی** است، اگر به‌ازای هر مجموعه باز $U \subset Y$ داشته باشیم

$$U \cap \phi(x_\circ) \neq \emptyset,$$

آن‌گاه یک همسایگی V از $x_\circ$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in V$،

$$U \cap \phi(x) \neq \emptyset.$$

۲. در نقطه $x_1 \in X$ **نیمه پیوسته بالایی** است، هرگاه به‌ازای هر مجموعه فشرده $K \subset Y$ داشته باشیم

$$K \cap \phi(x_1) = \emptyset,$$

آن‌گاه همسایگی W از x_1 وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in W$،

$$K \cap \phi(x) = \emptyset.$$

قضیه ۱.۲.۷. *فرض کنید نگاشت $\phi : X \to 2^Y$ نیمه پیوسته پایینی (یا نیمه پیوسته بالایی) باشد، در این‌صورت یک مجموعه مانده‌ای $\mathcal{R} \subset X$ وجود دارد، به‌طوری‌که ϕ روی $\mathcal{R}$ پیوسته است.*

اثبات. (ر.ک.به [۲۴]). □

تعریف ۱.۲.۸. همیومورفیسم f را **ترایا توپولوژیک** نامند، هرگاه برای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V در M عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

قضیه ۱.۲.۹. *f ترایا توپولوژیک است، اگر و تنها اگر یک زیرمجموعه مانده‌ای مانند $\mathcal{R}$ در M موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathcal{R}$، $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = M$.*

اثبات. (ر.ک.به [۴۲]). □

تعریف ۱.۲.۱۰. همیومورفیسم f را **آمیخته توپولوژیک** نامند، هرگاه برای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V در M عدد صحیح مثبت n_0 وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $n \geq n_0$،

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

نکته ۱.۲.۱۱. بدیهی است که هرگاه f آمیخته توپولوژیکی روی مجموعه پایای K باشد، در این‌صورت f ترایا توپولوژیکی روی K نیز خواهد بود.

تعریف ۱.۲.۱۲. مجموعه ترایای $\Lambda \subset M$ را **ترایای بیشین** گوییم، هرگاه شامل هر مجموعه ترایای T باشد که در رابطه $T \cap \Lambda \neq \emptyset$ صدق می‌کند.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنید S یک زیرمجموعه از M باشد، گوییم Λ یک مجموعه **پایای بیشین** برای f در S است، هرگاه داشته باشیم $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(S)$.

تعریف ۱.۲.۱۴. مجموعه فشرده و f-پایای Λ **منفرد (یا موضعی بیشین)** نامیده می‌شود، هرگاه Λ در یک همسایگی U از Λ پایای بیشین باشد. در این حالت U را یک همسایگی منفرد از Λ گویند.

تعریف ۱.۲.۱۵. مجموعه فشرده و f-پایای Λ را **Ω-منفرد** نامند، هرگاه $\Omega(f) \setminus \Lambda$ در $\Omega(f)$ یک مجموعه بسته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. به مجموعه فشرده و f-پایای Λ **اشباع شده** گوییم، هرگاه

$$W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) = \Lambda.$$

تعریف ۱.۲.۱۷. گوییم f **C^r-پایدار ساختاری** است، اگر و تنها اگر یک C^r-همسایگی از f مانند $\mathcal{U}$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $g \in \mathcal{U}$، f و g مزدوج توپولوژیک باشند. یعنی، همیومورفیسم $h : M \to M$ موجود باشد که $gh = hf$.

تعریف ۱.۲.۱۸. f **C^r-Ω-پایدار** است، اگر و تنها اگر یک C^r-همسایگی از f مانند $\mathcal{U}$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $g \in \mathcal{U}$، همیومورفیسم $h : \Omega(f) \to \Omega(g)$ موجود باشد که $gh = hf$.

ملاحظه ۱.۲.۱۹. پایداری ساختاری، Ω-پایداری را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۱.۲.۲۰. f **C^r-پایدار موضعی** است، اگر و تنها اگر یک C^r-همسایگی از f مانند $\mathcal{U}$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $g \in \mathcal{U}$، همیومورفیسم $h : U \subset M \to U$ موجود باشد که $gh = hf$.

۱-۳ نظریه ارگودیک

تعریف ۱.۳.۱. گردایه ناتهی $\mathcal{A} \subset ۲^X$ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک **σ-جبر** روی X گوییم، هرگاه

(۱) $X \in \mathcal{A}$

(۲) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(۳) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

هرگاه $\mathcal{A}$ یک σ-جبر باشد، $(X, \mathcal{A})$را فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathcal{A}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر گوییم.

تعریف ۱.۳.۲. **اندازه μ** روی $\mathcal{A}$ یک تابع (نامتناهی) نامنفی روی $\mathcal{A}$ است، به‌طوری‌که σ- جمعی است. یعنی، برای هر گردایه شمارا از مجموعه‌های مجزای $A_i \in \mathcal{A}$،

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i).$$

تعریف ۱.۳.۳. یک مجموعه از اندازه صفر را **مجموعه پوچ** (تهی) گوییم و متمم مجموعه پوچ را یک مجموعه با **اندازه کامل** گوییم. σ-جبر $\mathcal{A}$ کامل است (نسبت به μ) هرگاه هر زیرمجموعه از مجموعه پوچ را شامل شود.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. μ را یک **اندازه احتمالی** گوییم، هرگاه $\mu(X) = ۱$.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. کوچک‌ترین σ-جبر مانند β در X هست، به‌طوری‌که هر مجموعه باز درX به β تعلق دارد. اعضای β را **مجموعه‌های برل** گویند و اندازه μ روی β را **اندازه برل** گوییم، هرگاه اندازه هر مجموعه فشرده متناهی باشد.

نکته ۶.۳.۱. به‌وضوح، مجموعه G_δ که اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز می‌باشد و F_σ که اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته می‌باشد، مجموعه‌های برل هستند.

تعریف ۷.۳.۱. μ یک **اندازه f-پایا**ست، هرگاه برای هر مجموعه اندازه‌پذیر A، $\mu(f^{-۱}(A)) = \mu(A)$.

تعریف ۸.۳.۱. اندازه μ **σ -متناهی** است، هرگاه X اجتماع شمارا از زیرمجموعه‌های اندازه متناهی باشد.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید (X, α, μ) و (Y, β, ν) فضاهای اندازه باشند. نگاشت $T : X \to Y$ **اندازه‌پذیر** است، هرگاه پیش‌تصویر هر مجموعه اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر باشد.
یک نگاشت اندازه‌پذیر T را **نامنفرد** گوییم، هرگاه پیش‌تصویر هر مجموعه از اندازه صفر، اندازه صفر داشته باشد، و T را **حافظ اندازه** گوییم، هرگاه برای هر $B \in \beta$، $\mu(T^{-۱}(B)) = \nu(B)$.
یک نگاشت نامنفرد از یک فضای اندازه به خودش یک **تبدیل** نامیده می‌شود. هرگاه تبدیل T اندازه μ را حفظ کند، آن‌گاه μ را **T-پایا** گوییم.

یک خاصیت به مانده صفر در X برقرار است یا μ-تقریباً همه جا $(\mu.a.e)$ برقرار است، هرگاه روی یک زیرمجموعه از μ-اندازه کامل در X برقرار باشد. همچنین گاهی کلمه "اساساً" را به جای "مانده صفر" به‌کار می‌بریم.

تعریف ۱۰.۳.۱. اگر X یک فضای توپولوژیکی و μ یک اندازه برل روی X باشد، آن‌گاه محمل μ، متمم اجتماع تمام مجموعه‌های باز با اندازه صفر یا به‌طور هم‌ارز، اشتراک تمام مجموعه‌های بسته با اندازه کامل است.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنیم μ و ν اندازه‌های متناهی روی X با σ-جبر $\mathcal{A}$ باشند. ν را **مطلقاً پیوسته** نسبت به μ گوییم و می‌نویسیم $\nu \ll \mu$، هرگاه برای هر $A \in \mathcal{A}$، اگر $\mu(A) = ۰$ آن‌گاه $\nu(A) = ۰$.

اگر $\nu \ll \mu$، آن‌گاه قضیه رادون-نیکودیم[۱] نشان می‌دهد که یک تابع $L^۱$ که با $\frac{d\nu}{d\mu}$ (مشتق رادون-نیکودیم) نشان داده می‌شود، وجود دارد که برای هر $A \in \mathcal{A}$ داریم $\nu(A) = \int_A (\frac{d\nu}{d\mu})(x) d\mu$.

[۱] Radon-Nikodym

قضیه ۱.۳.۱۲. *(رادون-نیکودیم)*
فرض کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه σ-متناهی و اندازه ν روی $\mathcal{A}$ تعریف شده نسبت به μ پیوسته مطلق باشد. در این‌صورت یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی f وجود دارد به‌طوری‌که برای هر مجموعه $A\in\mathcal{A}$، $\nu(A)=\int_A fd\mu$ و تابع f یکتاست، یعنی برای هر g که در این خاصیت صدق کند داریم

$$g=f \quad \mu.a.e.$$

قضیه ۱.۳.۱۳. *(بازگشتی پوانکاره[۲])*
فرض کنید T یک تبدیل حافظ اندازه از یک فضای احتمالی $(X,\mathcal{A},\mu)$ باشد. هرگاه A یک مجموعه اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه برای تقریباً هر $x\in A$، $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد، به‌طوری‌که $T^n(x)\in A$. در نتیجه برای تقریباً هر $x\in A$، تعداد نامتناهی $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد، به‌طوری‌که $T^k(x)\in A$.

اثبات. (ر.ک.به [۹]). $\square$

گزاره ۱.۳.۱۴. *فرض کنید X یک فضای متریک تفکیک‌پذیر و μ یک اندازه احتمالی برل روی X باشد و $f:X\to X$ یک تبدیل حافظ اندازه پیوسته باشد. آن‌گاه تقریباً هر نقطه بازگشتی است و $\mathrm{supp}(\mu)\subset\overline{R(f)}$.*

اثبات. (ر.ک.به [۹]). $\square$

تعریف ۱.۳.۱۵. فرض کنید T یک تبدیل حافظ اندازه روی یک فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ باشد. یک تابع اندازه‌پذیر $f:X\to X$ **اساساً T-پایاست**، هرگاه

$$\mu(\{x\in X: f(T(x))\neq f(x)\})=0.$$

یک مجموعه اندازه‌پذیر A **اساساً T-پایاست**، هرگاه تابع مشخصه‌اش 1_A اساساً T-پایا باشد یا به‌طور هم‌ارز، هرگاه $\mu(T^{-1}(A)\Delta A)=0$.

ملاحظه ۱.۳.۱۶. Δ تفاضل متقارن $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ را بیان می‌کند.

تعریف ۱.۳.۱۷. یک تبدیل حافظ اندازه (یا شار) T **ارگودیک** است، هرگاه هر مجموعه اندازه‌پذیر اساساً T-پایا، اندازه صفر یا اندازه کامل دارد. به‌طور هم‌ارز، T **ارگودیک** است، هرگاه هر تابع اندازه پذیر اساساً T-پایا به مانده صفر ثابت باشد.

[۲] Poincare