بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خداوند بخشنده مهربان

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده مدیریت و حسابداری

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد مدیریت مالی

عنوان پایان‌نامه

مدل‌سازی و پیش‌بینی بازده بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل‌های ARFIMA و FIGARCH

استاد راهنما

دکتر شاپور محمدی

استاد مشاور

دکتر اسماعیل فدائی‌نژاد

نگارش

سعید شعرائی

تابستان ۱۳۸۸

سپاس‌گزاری

خداوند متعال را شاکرم که توانستم تحقیق خود را با موفقیت به پایان رسانم.

صمیمانه‌ترین سپاس و تشکر خود را به حضور اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر محمدی و جناب آقای دکتر فدائی‌نژاد، که با راهنمایی‌های بی‌دریغ خود دشواری‌های مسیر تحقیق را بر من هموار نموده و در تدوین این پایان‌نامه زحمات بسیاری متحمل شدند، تقدیم می‌دارم. از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر دکتر عالم‌تبریز و جناب آقای دکتر صادقی‌شریف بخاطر قبول زحمت در خصوص داوری این پایان‌نامه کمال تشکر را دارم. همچنین برخود واجب می‌دانم که از زحمات و الطاف جناب آقای دکتر جهانخانی که درس‌های بسیاری از ایشان آموختم تشکر نمایم.

نام خانوادگی: شعرائی	نام: سعید
دانشکده: مدیریت و حسابداری	رشته تحصیلی و گرایش: مدیریت مالی
نام استاد راهنما: دکتر شاپور محمدی	تاریخ فراغت از تحصیل: ۱۳۸۸/۰۵/۱۴

عنوان پایان‌نامه: مدل‌سازی و پیش‌بینی بازده بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل‌های ARFIMA و FIGARCH

چکیده

طی دهه گذشته، فرآیندهای با حافظه بلندمدت به بخش مهمی از تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی تبدیل گشته‌اند و وجود مولفه حافظه بلندمدت در بازده دارائی‌ها شواهد مهمی برای بسیاری از پارادایم‌های مورد استفاده در تئوری‌های نوین مالی ارائه کرده است. اگر بازده دارائی‌ها دارای حافظه بلندمدت باشد، بازده دارای مولفه‌ای قابل پیش‌بینی است که با استفاده از آن می‌توان از بازده گذشته، بازده آینده دارائی را پیش‌بینی نمود. بنابراین حافظه بلندمدت شواهدی بر علیه شکل ضعیف کارائی بازار ارائه خواهد نمود، بعلاوه این ویژگی تاثیرات پایه‌ای بر روش های پیش‌بینی سری‌های زمانی گذاشته است.

در این تحقیق ابتدا وجود حافظه بلندمدت در سری زمانی بازده و نوسانات بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران بررسی شده است. نتایج آزمون‌های آماری، وجود حافظه بلندمدت در گشتاورهای اول و دوم بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را تا سطح اطمینان بالایی تائید می‌کنند. در ادامه قابلیت پیش‌بینی مدل‌هایی که ویژگی حافظه بلندمدت سری زمانی بازده را در نظر نمی‌گیرند، ARMA و GARCH، با مدل‌هایی که این ویژگی را درنظر می‌گیرند، ARFIMA و FIGARCH، در بازه‌های زمانی مختلف مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد مدل نسبتا ساده ARMA، در مقایسه با سایر مدل‌ها، بهتر می‌تواند بازده یک روز بعد شاخص را پیش‌بینی کند؛ اما در پیش‌بینی بازده شاخص برای دوره‌های هفتگی، ماهانه، فصلی و شش‌ماهه، مدل FIGARCH همواره پیش‌بینی‌های دقیق‌تری ارائه کرده است.

امضاء استاد راهنما

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست نمودارها

فصل اول

کلیات تحقیق

۱- کلیات تحقیق

۱-۱- مقدمه

حافظه بلندمدت[1] (که آن را وابستگی با دامنه بلندمدت[2]، وابستگی قوی[3] و ماندگاری[4] نیز می‌نامند) ساختار همبستگی مقادیر یک سری زمانی را در فواصل زمانی زیاد توضیح می‌دهد. وجود حافظه بلندمدت در یک سری زمانی به این معنی است که بین داده‌های آن حتی با فاصله زمانی زیاد همبستگی وجود دارد. طی دهه گذشته، بخش مهمی از تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی به فرآیندهای با حافظه بلندمدت معطوف شده و وجود حافظه بلندمدت در بازده دارائی‌ها شواهد مهمی برای بسیاری از پارادایم‌های موجود در تئوری‌های نوین مالی ارائه کرده است. به عنوان مثال، تصمیمات مصرف/سرمایه‌گذاری و تشکیل سبد سهام بهینه، درصورتی‌که بازده سهام دارای ویژگی حافظه بلندمدت باشد، به بازه زمانی سرمایه‌گذاری بسیار حساس می‌باشند. همچنین آزمون‌های سنتی مدل قیمت‌گذاری دارائی‌های سرمایه‌ای و همچنین تئوری قیمت‌گذاری آربیتراژ، از آن‌جا که روش عمومی استنباط آماری به‌کار رفته در این آزمون‌ها ویژگی حافظه بلندمدت را درنظر نمی‌گیرد، دیگر اعتبار نخواهند داشت (لو، ۱۹۹۱). اگر بازده دارائی‌ها دارای حافظه بلندمدت باشد، با استفاده از بازده‌های گذشته آن می‌توان بازده آینده آن را پیش‌بینی نمود. بنابراین حافظه بلندمدت شواهدی بر علیه شکل ضعیف

---

[1] Long Memory

[2] Long-range dependence

[3] Strong dependence

[4] Persistence

کارائی بازار ارائه می‌کند. بعلاوه این ویژگی تاثیرات اساسی بر روش‌های پیش‌بینی سری‌های زمانی گذاشته است. بسیاری از نتایج تئوریک و روش‌های عملی که برای تجزیه و تحلیل سری-های زمانی با حافظه کوتاه مدت استفاده می‌شد، دیگر برای سری‌های زمانی با حافظه بلندمدت مناسب نبوده و نیازمند مدل‌های جایگزین هستیم.

۱-۲- تعریف موضوع و اهمیت مسئله

سرمایه‌گذاران هنگام بررسی فرصت‌های سرمایه‌گذاری در یک دارائی یا مجموعه‌ای از دارائی‌ها به دنبال حداکثرکردن بازده و حداقل کردن ریسک دارائی یا سبد دارائی‌های خود هستند و در فرآیند تصمیم‌گیری مایلند بدانند قیمت دارائی‌های مختلف در آینده چگونه و تحت تاثیر چه عواملی تغییر می‌کند و سرمایه‌گذاری‌شان با چه ریسکی مواجه خواهد بود.

پیش‌بینی بازده یک یا چند دارائی بخش مهمی از ادبیات مربوط به مدیریت سبد دارائی‌ها را به خود اختصاص داده است. این سوال که "آیا قیمت دارائی‌ها قابل پیش‌بینی هستند؟" مدت‌هاست که توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است و بررسی عوامل اثرگذار بر قیمت بخش عمده‌ای از این تلاش‌ها بوده است و پیچیدگی زمانی بیشتر آشکار خواهد شد که دریابیم با تعداد زیادی متغیر که خود نیز با یکدیگر ارتباط دارند مواجهیم.

علاوه بر پیش‌بینی بازده، پیش‌بینی نوسانات[1] نیز فعالیتی بسیار مهم در بازارهای مالی است که توجه دانشگاهیان و سرمایه‌گذاران حرفه‌ای را طی دو دهه گذشته به خود جلب کرده است. تحقیقات بسیار زیاد در این زمینه نشان‌دهنده اهمیت بررسی نوسانات در تصمیمات سرمایه‌گذاری، ارزشگذاری دارائی‌ها، مدیریت ریسک و سیاست‌گذاری پولی است. نوسانات

[1] Volatility

زمانی که به صورت عدم‌اطمینان تفسیر گردد ورودی بسیاری از تصمیمات سرمایه‌گذاری و تشکیل پرتفوی خواهد بود. سرمایه‌گذاران و مدیران پرتفوی قادر به پذیرش سطح مشخصی از ریسک هستند و پیش‌بینی مناسب نوسانات قیمت دارائی طی دوره سرمایه‌گذاری نقطه شروع بسیار مناسبی برای ارزیابی ریسک سرمایه‌گذاری است. همچنین نوسانات مهمترین متغیر در قیمت‌گذاری اوراق مشتقه می‌باشد که حجم معاملات‌شان در سال‌های اخیر چهار برابر شده است (پون و گرنجر، ۲۰۰۳).

مطالعات سنتی روی سری‌های زمانی بازده، با فرض نرمال بودن تابع چگالی و مستقل و یکسان بودن توزیع آن انجام می‌شد. اما بعداً شواهد زیادی نشان داد که این فروض در مورد سری‌های زمانی بازده صادق نیست. سری‌های زمانی مالی و نوسانات بازارهای مالی دارای ویژگی‌های خاصی هستند. مثلاً توزیع بازده‌ها دارای ویژگی‌های دنباله پهن[1] و قله بلند، بازگشت به میانگین[2]، واریانس ناهمسان[3]، خوشه‌ای بودن نوسانات[4] و حرکت توام نوسانات بین دارائی‌ها و بازارهای مالی مختلف هستند. یافته‌های اخیر نشان می‌دهد همبستگی بین نوسانات قویتر از همبستگی بین بازده‌ها است و این‌دو در زمان بازار رکودی[5] و بحران‌های مالی افزایش می‌یابند (پون و گرنجر، ۲۰۰۳).

یکی از اولین اقدامات در مطالعه سری‌های زمانی بررسی ساختار همبستگی آن سری است و یکی از مفروضات کلاسیک در تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی این بوده است که تابع خودهمبستگی به صورت نمائی در طول زمان از بین می‌رود. تحت فرض کلاسیک، باکس و

---

[1] Fat tail

[2] Mean reversion

[3] Heteroscedasticity

[4] Volatility clustering

[5] Bear Market

جنکینز (۱۹۷۰) مدل‌های ARMA[1] و ARIMA[2] را به عنوان مدل‌هایی که قادرند مکانیزم ایجاد داده‌ها در این نوع سری‌ها را شبیه‌سازی کنند، معرفی نمودند. اما مثال‌ها و حوزه‌های زیادی وجود دارد که فرض مذکور در خصوص آن‌ها صادق نیست. یکی از ویژگی‌های بارز سری‌هایی که فروض کلاسیک در خصوص آن‌ها صادق نیست، وجود همبستگی قوی میان داده‌هایی است که با فاصله زمانی زیاد از یکدیگر در طول سری قرار دارند و سری برای مدت زمانی طولانی بالا و پائین سطح مشخصی نوسان می‌کند و الگویی را تشکیل می‌دهد که آن را ماندگاری می‌نامند. ماندگاری یا کاهش آرام همبستگی را وابستگی با دامنه بلندمدت یا حافظه بلندمدت نیز می‌نامند. هنگامی که تابع خودهمبستگی سری با چنان نرخ آهسته‌ای کاهش یابد که مجموع قدرمطلق آن واگرا باشد، سری زمانی مانا دارای ویژگی وابستگی با دامنه بلندمدت خواهد بود.

در این تحقیق ابتدا وجود حافظه بلندمدت در بازده و نوسانات شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران آزمون شده است. سپس بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل‌هایی که ویژگی حافظه بلندمدت سری‌زمانی را درنظر می‌گیرند (مدل‌های ARFIMA[3] و FIGARCH[4]) و مدل‌هایی که این ویژگی را درنظر نمی‌گیرند (مدل‌های ARMA و GARCH[5]) مدل شده است. در نهایت دقت پیش‌بینی این مدل‌ها در افق‌های زمانی مختلف مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است.

---

[1] Autoregressive moving average

[2] Autoregressive integrated moving average

[3] Autoregressive fractionally integrated moving average

[4] Fractionally integrated GARCH

[5] Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity

۱-۳- فرضیه‌های تحقیق

دو سوال کلی که این تحقیق به دنبال پاسخ‌گویی به آن‌ها می‌باشد عبارتند از: ۱- آیا بازده و نوسانات بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران دارای حافظه بلندمدت هستند؟ و ۲- آیا دقت پیش‌بینی بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل‌هایی که حافظه بلندمدت را درنظر می‌گیرند، بیشتر از مدل‌هایی است که حافظه بلندمدت را درنظر نمی‌گیرند؟

با توجه به سوال‌های مطرح شده، فرضیه‌های این تحقیق عبارتند از:

۱- بازده و نوسانات بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران دارای حافظه بلندمدت است.

۲- دقت پیش‌بینی بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل‌هایی که حافظه بلندمدت را درنظر می‌گیرند، بیشتر از مدل‌هایی است که حافظه بلندمدت را درنظر نمی‌گیرند.

۱-۴- پیشینه تحقیق

با وجود آن‌که مدل‌های حافظه بلندمدت از حدود سال ۱۹۸۰ مورد استفاده اقتصاددانان قرار گرفته‌اند، این مدل‌ها نقش مهمی در علم فیزیک از حدود سال‌های ۱۹۵۰ داشته‌اند. در حوزه‌هایی همچون آب‌شناسی و هواشناسی تحقیقات بسیاری با استفاده از مدل‌های حافظه بلندمدت صورت پذیرفته که یک مثال معروف از این دسته تحقیقات، تحقیق هارست (۱۹۵۱) بر روی ماندگاری داده‌های حاصل از جریان آب رود نیل با استفاده از آماره R/S است. مندلبروت (۱۹۷۱) اولین شخصی بود که با استفاده از آماره R/S به بررسی ماندگاری بازده

دارائی‌های مالی پرداخت. این آماره بعداً توسط لو (۱۹۹۱) با کنترل تاثیر همبستگی‌های کوتاه مدت تصحیح گشت.

گرنجر و جویکس (۱۹۸۰) مدل میانگین متحرک انباشته جزئی خودهمبسته (ARFIMA) را به منظور توضیح حافظه بلندمدتی که در میانگین شرطی مشاهده کرده بودند، از طریق بسط مدل متداول ARIMA ارائه کردند. پس از آن محققان بسیاری به بررسی وجود حافظه بلندمدت و همچنین مدل‌سازی بازده سهام، نرخ ارز و قراردادهای آتی با استفاده از این مدل پرداختند. رایت (۱۹۹۹) شواهدی مبنی بر وجود حافظه بلندمدت در بازارهای نوظهور کره‌جنوبی، فیلیپین، یونان، شیلی و کلمبیا یافت. اولان (۲۰۰۲) با استفاده از روش‌های پارامتریک و نیمه‌پارامتریک به بررسی وجود حافظه بلندمدت در بازده نه شاخص سهام بین-المللی پرداخت. نتایج تحقیق او حاکی از وجود حافظه بلندمدت در بازارهای آلمان، ژاپن، کره جنوبی و تایوان بود، در حالی که بازارهای آمریکا، انگلستان، هنگ‌کونک، سنگاپور و استرالیا فاقد نشانه‌های حافظه بلندمدت بودند.

علاوه بر مطالعه میانگین شرطی سری زمانی، بسیاری از مطالعات به بررسی نوسانات داده‌های اقتصادی و مالی پرداختند، از جمله بریدت و همکاران (۱۹۹۸)، دینگ و گرنجر و انگل (۱۹۹۳) و هاروی (۱۹۹۳)، و نشان دادند که نوسانات سری‌های زمانی مالی پایدار می‌باشند. یک روش مدل‌سازی ماندگاری نوسانات توسط بایلی، بولرسلف و میکلسن (۱۹۹۶) و بولرسلف و میکلسن (۱۹۹۶) ارائه گشت، مدل آن‌ها، FIGARCH، را می‌توان بسط مدل IGARCH محسوب کرد که در آن به ضرائب خودهمبستگی اجازه داده می‌شد مراتب جزئی انباشتگی را اتخاذ کنند. همچنین آن‌ها نشان دادند که خاصیت حافظه بلندمدت در نوسانات نرخ مارک-دلار وجود دارد. مهمترین مشخصه مدل FIGARCH آن بود که واریانس شرطی نه تنها دینامیک کوتاه مدت نوع ARMA را نشان می‌داد، همانطور که در مورد مدل GARCH

استاندار صدق می‌کند، بلکه ماندگاری بلندمدت نوسانات را که با نرخ هذلولوی کاهش می‌یافت را نیز می‌توانست مدل‌سازی کند (به جای نرخ نمائی که در خصوص مدل‌های GARCH صادق بود).

۱-۵- تعاریف و مفاهیم

سری زمانی: سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که به صورت پشت سرهم در طول زمان تولید می‌شوند. سری زمانی را پیوسته گوئیم اگر این مجموعه پیوسته و گسسته گوئیم اگر این مجموعه گسسته باشد. سری‌های زمانی پیوسته را با نماد $\{y_t, t \in T\}$ که T مجموعه اندیس‌ها است و سری زمانی گسسته را با $\{y_t, t \in Z\}$ که Z مجموعه اعداد صحیح است و یا با $\{y_t\}$ برای $t = \pm 1, \pm 2, \ldots$ نمایش می‌دهیم.

فرآیند تصادفی[1]: خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی $\{y_t, t \in T\}$ است که روی یک فضای احتمال تعریف شده باشد.

متغیرهای تصادفی دارای توزیع یکسان و مستقل[2]**(i.i.d)**: در تئوری احتمال و آمار یک سری و یا مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی را دارای توزیع یکسان و مستقل می‌نامند، اگر هر متغیر تصادفی توزیع احتمال یکسان با سایر متغیرها داشته و همگی مستقل از یکدیگر باشند.

فرآیند مانای اکید: یک فرآیند تصادفی را مانای اکید گوئیم، هرگاه به ازاء تمامی مقادیر $t_1, t_2, \ldots, t_n$ و h توزیع توأم $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ مانند توزیع توأم $Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \ldots, Y_{t_n+h}$ باشد یعنی:

---

[1] Stochastic process

[2] Independently and identically-distributed random variables

$$F_{Y_{t_1},Y_{t_2},\dots,Y_{t_n}}(y_1,\dots,y_n) = F_{Y_{t_1+h},Y_{t_2+h},\dots,Y_{t_n+h}}(y_1,\dots,y_n) \qquad (۱-۱)$$

یعنی اگر زمان اولیه را به اندازه h تغییر مکان دهیم، بایستی روی توزیع‌های توأم تأثیری حاصل نشود.

فرآیند مانای مرتبه دوم (مانای ضعیف): اغلب لازم است که خاصیت مانایی را به شکلی تعریف کنیم که محدودیت کمتری حاشته باشد، لذا یک فرآیند را مانای مرتبه دوم یا کوواریانس مانا[2] گوئیم اگر شرایط زیر را داشته باشد:

$$\begin{aligned} &i)\ E(y_t) = \mu \quad \forall t \in T \\ &ii)\ E(y_t - \mu)^2 = \sigma_y^2 < \infty \quad \forall t \in T \\ &iii)\ cov(y_t, y_{t-j}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = \gamma_j \end{aligned} \qquad (۲-۱)$$

(برای تمامی tها و jها)

اگر فرآیندی کوورایانس مانا باشد، کوواریانس میان y_t و y_{t-j} تنها به j، فاصله زمانی میان دو مشاهده، بستگی دارد و وابسته به t، زمان مشاهدات، نیست. در این متن هرگاه اصطلاح مانایی را به تنهایی به کار می‌بریم منظور مانا یی ضعیف است، مگر جائی‌که صریحاً ذکر گردد.

نوفه سفید: نوفه سفید[3] یا نویز سفید از ساده‌ترین سری‌های زمانی مانای اکید بوده و یک سری کاملا تصادفی می‌باشد. این سری را معمولا با ε_t نشان داده و دارای خواص زیر است:

$$\begin{aligned} &E(\varepsilon_t) = 0 \\ &E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

---

[1] Strictly stationary process

[2] Covariance stationary

[3] White noise

$E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = 0 \quad t \neq \tau$ برای

فرآیند اتورگرسیو[1]: دنباله تصادفی r_t یک فرآیند اتورگرسیو از درجه p یا AR(p) است، اگر داشته باشیم:

$$r_t = \delta + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \cdots + \phi_p r_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۴-۱)$$

$$\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

فرآیند میانگین متحرک[2]: دنباله تصادفی r_t را یک فرآیند تصادفی میانگین متحرک با مرتبه q یا MA(q) می‌نامند، اگر داشته باشیم:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (۵-۱)$$

$$\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

فرآیند میانگین متحرک اتورگرسیو[3]: دنباله تصادفی r_t را یک فرآیند تصادفی میانگین متحرک اتورگرسیو از مرتبه p و q و یا ARMA(p,q) می‌نامند، چنانچه داشته باشیم:

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \cdots + \phi_p r_{t-p} + \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (۶-۱)$$

$$\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

---

[1] Autoregressive process

[2] Moving Average process

[3] Autoregressive moving average process

تـــابع اتوکوواریـــانس: γ_j را اتوکواریـانس بـا وقفـه j بـرای فرآینـد y_t گـوئیم و بصـورت $\gamma_j = Cov(y_t, y_{t+j})$ تعریف می‌کنیم. اگر γ_j را بعنوان تابعی از j (بر حسب وقفه[1] j) در نظر بگیریم به این تابع، تابـع اتوکوواریانس[2] فرآیند تصادفی می‌گوئیم و با $\{\gamma_j\}$ نمایش می‌دهیم.

تابع خودهمبستگی: ρ_j را ضریب خودهمبستگی بـا وقفـه j بـرای فرآینـد y_t مـی‌گـوئیم و بصورت عبارت (۱-۷) که در آن $\gamma_0 = Var(y_t)$ است، نمایش می‌دهیم:

$$\rho_j = \frac{Cov(y_t, y_{t-j})}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_{t-j})}} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \qquad (۷-۱)$$

اگر ρ_j را بعنوان تابعـی از j (بر حسب وقفه j) در نظر بگیریم به این تابع، تابع خودهمبستگی[3] فرآیند تصادفی می‌گوئیم و با $\{\rho_j\}$ نمایش می‌دهیم. وقفه j اتوکوواریـانس نمونـه و همچنـین وقفه j خودهمبستگی نمونه به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}) \qquad (۸-۱)$$

$$\hat{\rho}_j = \frac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_0}$$

در جایی‌که $\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ میانگین نمونه است. اگر $\hat{\rho}_j$ را بعنوان تـابعی از j (بـر حسـب وقفه j) در نظر بگیریم به این تابع، تابع خودهمبستگی نمونه فرآیند تصادفی می‌گوئیم.

برخی خواص تابع خودهمبستگی: فرض کنید y_t یک فرآیند مانا بـا میـانگین μ، واریـانس σ_y^2، تابع اتوکوواریانس $\{\gamma_j\}$ و تابع خودهمبستگی $\{\rho_j\}$ باشد، آنگاه داریم:

---

[1] Lag

[2] Autocovariance Function

[3] Autocorrelation Function (ACF)

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1 \quad , \quad \rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{\gamma_j}{\sigma_y^2} \qquad (۱-۹)$$

خاصیت ۱: تابع خودهمبستگی تابعی متقارن نسبت به وقفه است یعنی $\rho_j = \rho_{-j}$

خاصیت ۲: همواره داریم $|\rho_j| \leq 1$

خاصیت ۳: نایکتایی، یک فرآیند نرمال مانا به طور کامل توسط میانگین، واریانس و تابع خودهمبستگی آن تعیین می‌شود و به هر تابع اتوکوواریانس خاص فقط یک فرآیند نرمال مانا مربوط می‌شود. با این وجود پیدا کردن بسیاری از فرآیندهای غیرنرمال که تابع خودهمبستگی آن‌ها یکسان است امکان‌پذیر می‌باشد و این موضوع مشکلات بیشتری در تعبیر و تفسیر تابع خودهمبستگی نمونه‌ای پدید می‌آورد.

مجموعه‌ای از شرایط اتوکوواریانس‌ها و خودهمبستگی‌ها که منجر به مانائی فرآیند می‌شود عبارتند از:

۱ - در یک فرآیند مانا واریانس در زمان $t+k$ و در زمان t با یکدیگر برابرند.

۲ - ماتریس اتوکواریانس فرآیند مانا برای مشاهدات $(y_1, \dots, y_n)$ که در n زمان متوالی به عمل آمده‌اند یک ماتریس متقارن است و روی هر قطر عناصر ثابتی (واریانس) دارد و ماتریس همبستگی برای مشاهدات فوق نیز متقارن و عناصر روی قطر آن عدد ۱ است و این ماتریس باید همیشه مثبت قطعی باشد (جعفری، ۱۳۷۴).

نمایش طیفی مدل‌های مانا: علاوه بر تعریف سری‌های زمانی در دامنه زمان[1]، می‌توان سری-های زمانی را در دامنه فرکانس[2] نیز تعریف نمود. در واقع روش دیگر تحلیل سری‌های زمانی بر این فرض استوار است که سری از موج‌های سینوسی و کسینوسی با فرکانس‌های متفاوت

---

[1] Time domain

[2] Frequency domain