دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

روش چندشبکه‌ای و طرح‌های گسسته‌سازی تفاضلی فشرده مرتبه بالا، با اندازه شبکه نابرابر برای حل معادلهٔ پواسون

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

محمّد زینل‌پور

استاد راهنما

دکتر مهدی تاتاری

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی) آقای محمّد زینل‌پور

تحت عنوان

روش چندشبکه‌ای و طرح‌های گسسته‌سازی تفاضلی فشرده مرتبه بالا، با اندازه شبکه نابرابر برای حل معادلهٔ پواسون

در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۲۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مهدی تاتاری
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر رضا مختاری
۳ــ استاد داور ۱	دکتر بهنام سپهریان (دانشگاه اراک)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر محمدرضا رئوفی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

تشکر و قدر

خداوند بلند مرتبه را شاکرم که در سایه‌ی الطاف بی‌پایانش انجام این مهم میسر گردید. بر خود لازم می دانم از کلیهٔ عزیزانی که در طی مدت تدوین پایان‌نامه مرا یاری نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

از زحمات و راهنمایی‌های بی‌دریغ استاد راهنمای بنده، جناب آقای دکتر تاتاری که بدون مساعدت و همکاری ایشان انجام این امر میسر نبود، کمال تشکر و امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر مختاری که مشاورهٔ این پروژه را بر عهده داشته و نیز از جناب آقای دکتر رئوفی و دکتر سپهریان که به عنوان اساتید داور، این پایان نامه را بررسی و ارزیابی نمودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از خانواده خویش و مخصوصاً پدر و مادر عزیزم سپاسگزارم که صبر و بردباری و حمایت بی‌دریغ آنها در این مدت، مایهٔ آرامش و دلگرمی من بود. امیدوارم که این تلاش، گامی هر چند کوچک در راستای ارتقا سطح علمی کشور به حساب آید.

فهرست مطالب

چکیده:

روش‌های چندشبکه‌ای به عنوان خانواده‌ای از روش‌های تکراری، از کاراترین روش‌های افزایش نرخ همگرایی دستگاه‌های حاصل از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از جمله معادلات بیضوی است. برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های چندشبکه‌ای، مؤلفه‌های مستقلی مانند عملگرهای انتقال، روش‌های هموارساز و عملگر شبکه درشت باید مشخص شوند که نحوه انتخاب هر یک از این مؤلفه‌ها می‌تواند تأثیر زیادی روی کارایی روش داشته باشد. در این پایان‌نامه، ابتدا بررسی جامعی درباره روش‌ها و اصول چندشبکه‌ای صورت گرفته است. سپس از ترکیب تقریب‌های تفاضلی مختلف با روش‌های چندشبکه‌ای برای حل معادله دیفرانسیل پواسون روی شبکه منظم استفاده شده است. در مطالعات صورت گرفته، ترکیب‌های مختلفی از مؤلفه‌های چندشبکه‌ای شامل درونیابی و درشت‌سازی پوشش داده شده است. برای انتقال ماتریس ضرایب به شبکه درشت از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل بر روی شبکه درشت استفاده شده است. نتایج عددی حاصل از مقایسه بین تقریب تفاضلی مرتبه دوم استاندارد و تقریب تفاضلی مرتبه چهارم فشرده برای حل معادله پواسون با روش‌های چندشبکه‌ای نشان می‌دهد که ترکیب تقریب تفاضلی مرتبه چهارم فشرده با روش‌های چندشبکه‌ای باعث بالا رفتن دقت جواب عددی به طور چشم‌گیری می‌شود.

واژه‌های کلیدی : چندشبکه‌ای، چندشبکه‌ای هندسی، چندشبکه‌ای غیرخطی، ناهمسانگرد، هموارسازی، درشت‌سازی، نیمه درشت‌سازی، روش‌های تکراری ایستا

لیست جدول‌ها

لیست شکل‌ها

فهرست علائم

درایه i ام و ستون j ام ماتریس ضرایب .... $a_{i,j}$
ماتریس، عملگر خطی شبکه درشت .... A^H
ماتریس، عملگر خطی شبکه ریز .... A^h
چندشبکه‌ای جبری .... AMG
روش گرادیان مزدوج .... CG
بردار خطا .... e
بردار سمت راست .... f
طرح تقریب کامل .... FAS
روش چندشبکه‌ای کامل .... FMG
فرمول پنج نقطه‌ای .... FPF
روش گوس سایدل .... GS
گوس سایدل چهار رنگی .... GS-FC
گوس سایدل الفبایی .... GS-LEX
تقریب گالرکین .... GCA
گوس سایدل قرمز سیاه .... GS-RB
پارامتر گسسته‌سازی شبکه درشت .... H
پارامتر گسسته‌سازی شبکه ریز .... h
ماتریس همانی I
عملگر تحدید .... I_h^H
عملگر درونیابی .... I_H^h
عدد موج .... k
ماتریس پایین مثلثی، عملگر خطی L

آنالیز فوریه موضعی	LFA
ماتریس تکرار روش دو شبکه‌ای	M_{2h}^{h}
تعداد زیر بازه	n
فرمول نه نقطه‌ای	NPF
معادله دیفرانسیل پاره‌ای	PDE
ماتریس تکرار	R
بردار باقیمانده	r
ماتریس معین مثبت تُنک	SPD
تقریبی از جواب دقیق	v
شعاع طیفی	ρ
بردارهای ویژه	$w_{k,j}$
ضریب هموارسازی	μ
مقدار ویژه	λ
شبکه ریز	Ω^h
شبکه درشت	Ω^H
معیار توقف	ϵ

فصل ۱

مقدمه

۱–۱ کلیات

امروزه شبیه‌سازی کامپیوتری از پدیده‌های فیزیکی و طراحی‌های مهندسی به عنوان ابزاری قدرتمند برای توسعه صنعتی به حساب می‌آیند. پشت بیشتر این مدل‌های شبیه‌سازی شده، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هستند. این معادلات اغلب بسیار پیچیده‌اند و در کل نمی‌توان آن‌ها را به صورت تحلیلی حل کرد. برای رفع این مشکل روش‌های عددی جایگزین روش‌های تحلیلی شده است. پیشرفت‌های به‌دست آمده در امر ساخت کامپیوترها که سبب افزایش حافظه و کارایی شده، امکان حل این معادلات را با استفاده از روش‌های عددی مختلفی فراهم کرده است. در کلیه روش‌های عددی، معادلات با مشتقات پاره‌ای تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری می‌شوند که برای حل این دستگاه دو روش وجود دارد: روش مستقیم و روش تکراری. در حل دستگاه معادلات به خصوص هنگامی که شبکه حاصل از گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل ریز باشد ماتریس ضرایب این دستگاه‌ها بسیار بزرگ خواهد شد که با توجه به ساختار تُنک این ماتریس‌ها، روش‌های تکراری برای حل این دستگاه معادلات پیشنهاد می‌شود. از آنجایی که طیف عظیمی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به صورت معادله بیضوی هستند، در چند دهه گذشته مقدار زیادی از تحقیقات انجام شده در جهت توسعه حل عددی این معادلات بوده است. در این پایان‌نامه به بررسی روش‌های چندشبکه‌ای برای سرعت بخشیدن به حل این مسائل می‌پردازیم. هدف از روش‌های چندشبکه‌ای کاهش زمان صرف شده توسط کامپیوتر برای حل معادلات گسسته‌سازی شده از معادلات

دیفرانسیل پاره‌ای است. در حل معادله پواسون معمولاً یکی از مسائل اساسی زمان لازم برای حل مسأله است. این مشکل با ریزتر شدن شبکه به شدت خود را نشان می دهد. روش چندشبکه‌ای قادر است بخش عظیمی از مشکل کندی همگرایی در این نوع مسائل را حل کند. از طرفی ترکیب روش‌های تفاضلات متناهی فشرده مر تبه بالا (HOC)[۱] با روش چندشبکه‌ای برای حل معادله پواسون باعث بالا رفتن دقت جواب عددی به طور چشم‌گیری می‌شود. این روش با ریزتر شدن شبکه حل، کارائی خود را بیشتر نشان می‌دهد.

۱—۲ تاریخچه

نخستین مطالعات برای ارائه و بررسی روش‌های چندشبکه‌ای توسط فدرونکو[۲] در سال‌های (۱۹۶۲ تا ۱۹۶۴) و سپس باخوالف[۳] در سال (۱۹۶۶) انجام شد. فدرونکو در اولین مقاله خود یک روش دوشبکه‌ای را برای حل معادله پواسون در یک محیط دوبعدی مستطیلی شکل به کمک یک روش گسسته‌سازی پنج نقطه‌ای ارائه داد [۱۰]. وی در مقاله بعدی خود در سال ۱۹۶۴ یک الگوریتم چندشبکه‌ای را ارائه کرد [۱۱]. باخوالف در سال ۱۹۶۶ نخستین برهان ریاضی را برای همگرایی چندشبکه‌ای پیشنهاد داد. وی همچنین امکان ترکیب روش‌های چندشبکه‌ای با تکرار تودرتو[۴] (که امروزه به نام چندشبکه‌ای کامل (FMG)[۵] شناخته می شود) را نشان داد [۱]. این پژوهش‌ها تا دهه هفتاد میلادی ادامه داشت تا این که برانت[۶] [۲، ۳] و هک‌بوش[۷] [۱۹] به طور مستقل از روس‌ها، روش‌های چندشبکه‌ای را دوباره احیا کردند و برای دامنه گسترده‌ای از مسائل توسعه دادند. تا آن زمان استفاده عملی روش‌های چندشبکه‌ای برای مسائل کاربردی ارائه نشده بود. برانت در سال ۱۹۷۳ اولین کسی بود که کارایی این روش را به صورت عملی نشان داد [۲]. سپس در مطالعات بعدی خود روش چندشبکه‌ای کامل و چندشبکه‌ای غیرخطی[۸] را ارائه کرد [۴]. این پژوهش‌ها توسط هک‌بوش، سانولد[۹] ، وسلینگ[۱۰] و دیگران در سال‌های بعدی ادامه یافت. هک‌بوش در سال ۱۹۸۵ خلاصه تمامی مهمترین از کارهای

۱ High Order Compact
۲ Fedorenko
۳ Bachvalov
۴ Nested iteration
۵ Full Multigrid
۶ Brandt
۷ Hackbusch
۸ Nonlinear multigrid
۹ Sonneveld
۱۰ Wesseling

انجام شده در روش‌های چندشبکه‌ای را جمع‌آوری کرد [۱۸]. جدول زیر که توسط مک‌کورمیک[۱۱] در سال ۱۹۸۷ ارائه شد بیانگر رشد سریع این روش از اواخر دهه هفتاد میلادی به بعد است [۳۵].

سال	۶۴	۶۶	۷۱	۷۲	۷۳	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵
تعداد مقاله	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۳	۱۱	۱۰	۲۲	۳۱	۷۰	۷۸	۹۶	۹۴	۱۴۹

یکی از کارهایی که برای بهبود اجزا چندشبکه‌ای به کار گرفته شد استفاده از تقریب گالرکین برای تشکیل عملگر شبکه درشت به جای گسسته‌سازی معادله PDE بود. از آنجا که استفاده از این ایده مستلزم استفاده مستقیم از هندسه شبکه ریز نبود این ایده را به وجود آورد که روشی بدون اتکا به هندسه مسأله ایجاد شود. این ایده توسط برانت، مک کورمیک و روژ[۱۲] تحقق بخشیده شد و در سال ۱۹۸۲ چندشبکه‌ای جبری را پایه گذاری کردند [۵]. اشتوبن[۱۳] در مقاله‌ای در سال ۲۰۰۱ خلاصه‌ای از کارهای مهم انجام شده در روش‌های چندشبکه‌ای جبری به همراه قضایای مربوط به آن راجمع آوری کرد [۳۰]. یکی از جنبه‌های مهم در چندشبکه‌ای جبری (AMG)[۱۴] قابلیت پردازش موازی است تا امکان کاربرد در مسائل بزرگ فراهم شود. نسخه دیگری از روش‌های چندشبکه‌ای تحت عنوان چندشبکه‌ای تطابقی وجود دارد که اخیراً مطالعات جدیدی در مورد استفاده از این روش برای اصلاح نسخه کلاسیک در مسائل بیضوی که دستگاه معادلات آنها M ـ ماتریس نیست صورت گرفته است. قابلیت‌های روش چندشبکه‌ای به عنوان روشی کارا به تقریب‌های گسسته‌سازی خاصی محدود نمی‌شوند و در عمل آن‌ها را می‌توان با بیشتر روش‌های گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل مانند تفاضلات متناهی، عنصر متناهی، حجم محدود (با شرایط مرزی دلخواه و ابعاد بالا) به کار برد. مهمترین کاربرد روش‌های چندشبکه‌ای به عنوان یک روش تکراری، حل دستگاه‌های حاصل از گسسته‌سازی مسائل مقدار مرزی بیضوی است. این روش‌ها در حل معادلات انتگرال، بهینه‌سازی، مهندسی کنترل، پردازش تصویر و فیزیک ذرات نیز کاربرد دارند [۳۱].

۱ــ۳ فلسفه روش‌های چندشبکه‌ای

دنباله‌ای از شبکه‌های $\Omega^1, \Omega^2, ..., \Omega^l$، را در نظر بگیرید که همگی تقریبی از ناحیه Ω با اندازه شبکه متناظر با $h_1 > h_2 > ... > h_l$ باشند. برای سادگی فرض کنید روی شبکه‌های مربعی یکنواخت با نسبت

[۱۱] McCormick

[۱۲] Ruge

[۱۳] stuben

[۱۴] Algebraic Multigrid

اندازه شبکه $۲ : ۱ = h_k : h_{k+۱}$ هستند. مسأله پیوسته به صورت $Lu = f$ در ناحیه Ω مشخص شده است. روی هر شبکه Ω^k، این مسأله به وسیله دستگاه‌های گسسته‌سازی شده به صورت:

$$L_k u_k = f_k, \qquad \text{در}\ \Omega^k$$

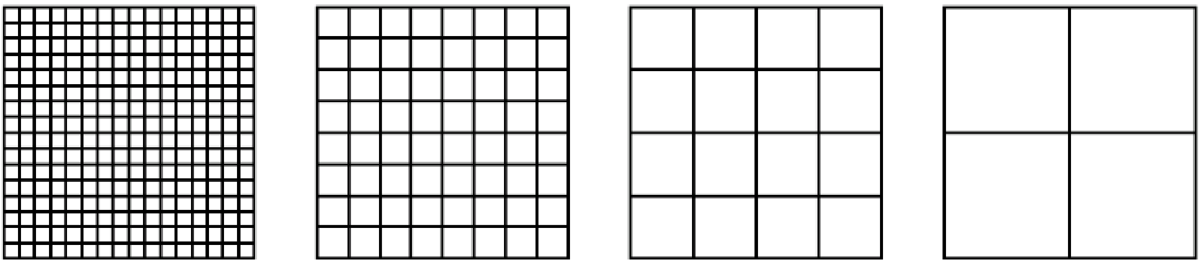
می‌تواند تقریب زده شود. ما مایل به حل این دستگاه گسسته روی ریزترین شبکه، Ω^l هستیم. ایده اصلی، بهره برداری از این واقعیت است که مسأله گسسته روی یک شبکه درشت‌تر، مانند Ω^k همان مسأله پیوسته را تقریب می‌زند و بنابراین می توان از آن به عنوان یک تقریب برای مسأله Ω^l استفاده کرد. با استفاده از نزدیکی بین مسائل Ω^k و Ω^l ، نه تنها به تولید یک تقریب اولیه خوب روی شبکه Ω^l می‌پردازیم، بلکه در فرآیندی نخستین تقریب را بهبود می‌دهیم. اگر v^l یک جواب تقریبی روی Ω^l باشد آن‌گاه :

$$r^l = f^l - Lv^l,$$

که r^l باقیمانده و جواب دقیق برابر $u^l = v^l + e^l$ است. تصحیح e^l در معادله :

$$L^k e^k = r^k,$$

صدق می‌کند. اما آیا می‌توان این معادله را برای اولین تقریب خوب از خطا با درونیابی از جواب‌های تقریبی روی شبکه درشت‌تر حل کرد؟ پاسخ در حالت کلی منفی است. هر مسأله Ω^l همواره یک تقریب معنی‌دار روی شبکه Ω^k ندارد. مثلاً اگر مقادیر سمت راست r^l نوسان‌های سریعی روی Ω^l با طول موج کمتر از $۴h^l$ داشته باشند (مؤلفه‌های فرکانس بالا). چون این نوسان‌ها روی Ω^k قابل مشاهده نیستند بنابراین نمی‌تواند توسط شبکه‌های درشت‌تر تقریب زده شوند. یک چنین باقیمانده‌های r^l به سرعت نوسانی، مانند این هستند که ما تقریب v^l را از درونیابی از جواب روی شبکه درشت‌تر به‌دست آوریم. یک راه مؤثر برای میرایی نوسانات سریع، در باقیمانده استفاده از طرح‌های تخفیف، مانند گوس سایدل و ژاکوبی است. در چند تکرار اولیه چنین روش‌هایی، باقیمانده (یا تصحیحات) به سرعت در حال کاهش از یک تکرار به تکرار بعدی هستند و دارای نرخ همگرایی سریع می‌باشند. اما طولی نمی‌کشد که نرخ همگرایی به شدت کاهش می‌یابد. تجربه نشان می‌دهد که نرخ همگرایی هنگامی سریع است که باقیمانده دارای نوسانات سریعی است. به محض اینکه باقیمانده هموار می‌شود نرخ همگرایی کاهش می‌یابد. این همان نقطه‌ای است که دقیقاً باید تخفیف متوقف شود و برای محاسبه جواب‌های تقریبی معادله‌های باقیمانده از شبکه درشت‌تر استفاده شود. روش‌های چندشبکه‌ای، روش‌های اصولی برای ترکیب تکرارهای تخفیف با جواب تقریبی معادلات باقیمانده روی شبکه‌های درشت‌تر است. نکته قابل توجه آن است که نقش روش‌های تخفیف کاهش دادن خطا نیست بلکه هموار کردن آن است [۳].



شکل ۱—۱: دنباله‌ای از شبکه‌های دو بعدی با درشت‌سازی استاندارد

برخی از ایده‌های اساسی روش‌های چندشبکه‌ای عبارتند از :

۱) استفاده از روش‌های تکراری (از نوع تخفیف) برای هموارسازی خطا.

۲) تصحیح شبکه درشت.

۳) تکرار تودرتو.

در بخش‌های بعد به طور دقیق به تحلیل موارد ذکر شده پرداخته و خواهیم دید چگونه این ایده‌های اساسی در قالب روش‌هایی با هم ترکیب، و به عنوان یکی از کاراترین روش‌های حل دستگاه معادلات مطرح می‌شوند.

۱—۴ روند ارائه مطالب

روند ارائه مطالب در این پایان‌نامه جهت تحقیق جامع و کاملی درباره کلیه روش‌های چندشبکه‌ای موجود و شناخت نقاط ضعف و قوت هر یک از این روش‌ها و سپس پیاده‌سازی روش چندشبکه‌ای هندسی به عنوان ابزاری قدرتمند برای حل انواع دستگاه‌های معادلات به شرح زیر است:

در فصل اول ابتدا به بیان کلیاتی از روش‌های چندشبکه‌ای مطرح شده در این پایان‌نامه، تاریخچه‌ای از این روش‌ها و برخی از ایده‌های اساسی روش‌های چندشبکه‌ای به منظور درک بهتر مفاهیم فصل‌های بعد پرداخته شده است. در فصل دوم، از آنجایی که هدف این پایان‌نامه حل معادله پواسون است ابتدا به طرح مسأله مُدل پرداخته، سپس انواع حل کننده‌های متداولی که برای حل مسائل بیضوی بکار می‌روند معرفی می‌شوند. در ادامه به علل ناکارآمدی روش‌های هموارکننده در مسائل با ابعاد بالا پرداخته شده، بنابراین انگیزه پیدایش روش‌های چندشبکه‌ای مشخص می‌گردد. سپس به معرفی اصول پایه‌ای تمامی روش‌های چندشبکه‌ای، انواع الگوریتم‌ها و تئوری‌های مربوطه می‌پردازیم. در تمامی این قسمت‌ها سعی می‌شود به نحوه پیاده‌سازی روش‌های چندشبکه‌ای بر روی مسأله مُدل پرداخته تا علاوه بر درک بهتر

مفاهیم چندشبکه‌ای، زمینه کارهای انجام شده فراهم شود. در پایان این فصل انواع هموارکننده‌ها که ممکن است به نحوی در روش‌های چندشبکه‌ای مورد استفاده قرار گیرند مورد بررسی قرار می‌گیرند. در فصل سوم ابتدا روش‌های چندشبکه‌ای پیشرفته‌تر مطرح شده سپس به بررسی نتایج عددی بر روی مسأله مُدل مطرح شده در آن بخش می‌پردازیم و صحت عملکرد نتایج را از جوانب مختلف مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. در پایان برای ایجاد زمینه تحقیقات بعدی، خارج از چارچوب این پایان‌نامه به تفاوت‌های روش‌های چندشبکه‌ای جبری با روش‌های چندشبکه‌ای هندسی پرداخته می‌شود.

فصل ۲

اصول چندشبکه‌ای

از آنجا که مفاهیم و اصول چندشبکه‌ای در تمامی نسخه‌های آن یکسان است در ابتدا لازم است مبانی این روش‌ها به طور کامل شناخته شود تا زمینه برای بررسی نسخه‌های دیگر آن فراهم آید.

۲—۱ مسائل مقدار مرزی

مسأله مقدار مرزی خطی روی ناحیه d بعدی Ω با شرایط مرزی روی $\partial\Omega$ به صورت :

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), & \Omega &\subset \mathbb{R}^d, \\ Bu(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), & \Gamma &:= \partial\Omega, \end{aligned} \tag{۲—۱}$$

را در نظر بگیرید، که در آن $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ و توابع

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad g : \Gamma \to \mathbb{R}.$$

معلوم هستند و L یک عملگر دیفرانسیل خطی روی ناحیه باز و کراندار Ω و B یک یا چند عملگر مرزی متناظر با شرایط مرزی را نشان می‌دهد. از گسسته‌سازی مسأله (۲—۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{h}}u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) &= f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), & \Omega_{\mathbf{h}} &:= \Omega \cap G_{\mathbf{h}}, \\ B_{\mathbf{h}}u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) &= g_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), & \Gamma_{\mathbf{h}} &:= \Gamma \cap G_{\mathbf{h}}, \end{aligned} \tag{۲—۲}$$

که $u_{\mathbf{h}}$ یک تقریب گسسته از جواب پیوسته u است که در (۲—۲) صدق می‌کند. $L_{\mathbf{h}}$ و $B_{\mathbf{h}}$ عملگرهای شبکه هستند و شبکه نامتناهی $G_{\mathbf{h}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G_{\mathbf{h}} := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)^T = \boldsymbol{\kappa}\mathbf{h} = (\kappa_1 h_1, ..., \kappa_d h_d)^T | \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}^d\},$$

که

$$h_1 = \frac{1}{n_1}, ..., h_d = \frac{1}{n_d}, \qquad (n_1, ..., n_d \in \mathbb{N}). \tag{۲—۳}$$

مؤلفه‌های $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ پارامتر گسسته‌سازی شبکه $G_{\mathbf{h}}$ در جهت‌های مختلف فضا است و جواب گسسته $u_{\mathbf{h}}$ یک تابع تعریف شده روی $\Omega_{\mathbf{h}} \cup \Gamma_{\mathbf{h}}$ است. برای شبکه مستطیلی $G_{\mathbf{h}}$ استفاده از اصطلاح مولکول محاسباتی برای تعریف عملگرهای گسسته مناسب است. فرض کنید $u_{\mathbf{h}} : G_{\mathbf{h}} \to \mathbb{R}$ یک تابع شبکه‌ای باشد یعنی برای یک نقطه ثابت $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{h}}$، ما می‌توانیم یک عملگر گسسته‌سازی $L_{\mathbf{h}}$، روی فضای توابع شبکه نامتناهی به صورت:

$$L_{\mathbf{h}} u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in J} l_{\boldsymbol{\kappa}} u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\kappa}\mathbf{h}),$$

با ضرایب مولکول محاسباتی $l_{\boldsymbol{\kappa}} \in \mathbb{R}$ و زیر مجموعه متناهی معین $J \subset \mathbb{Z}^d$ شامل $(0, ..., 0)$ تعریف کنیم. یک مولکول محاسباتی $[l_{\boldsymbol{\kappa}}]_{\mathbf{h}}$ برای حالت $d = 2$ به صورت:

$$L_{\mathbf{h}} \doteq \left[\ l_{\boldsymbol{\kappa}}\ \right]_{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & l_{(-1,1)} & l_{(0,1)} & l_{(1,1)} & \cdots \\ \cdots & l_{(-1,0)} & l_{(0,0)} & l_{(1,0)} & \cdots \\ \cdots & l_{(-1,-1)} & l_{(0,-1)} & l_{(1,-1)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}_{\mathbf{h}}, \tag{۲—۴}$$

یک عملگر روی مجموعه توابع تعریف می‌کند. معمولاً بیشتر مولکول‌های محاسباتی مورد بحث پنج نقطه‌ای یا نه نقطه‌ای هستند.

۲—۲ مسأله مدل

روش‌های چندشبکه‌ای ابتدا برای مسائل مقدار مرزی که از بسیاری مدل‌های فیزیکی به دست می‌آید به‌کار گرفته می‌شد. یک مدل طبیعی از معادله بیضوی، معادله پواسون دو بعدی روی یک مربع است. مدلی که آنالیز الگوریتم چندشبکه‌ای آن تا امروز به عنوان یک مسأله مهم، در دست تحقیق است. برای دیدن این که چگونه روش چندشبکه‌ای بر روی مسائل مختلف عمل می‌کند طرح مسأله مدل،