بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش آنالیز تابعی

تعمیم اصول مرتب سازی و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر:

مهری ابوطالبی

مهرماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است .

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم مهری ابوطالبی

تحت عنوان:

تعمیم اصول مرتب سازی و کاربردهای آن

در تاریخ ۹۰/۷/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر علیرضا امینی هرندی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه ام کشیدی و چشمه سار زلال دانش و معرفت را ارزانی داشتی تا در برهوت نادانی سیراب گر وجودم باشد.

و خالصانه ترین سپاس ها برای خانواده عزیزم به خصوص پدر و مادرم که از کودکی، شور دانستن و لذت جستجو را در من بیدار کردند و استقامت را به من آموختند، بر دستانشان بوسه می زنم و بعد از خدا وجود مقدسشان را ستایش می کنم.

این مجموعه را مرهون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم **جناب آقای دکتر مجید فخار** می دانم که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم و از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم.

از **جناب آقای دکتر زعفرانی** که افتخار شاگردی ایشان را دارم و الگویی بی نظیر از یک پژوهشگر و یک استاد فرهیخته در ذهن من حک نمودند بی نهایت سپاسگزارم.

زحمات اساتید داور جناب آقای دکتر امینی هرندی و سرکار خانم دکتر نوبختیان ارج نهاده و از ایشان تشکر و قدردانی می کنم.

قدردان استاد محترم سرکار خانم دکتر رضایی که همواره الطاف خویش را از اینجانب دریغ نداشته اند، می باشم.

در پایان از گروه محترم ریاضی و تمامی دوستانی که در طول شکل گیری این پایان نامه مرا یاری نمودند نهایت سپاس را دارم.

این اثر را تقدیم می کنم به: همه کسانم

پدرم

که نور وجودش روشنایی بخش راهم بود

و مادرم

که درس فداکاری به من آموخت

و تقدیم به تمام کسانی که دوستشان دارم........

چکیده

در این پایان نامه ابتدا اصل بریزیس_برودر را بیان می کنیم و سپس تعمیم هایی از این اصل را در فضاهای مرتب ثابت می کنیم و با استفاده از اصل بیان شده، قضیه وجود مینیمال قوی را در یک فضای شبه مرتب به دست می آوریم، که از آن برای اثبات قضیه وجود جواب قوی استفاده می شود و در ادامه مسأله بهینه سازی برداری مورد بررسی قرار می گیرد، که یکی از مهمترین روش ها در پیدا کردن نقاط مینیمال و ماکسیمال برای نگاشت های برداری مقدار است. یکی از ابزارهای مهم ریاضی که به طور ویژه، همراه با دستاوردهایش در مطالعه این بهینه سازی به کار گرفته می شود، مفهوم مخروط و اصول مرتب سازی است. پس از بیان اصول مرتب سازی، اصل تغییراتی اکلند را در فضاهای مرتب بیان می کنیم و در پایان قضیه های نقطه ثابت نظیر عملگرهای چندمقداری را ثابت می کنیم.

واژه های کلیدی: اصل تغییراتی اکلند، بهینه سازی برداری، ماکسیمال، مینیمال، مخروط، مرتب

فهرست مطالب

پیشگفتار

امروزه پیدا کردن نقاط مینیمال و ماکسیمال از یک مجموعه در بسیاری از مسائل مطلوب می‌باشد. بهینه‌سازی برداری یکی از مفیدترین روش‌ها در پیدا کردن این نقاط برای نگاشت‌های برداری مقدار است. در سال ۱۹۷۶ بریزیس و برودر [۴] تحقیقات خود را برای نگاشت‌های حقیقی مقدار آغاز کردند، که ما در این پایان نامه اصل‌بریزیس-برودر[۱] را با شرایط ضعیف‌تر بیان می‌کنیم و در ادامه این اصل را در فضاهای مرتب تعمیم می‌دهیم. در سال ۱۹۷۲ اکلند، [۹] اصل تغییراتی اکلند[۲] (به اختصار EVP) اولیه را برای حل تقریبی مسائل مینیماکس غیرمحدب ثابت کرد، که مهمترین نتیجه به‌دست آمده در آنالیز غیرخطی است و کاربردهای مهمی در بهینه‌سازی، تئوری کنترل بهینه دارد و ما در این پایان نامه این اصل را در فضاهای مرتب با استفاده از اصل بریزیس-برودر و قضیه وجود نقاط مینیمال قوی ثابت می‌کنیم.

فصل اول شامل سه بخش می‌باشد. در بخش اول و دوم به بیان مفاهیم توپولوژی و آنالیز تابعی مورد نیاز در این پایان نامه می‌پردازیم. در بخش سوم ابتدا ترتیب و فضایی را که

---

[۱] Brezis-Browder
[۲] Ekeland

در آن کار می‌کنیم معرفی کرده و پس از آن به تعریف انواع مخروط می‌پردازیم.

در فصل دوم ابتدا اصل بریزیس-برودر را بیان می‌کنیم. در بخش دوم تعمیم‌هایی از اصل بیان شده را در فضاهای مرتب ثابت می‌کنیم و در ادامه قضیه‌هایی در مورد اصول مرتب‌سازی که در تعمیم اصل بریزیس-برودر مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی می‌کنیم. در بخش سوم به معرفی یکی از مسائل بهینه‌سازی $OP(F,\leq)$ می‌پردازیم و به دنبال پیدا کردن نقاط مینیمال قوی برای مسأله $OP(F,\leq)$ هستیم.

در فصل چهارم اصل تغییراتی اکلند را در فضاهای مرتب بیان می‌کنیم. در بخش اول مسأله بهینه‌سازی $OP((i,F),\preceq_e)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و اولین و دومین اصل تغییراتی اکلند در فضای شبه‌مرتب معرفی می‌شود. در بخش دوم این اصل را برای نگاشت‌های برداری چندمقداری ثابت می‌کنیم. در بخش سوم فضای مورد نظر، یک فضای توپولوژیکی از نوع $\mathcal{F}$ می‌باشد و در ادامه در بخش چهارم هدف به‌دست آوردن اصول تغییراتی اکلند مبنی بر جواب‌های تقریبی برای مسأله بهینه‌سازی می‌باشد.

در فصل چهارم با استفاده از اصول مرتب‌سازی بیان شده در فصل‌های قبلی قضیه‌های نقطه ثابت نظیر عملگرهای چندمقداری را ثابت می‌کنیم.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ما به ارائه برخی از تعاریف، قضایا و نتایج مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. لازم به ذکر است که در این فصل از منابع [۴، ۶، ۷، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۱۸] استفاده شده است.

۱.۱ مروری بر مفاهیم توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی باشد و تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. دراین صورت دامنه و نمودار تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$domf := \{x \ \mid \ f(x) < \infty\},$$

$$Graphf := \{(x, f(x)) \ \mid \ x \in domf\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را سره گویند، هرگاه $x \in X$ای موجود باشد که $f(x) < \infty$، به عبارت دیگر $domf \neq \emptyset$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X, Y دو مجموعه ناتهی باشند. نگاشت $F : X \longrightarrow ۲^Y$ را یک نگاشت مجموعه مقدار گویند، که در آن ۲^Y، تمام زیرمجموعه‌های Y را نشان می‌دهد.

مجموعه‌ی $domF := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ **دامنه** F، $ImF := \underset{x \in X}{\cup} F(x)$ **برد** F و مجموعه‌ی $GraphF := \{(x, y) \mid y \in F(x)\}$ **نمودار** F را مشخص می‌کنند.

تعریف ۴.۱.۱. اگر (M, d) یک فضای متریک و $F : M \longrightarrow ۲^M$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $x_۰ \in M$ را یک نقطه‌ی ثابت برای نگاشت F گویند، هرگاه $x_۰ \in F(x_۰)$.

تعریف ۵.۱.۱. زیرمجموعه A از فضای برداری X را محدب گویند، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in A.$$

تعریف ۶.۱.۱. یک فضای متری را تفکیک‌پذیر گویند، هرگاه شامل زیرمجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیری باشد.

قضیه ۷.۱.۱. هر زیرفضای یک فضای متریک تفکیک پذیر، تفکیک پذیر می‌باشد.

اثبات. به [۷] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۱.۱. یک ساختار یکنواخت در یک مجموعه X عبارت است از خانواده E از زیرمجموعه‌های $X \times X$ به‌طوری که

۱) اگر $V \in E$، آن‌گاه $\triangle \subset V$، که در آن $\triangle$ نمایش دهنده قطر است،

۲) اگر $V_1, V_2 \in E$، آن‌گاه $W \in E$ وجود دارد به‌قسمی که $W \subset V_1 \cap V_2$،

۳) اگر $V \in E$ و $V \subset W$، آن‌گاه $W \in E$،

۴) اگر $V \in E$، آن‌گاه $W \in E$ وجود دارد به‌طوری که $W \circ W^{-1} \subset V$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. به‌طوری که توپولوژی آن توسط خانواده‌ای از شبه‌متریک $\{d_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}$ تعیین شود. دراین صورت X را یک فضای توپولوژیکی از نوع $\mathcal{F}$ گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $d_\alpha(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$،

۲) برای هر $\alpha \in (0, 1]$ و هر $x, y \in X$، $d_\alpha(x, y) = d_\alpha(y, x)$،

۳) برای هر $\lambda \leq \alpha$ و هر $x, y \in X$، $d_\alpha(x, y) \leq d_\lambda(x, y)$،

۴) برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\lambda \in (0, 1]$ موجود است که $\lambda \leq \alpha$ و برای هر $x, y, z \in X$،

$$d_\alpha(x, y) \leq d_\lambda(x, z) + d_\lambda(z, y).$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فضای X را فضای توپولوژیکی قوی از نوع $\mathcal{F}$ گویند، هرگاه در شرایط (۱) و (۲) و (۳) تعریف قبل صدق کند و هم‌چنین رابطه زیر برقرار باشد.

$$d_\alpha(x,y) \leq d_\alpha(x,z) + d_\alpha(z,y), \quad \forall x,y,z \in X \quad \forall \alpha \in (0,1].$$

مثال ۱۱.۱.۱. هر فضای متریک، یک فضای توپولوژیکی از نوع $\mathcal{F}$ است.

۲.۱ مروری بر مفاهیم آنالیز تابعی

تعریف ۱.۲.۱. فضای (X,τ) را یک فضای برداری توپولوژیکی (TVS) گویند، هرگاه X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و τ یک توپولوژی روی X باشد به‌طوری که

۱) $(x,y) \longrightarrow x+y$ یک تابع پیوسته از $X \times X$ به X باشد،

۲) $(t,x) \longrightarrow tx$ یک تابع پیوسته از $\mathbb{F} \times X$ به X باشد.

به عنوان مثال فضاهای نرم دار مثل $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{C}(X)$ (فضای توابع پیوسته روی X) همگی با توپولوژی حاصل از نرمشان یک (TVS) به ما می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. فضای برداری توپولوژیکی (X,τ) را موضعاًمحدب (LCS) گویند، هرگاه (X,τ) دارای یک پایه از همسایگی‌های مجموعه‌های محدب حول صفر باشد.

تعریف ۳.۲.۱. هرگاه X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. منظور از یک تابعک خطی یک نگاشت خطی از X به میدان اسکالر است. فضای تمام تابعک‌های خطی و پیوسته روی X را دوگان X می‌نامند و با X^* نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۴. یک نیم‌نرم روی فضای برداری X یک تابع $\| . \|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوری که

۱) برای هر $x \in X$، $\| x \| \geq \circ$،

۲) برای هر $x \in X$ و هر $t \in F$، $\| tx \| = | t | \| x \|$،

۳) برای هر $x, y \in X$، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

یک نیم‌نرم، نرم نامیده می‌شود، هرگاه این شرط اضافه شود که $\| x \| = \circ$ اگر و فقط اگر $x = \circ$.

قضیه ۱.۲.۵. اگر (X, τ) یک فضای LCS و $\mathcal{P}$ خانواده تمام نیم‌نرم‌های پیوسته روی X باشد، آن‌گاه $\tau = \sigma(X, \mathcal{P})$، که $\sigma(X, \mathcal{P})$ ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است به‌طوری که نیم‌نرم‌های $p \in \mathcal{P}$ پیوسته باشد.

اثبات. به [۱۷] رجوع کنید. □

قضیه ۱.۲.۶. فرض کنید K زیرمجموعه بسته و محدب از یک فضای موضعاًمحدب و هاسدورف X باشد و $x \notin K$. دراین صورت $x^* \in X^*$ وجود دارد به‌طوری که

$$\mathrm{Re}\langle x^*, x\rangle > sup\{\mathrm{Re}\langle x^*, y\rangle : y \in K\ \}.$$

اثبات. به [۱۷] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۲.۷. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $E \subset X$

a) E را فشرده نسبی گویند، هرگاه $\overline{E}$ فشرده باشد،

b) E را فشرده شمارشی مشروط گویند، هرگاه هر دنباله در E دارای نقطه تجمع باشد،

c) E را فشرده دنباله‌ای مشروط گویند، هرگاه هر دنباله در E دارای یک زیردنباله‌ی همگرا باشد.

قضیه ۸.۲.۱. اگر X یک فضای نرمدار خطی باشد، آن‌گاه a, b, c از تعریف قبل برای توپولوژی ضعیف معادلند.

اثبات. به [۱۷] رجوع کنید. □

۳.۱ فضاهای مرتب و مخروط

نظر به این‌که نتایج به دست آمده از این پژوهش، در یک فضای مرتب ارائه گردیده است، لذا در ادامه ابتدا به تعریفی از این فضا می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی باشد.

الف) هر زیرمجموعه غیرتهی R از مجموعه $X \times X$ یک رابطه دوتایی R روی X نامیده می‌شود.

ب) هر رابطه دوتایی $\leq$ روی X، یک ترتیب‌جزئی روی X نامیده می‌شود، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) برای هر $x \in X$، $x \leq x$،

۲) برای هر $x,y \in X$، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آن‌گاه $x = y$،

۳) برای هر $x,y,z \in X$، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$، آن‌گاه $x \leq z$.

اگر رابطه دوتایی $\leq$ روی X، فقط در شرط (۱) و (۳) صدق کند، آن‌گاه رابطه $\leq$ یک شبه‌ترتیب روی X معرفی می‌کند و هرگاه فقط در شرط (۳) صدق کند رابطه $\leq$ یک پیش‌ترتیب روی X معرفی می‌کند.

تعریف ۲.۳.۱. یک ترتیب‌جزئی $\leq$ روی مجموعه X، ترتیب‌کلی است اگر و فقط اگر برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $x \leq y$ یا $y \leq x$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{E}$ یک مجموعه غیرتهی و $+ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ یک تابع باشد. دراین صورت $(\mathcal{E}, +, \preceq)$ را پیش‌ترتیب مگما[1] با عنصر صفر گویند، هرگاه $(\mathcal{E}, \preceq)$ دارای خاصیت تعدی باشد و در شرط زیر صدق کند:

$$y, y_1, y_2 \in \mathcal{E}, \quad y_1 \preceq y_2 \Longrightarrow y + y_1 \preceq y + y_2, \quad y_1 + y \preceq y_2 + y \qquad (1.1)$$

به‌علاوه برای هر $y \in \mathcal{E}$ و $0_{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$ داشته باشیم

$$y + 0_{\mathcal{E}} = 0_{\mathcal{E}} + y = y.$$

اکنون به معرفی ابزار اصلی پژوهش‌مان یعنی مخروط و انواع مختلف آن می‌پردازیم.

تعریف ۴.۳.۱. زیرمجموعه D از فضای برداری X را یک مخروط گویند، هرگاه برای هر $\lambda \geq 0$، $\lambda D \subseteq D$.

[1] preordered magma

تعریف ۵.۳.۱. مخروط D را محدب گویند، هرگاه برای هر $\lambda \geq ۰$

۱) $D + D \subseteq D$.

به‌طور معادل، اگر برای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \geq ۰$ و $y_۱, y_۲ \in D$ داشته باشیم

$$\lambda_۱ y_۱ + \lambda_۲ y_۲ \in D.$$

تعریف ۶.۳.۱. مخروط محدب D را نوکدار نامند، هرگاه $D \cap (-D) = \{۰\}$.

مثال ۷.۳.۱. اگر $X = \mathbb{R}^n$، آن‌گاه زیرمجموعه‌ی

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \geq ۰ \ ; \ \forall\, i \in \{۱, ۲, ۳, ..., n\}\} = \mathbb{R}^n_+.$$

یک مخروط نوکدار محدب در $\mathbb{R}^n$ است.

مثال ۸.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری دلخواه و مجموعه D به صورت

$$D := \{\ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(-x) \ \ \forall x \in X\}$$

باشد. دراین صورت D در فضای برداری مجموعه توابع پیوسته یک مخروط محدب است ولی نوکدار نیست.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی و $D \subset X$ یک مخروط محدب باشد. دراین صورت مخروط مثبت و مثبت اکید را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^+ := \{\zeta \in X^* \ : \ \zeta(d) \geq ۰, \ \forall d \in D\},$$

$$D^{+S} := \{\zeta \in X^* \ : \ \zeta(d) > ۰, \ \forall d \in D \setminus \{۰\}\}.$$

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی و $D \subset X$ مخروط محدب و غیرتهی باشد و X به صورت زیر مرتب شده باشد.

$$x \leq_D y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in D \quad \forall x, y \in X.$$

دراین صورت فضا را با (X, D) نمایش می‌دهند و آن را فضای برداری توپولوژیکی مرتب شده به وسیله مخروط D گویند.

برای مثال اگر $X = \mathbb{R}^n$، آن‌گاه زیرمجموعه‌ی

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \geq ۰ \ ; \ \forall \, i \in \{۱, ۲, ۳, ..., n\}\} = \mathbb{R}^n_+.$$

یک مخروط نوکدار محدب بسته در $\mathbb{R}^n$ است که به‌وسیله آن می‌توان رابطه‌ی ترتیب‌جزئی $\leq$ را تعریف کرد و آن را مخروط ترتیب طبیعی روی $\mathbb{R}^n$ می‌نامند.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیکی و $D \subset X$ یک مخروط محدب باشد. دراین صورت مخروط $D \subset X$ را (نسبت به توپولوژی τ) نرمال گویند، هرگاه $(x_i)_{i \in I}$ و $(y_i)_{i \in I}$ دو تور دلخواه در D باشند به‌قسمی که برای هر $i \in I$،

$$\lim_{i \in I} y_i = ۰ \quad , \quad ۰ \leq_D x_i \leq_D y_i,$$

آن‌گاه داشته باشیم $\lim_{i \in I} x_i = ۰$.

مثال ۱۲.۳.۱. فرض کنید X یک فضای موضعاًمحدب هاسدورف و $\{x_۱, x_۲, ...x_n\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از X باشد. دراین صورت

$$D = \{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i x_i \quad : \quad \lambda_i \geq ۰ \quad i = ۱, ۲, ۳......, n \ \}.$$