بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

٩٥٨٨٠

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته آنالیز

عنوان

بررسی مقادیر ویژه تعمیم یافته و بردارهای ویژه تعمیم یافته برخی از عملگرها

استادان راهنما

دکتر جبارزاده و دکتر رنجبری

استاد مشاور

دکتر واعظی

پژوهشگر

مریم آقائی بدر

آبان ۱۳۸۶

تقدیم به

آنکه از گوشه ی چشمانش نور خدا می دمد

و

آنکه با آوای نغز و روان پرور خود سرود زندگی ام را می نوازد ...

با تشکر از دکتر جبار زاده و دکتر رنجبری که با حوصله در طول این پایان نامه مرا یاری نمودند و از دکتر واعظی به خاطر مشاوره این پایان نامه و سایر اساتید به خاطر آموخته هایم از ایشان در طول دوره تحصیلی ام.

با آرزوی توفیق روز افزون برای این عزیزان

نام خانوادگی دانشجو: آقائی بدر	نام: مریم

عنوان پایان نامه:

بررسی مقادیر ویژه تعمیم یافته و بردارهای ویژه تعمیم یافته برخی از عملگرها

استادان راهنما: دکتر جبارزاده و دکتر رنجبری

استاد مشاور: دکتر واعظی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی:۱۳۸۶/۸/۲۷

تعداد صفحه: ۷۳

کلید واژه ها: مقادیر ویژه ی تعمیم یا فته، بردارهای ویژه ی تعمیم یافته، عملگر انتگرالی ولترا

چکیده:

در این پایان نامه بعد از آشنایی با مفاهیم مقادیر ویژه تعمیم یافته و بردارهای ویژه تعمیم یافته و با در نظر گرفتن اسکالر یک به عنوان حالت بدیهی برای مقادیر ویژه تعمیم یافته سه عملگر خاص به نامهای ولترا، خوش تفکیک کننده و ددنس را در نظر می گیریم. برای عملگر انتگرالی ولترا $(Vf)(x)=\int_0^x f(t)dt$، روی فضای $L^2[0,1]$ نشان می دهیم مجموعه مقادیر ویژه تعمیم یافته به صورت یک بازه می باشد و با استفاده از ضرب دوحامل توصیف کاملی از بردارهای ویژه تعمیم یا فته آن را بیان می کنیم. برای عملگر خوش تفکیک کننده روی یک فضای باناخ جدایی پذیر مجموعه مقادیر ویژه تعمیم یافته و

ادامه چکیده پایان نامه:

بردارهای ویژه تعمیم یافته آن را بررسی می کنیم و در نهایت برای عملگر ددنس روی یک فضای هیلبرت (عموماً با بعد نامتناهی) توصیفی از مجموعه مقادیر ویژه تعمیم یافته آن را ارائه می دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

عملگر دوحامل D_f روی $L^2[0,1]$ به صورت $D_f g=(f\otimes g)(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)g(t)dt$ تعریف می‌شود. این ضرب ابتدا توسط ویگلی[1] به صورت مشتق ضرب پیچشی میکوسینیسکی[2] روی $Hol(D)$ و سپس روی $H^p(D)$ بررسی شده است.

اخیراً قارایف[3]، در مقالات متعددی با استفاده از این ضرب روی فضاهای $C^\infty[0,1]$، $C_A^{(n)}(D)$، $W(D)$ و... با در نظر گرفتن عملگرهایی از نوع پیچش، ولترا و شیفت خواص و کاربردهای متنوعی را ارائه کرده است.

کاربردهایی از ضرب دوحامل در نظریه معادلات دیفرانسیل، مسایل مقدار مرزی در ریاضی فیزیک، محاسبه شیب اسکله ها و حساب تابعی عملگرها می باشد.

عدد مختلط λ یک مقدار ویژه ی تعمیم یافته ی $A\in B(H)$ است اگر یک عملگر ناصفر $X\in B(H)$ وجود داشته باشد به طوری که در معادله $\lambda AX=XA$ صدق کند که برای اولین بار توسط بیسواس[4]، لمبرت[5] و پترویک[6] معرفی شد. در این پایان نامه عملگر انتگرالی ولترای V روی فضای $L^2[0,1]$ را مد نظر قرار داده و نشان می دهیم مجموعه مقادیر ویژه تعمیم یافته آن دقیقاً بازه $(0,\infty)$ می باشد و بردارهای تعمیم یافته متناظر آن می تواند به صورت عملگر انتگرالی باشد. در ادامه با استفاده از ضرب دو حامل توصیف کاملی از مجموعه بردارهای ویژه تعمیم یافته آن را ارائه می دهیم.

سپس عملگر خوش تفکیک کننده را روی یک فضای باناخ معرفی کرده و مجموعه بردارهای ویژه تعمیم یافته آن را بررسی می کنیم.

در نهایت با بررسی مقادیر ویژه تعمیم یافته عملگر های ددنس، کاربردی از جبر عملگرهای ددنس و زیر فضاهای شولمن را بیان می کنیم.

مرجع اصلی پایان نامه حاضر مقاله ای با عنوان

ON EXTENDED EIGENVALUES AND EXTENDED EIGENVECTORS OF SOME OPERATOR CLASSES

نوشته M. T. Karaev می باشد.

---

[1] Wigley
[2] Mikusinski
[3] Karaev
[4] Biswas
[5] Lambert
[6] Petrovic

بررسی منابع

فضاها:

تعریف(۱-۱): فضای برداری X یک فضای نرمدار است اگر به هر $x \in X$ عددی حقیقی و نامنفی $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط باشد که :

(i) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad x, y \in X$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \qquad \alpha \in C, x \in X$

(iii) اگر $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$

هر فضای نرمدار را می‌توان یک فضای متری گرفت. زیرا می‌توان تعریف کرد : $d(x,y) = \|x-y\|$.

تعریف(۱-۲): دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای نرمدار X ، یک دنباله‌ی کشی نامیده می‌شود اگر $\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n; X\| = 0$.

نکته: اگر هر دنباله‌ی کشی در X همگرا به حدی در X باشد در این صورت X را تام یا فضای باناخ نامند.

نکته: هر فضای نرمدار X یا یک فضای باناخ است یا یک زیر مجموعه‌ی چگال از یک فضای باناخ مانند Y است که به ازای هر $x \in X$ داریم $\|x; Y\| = \|x; X\|$. در این حالت Y کامل شده‌ی X نامیده می‌شود.

تعریف (۱-۳): فرض کنید Ω یک زیر مجموعه‌ی باز R^n باشد و فرض کنید p یک عدد حقیقی مثبت باشد. $L^p(\Omega)$ یک رده از توابع اندازه پذیر مختلط f تعریف شده روی Ω است به طوری که:

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dm(x) < \infty.$$

- $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.

- نرم تابع f در $L^p(\Omega)$ اگر $1 \le p < \infty$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dm(x) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

- اگر $0 < p < 1$ تعریف فوق یک نرم روی $L^p(\Omega)$ نیست.

تعریف (۱-٤): هرگاه $p,q\in[0,\infty]$ که $p+q=pq$ یا معادلاً $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ آنگاه p و q را نماهای مزدوج می‌نامیم.

قضیه (نامساوی هولدر)(۱ -٥): اگر $1\le p,q\le\infty$ به طوری که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $f\in L^p(\Omega)$ و $g\in L^q(\Omega)$ آنگاه:

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|dm(x)\le\|f\|_p\|g\|_q.$$

اثبات: رجوع شود به [18].

تعریف (۱-٦): تابع اندازه پذیر f روی Ω ، اساساً کراندار است اگر ثابت kایی وجود داشته باشد به طوری که $|f(x)|\le k$ ت.ه. روی Ω .

کوچکترین کران بالای چنین ثابتهای k ایی سوپریم اساسی $|f|$ روی Ω نامیده می‌شود و با $\underset{x\in\Omega}{ess\sup}|f(x)|$ نشان داده می‌شود .

$L^\infty(\Omega)$ عبارت است از فضای برداری شامل همه‌ی توابع اساساً کراندار f روی Ω.

تابع $\|.\|_\infty$ تعریف شده با $\|f\|_\infty=\underset{x\in\Omega}{ess\sup}|f(x)|$ یک نرم روی $L^\infty(\Omega)$ است.

قضیه (۱-۷): $L^p(\Omega)$ فضای باناخ است اگر $1\le p\le\infty$.

اثبات: رجوع شود به [18].

نکته: اثبات قضیه نشان می دهد که $L^2(\Omega)$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف (۱-۸): فرض کنید X یک فضای خطی نرمداراست. می‌گوییم X جدایی پذیر است اگر یک دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X موجود است که در آن چگال است (به عبارتی دارای زیر مجموعه‌ی چگال شمارش پذیری باشد.)

قضیه(۱-۹): $L^p(\Omega)$ جدایی پذیر است اگر $1\le p<\infty$.

اثبات: رجوع شود به [9].

تعریف (۱-۱۰): مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته‌ی $f : x \mapsto f(x)$ روی $[a,b]$ را با نماد $C[a,b]$ نشان می‌دهند. نرم سوپریمم(کانونی) روی این فضا به صورت

$$\|f\| = \max_{a \le x \le b} | f(x) |$$

تعریف می‌شود.

تعریف (۱-۱۱): فضای متشکل از تمام توابع n بار مشتق پذیر با مشتق پیوسته را با نماد $C^n[a,b]$ نشان می دهیم. نرم سوپریمم (کانونی) روی این فضا به صورت

$$\|f\| = \sum_{i=o}^{n} \max_{a \le x \le b} | f^{(i)}(x) | = \sum_{i=o}^{n} \|f^{(i)}\|_\infty$$

تعریف می‌شود.

نکته:

۱) فضاهای نرمدار $C[a,b]$ و $C^n[a,b]$ فضاهای باناخ هستند.

۲) فضای $C^n[0,1]$ با نرم $\|f\| = \max_{0 \le i \le n} \max_{0 \le x \le 1} | f^{(i)}(x) |$ نیز یک فضای باناخ است.

۳) فضای $C[0,1]$ جدایی پذیر است.

تعریف (۱-۱۲): اندیس چندگانه(اندیس مرکب) یعنی یک nـ تایی مرتب $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ از اعداد صحیح نامنفی α_i .

به هر اندیس چندگانه‌ی α ، عملگر دیفرانسیل $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ مربوط است که مرتبه‌اش عبارت است از $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$.

نکته: $D^{(o,\dots,o)}u = u$.

نکته: اگر α و β دو اندیس چندگانه باشند گوییم $\beta \le \alpha$ هر گاه برای $1 \le j \le n$ داشته باشیم $\beta_j \le \alpha_j$. در این حالت داریم:

$\alpha - \beta$ نیز یک اندیس چندگانه است و $|\alpha| = |\beta| + |\alpha - \beta|$.

فرض کنید m یک عدد صحیح نامنفی باشد و $1 \le p \le \infty$. تابع $\|\cdot\|_{m,p}$ را برای هر تابع مختلط f تعریف شده روی Ω به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|f\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad 1 \le p < \infty \quad \text{اگر}$$

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_\infty .$$

تعریف(۱-۱۳): فرض کنید Ω یک زیر مجموعه‌ی باز R^n باشد و m یک عدد صحیح نامنفی باشد. برای $1 \le p \le \infty$، فضای سوبولف $W_p^{(m)}(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_p^{(m)}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \quad s.t. \quad 0 \le |\alpha| \le m$$
$$\text{مشتق جزئی توزیعی (ضعیف) است و } D^\alpha f \}.$$

واضح است که $W_p^{(o)}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

$W_p^{(m)}(\Omega)$ یک فضای خطی نرمدار است با :

(i) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x);$

(ii) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x);$

(iii) $\|f\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad s.t \quad dx = dx_1 \cdots dx_n .$

قضیه(۱-۱٤): $W_p^{(m)}(\Omega)$ یک فضای باناخ است اگر $1 \le p \le \infty$.

اثبات: رجوع شود به [2].

$W_p^{(m)}(\Omega)$ یک زیر فضای بسته از فضای $L^p(\Omega)$ است.

قضیه(۱-۱۵): $W_p^{(m)}(\Omega)$ جدایی پذیر است اگر $1 \le p < \infty$.

اثبات: رجوع شود به [2].

در ساده‌ترین حالت، یعنی حالت یک بعدی کافی است فرض کنیم $f^{(m-1)}$ تقریباً همه جا مشتق‌پذیر است و تقریباً همه جا با انتگرال لبگ مشتقش برابر است. با این تعریف فضای سوبولف یک نرم طبیعی می‌پذیرد:

$$\|f\|_{m,p} = \sum_{i=0}^{m} \|f^{(i)}\|p = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \int | f^{(i)}(x) |^{p} \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

در این حالت نیز $W_p^{(m)}(\Omega)$ مجهز با نرم $\|.\|_{m,p}$ یک فضای باناخ است.

تعریف(۱-۱۶): فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی گویند اگر به هر جفت از بردارهای x و y در H، یک عدد مختلط (x,y) مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

آ) $(y,x) = \overline{(x,y)}$،(علامت بارنشانگر مزدوج مختلط است.)؛

ب) اگر $x,y,z \in H$ $\quad (x+y,z) = (x,z)+(y,z)$؛

پ) اگر $x,y \in H$ و α اسکالر باشد، $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$؛

ت) به ازای هر $x \in H$ ، $(x,x) \geq 0$؛

ث) $(x,x) = 0$ فقط اگر $x = 0$.

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک فضای پیش هیلبرت نامیده می شود.
اگر H یک فضای پیش هیلبرت باشد، به ازای $x \in H$ تعریف می کنیم:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

فضای پیش هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می شود.

مثال(۱-۱۷): اگر μ یک اندازه‌ی مثبت باشد، $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$(f,g) = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu$$

است. انتگرالده سمت راست در $L^1(\mu)$ است؛ در نتیجه (f,g) خوش تعریف است. تمامیت $L^2(\mu)$ نشان می‌دهد که $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت است.

مثال(۱-۱۸): فضای برداری تمام توابع مختلط پیوسته بر $[0,1]$ یعنی $C[0,1]$ در صورتی که

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

یک فضای ضرب داخلی است ولی یک فضای هیلبرت نیست.

جبر:

تعریف(۱-۱۹): A را یک جبر روی میدان F (حقیقی یا مختلط) گویند هرگاه A یک فضای برداری روی F باشد و یک عمل ضرب $(x,y)\mapsto xy$ از $A\times A$ بتوی A وجود داشته باشد که در اصول موضوعه‌ی زیر صدق کند:

به ازای هر $x,y,z\in A$ و $\alpha\in F$:

(i) $x(yz)=(xy)z$

(ii) $x(y+z)=xy+xz$ و $(x+y)z=xz+yz$

(iii) $(\alpha x)y=\alpha(xy)=x(\alpha y)$.

اگر بتوان نرمی بر A تعریف کرد که در شرط

$$\|xy\|\le\|x\|\,\|y\|$$

صدق کند در آن صورت A را جبر نرمدار گویند.

اگر جبر نرمدار A تحت توپولوژی حاصل از متر $d(x,y)=\|x-y\|$ یک فضای توپولوژیک کامل باشد، جبر باناخ نامیده می‌شود. به طور خلاصه یک جبر باناخ عبارت است از یک فضای باناخ به انضمام یک عمل ضرب حلقه که در رابطه‌ی $\|xy\|\le\|x\|\,\|y\|$ صدق می‌کند.

اگر در جبر A به ازای هر عنصر $x,y\in A$، $xy=yx$ آن را جبر تعویضپذیر نامند.

اگر A دارای عضو یکه باشد آن را با 1 نشان می‌دهیم و معمولاً فرض می شود که $\|1\|=1$، البته همواره خواهیم داشت: $\|1\|\ge 1$.

مثال(۱-۲۰): فرض کنید X یک فضای هاسدرف و فشرده باشد و $C(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی حقیقی بر X باشد. با اعمال جبری معمولی و نرم

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|;x\in X\}$$

یک جبر باناخ تعویضپذیر یکه‌دار می‌باشد.

فرض کنید X یک فضای باناخ و $B(X)$ جبر تمام عملگرهای خطی کراندار از X به X با اعمال جبری معمولی و نرم

$$\|T\| = \sup\{\ \|Tx\| \quad ; \quad x \in X \quad ; \quad \|x\| \le 1\}$$

باشد. در این صورت $B(X)$ یک جبر باناخ غیر تعویضپذیر است (البته اگر $\dim X \ge 2$) و دارای یکه است.

پیچش:

تعریف(۱-۲۱): فرض کنید f و g توابع اندازه پذیر لبگ بر R باشند. پیچش $f*g$ به ازای تقریباً هر $x \in R$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(x) = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

قضیه(۱-۲۲): فرض کنید $f,g \in L^1(R)$ و $h \in L^p(R)$ و $1 \le p \le \infty$. در این صورت داریم:

$(i)\ \ f*h \in L^p(R).$

$(ii)\ \|f*h\|_p \le \|f\|_1 \|h\|_p.$

$(iii)\ f*(g*h) = (f*g)*h.$

$(iv)\ (f+g)*h = f*h + g*h.$

$(v)\ a(f*h) = (af)*h = f*(ah).$

$(vi)\ f*h = h*f.$

علاوه بر این اگر $f \in L^p(R)$ و $h \in L^q(R)$ که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $1 \le p \le \infty$ باشند داریم:

$\|f*h\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$ و $f*g \in C(R)$.

اثبات: رجوع شود به [15].

معرفی چند توپولوژی روی فضای $\mathbf{B}(H)$ (۱-۲۳):

۱) توپولوژی حاصل از نرم $\|T\| \to T$ ، نرم ـ توپولوژی (UOT) نام دارد.

دنباله ی T_n تسبت به نرم – توپواوژی همگرا به T است اگر $\lim_n \|T_n - T\| = 0$.

۲) توپولوژی حاصل از نیم نرم $\|T\xi\| \to T \quad (\xi \in H)$، توپولوژی قوی (SOT) نام دارد.

دنباله ی T_n تسبت به توپولوژی قوی همگرا به T است اگر $\lim_n \|T_n(x)-T(x)\| = 0 \,(x \in H)$.

۳) توپولوژی حاصل از نیم نرم $T \to |(T\xi,\eta)| \quad (\xi,\eta \in H)$، توپولوژی ضعیف (WOT) نام دارد.

دنباله ی T_n تسبت به توپولوژی ضعیف همگرا به T است اگر

$$\lim_n (T_n(x),y) = (T(x),y) \,(x,y \in H).$$

٤) توپولوژی حاصل از نیم نرم $T \to \{\sum_{i=1}^{\infty} \|T\xi_i\|^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (\xi_i \in H \ s.t. \sum \|\xi_i\|^2 < \infty)$، توپولـوژی آلترا ـ قوی نام دارد.

٥) توپولژی حاصل از خانواده ی نیم نرم هـای $\left|\sum_{i=1}^{\infty}(T\xi_i,\eta_i)\right| \leftarrow T (\xi_i \in H \ s.t. \sum \|\xi_i\|^2 < \infty)$،

توپولوژی آلترا ضعیف یا توپولوژی σ-ضعیف نام دارد.

می توان دید توپولوژی آلترا ضعیف، توپولوژی هاسدرف موضعاً محـدب σ-ضـعیف روی $\mathbf{B}(H)$ به وسیله ی نیم نرم های

$$B(H) \to R^+, u \to |tr(uv)|, \quad (v \in L^1(H)).$$

تولید می شود.($tr(v) = \sum_{x \in E}(v(x),x)$ که E پایه ی متعامد Hاست.)

نکته: روی یک زیر مجموعه‌ی کراندار $\mathbf{B}(H)$، توپولوژی قوی و توپولوژی آلترا قـوی بـرهم منطبـق هستند و توپولوژی ضعیف و توپولوژی آلترا ضعیف برهم منطبق‌اند.

روابط شمول بین توپولوژی های متفاوت روی $\mathbf{B}(H)$(۱-۲٤):

$$Norm \supseteq \sigma - strong \supseteq \sigma - weak$$

$$strong \supseteq weak$$

$$\sigma - strong \supseteq strong \qquad \sigma - weak \supseteq weak$$

قضیه (تقریب وایرشتراس) (۱-۲٥): فرض کنید f یک تابع مختلط (حقیقی) مقدار پیوسته روی بازه‌ی $[0, 1]$ باشد. آنگاه یک دنباله از چند جمله‌ای‌های $p_n(x)$ که به طور یکنواخـت روی $[0, 1]$ همگرا به $f(x)$ هستند وجود دارد.

اثبات :رجوع شود به [22].

تعریف(۱-۲۶): قرار دهید Ω مجموعه ی باز در صفحه باشد و تابع مختلط f بر Ω تعریف شده باشد. اگر $z_0 \in \Omega$ و

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

موجود باشد، این حد را با $f'(z_0)$ نشان داده ومشتق f در z_0 نامند. اگر $f'(z_0)$ به ازای هر $z_0 \in \Omega$ موجود باشد گویند f تحلیلی در Ω است.

قضیه (مرگلیان)(۱-۲۷): هرگاه K یک مجموعه ی فشرده در صفحه باشد که متممش همبند است و f یک تابع مختلط پیوسته بر K باشد که درون K تحلیلی است و $\varepsilon > 0$. در این صورت یک چند جمله ای مانند p وجود دارد به طوری که به ازای هر $z \in K$ ، $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$.

اثبات: رجوع شود به [18].

نکته: هرگاه درون K تهی باشد، آنگاه بخشی از مفروضات خود بخود صادق بوده و نتیجه به ازای $f \in C(K)$ برقرار است. توجه کنید که K لزوماً همبند نیست.

تعریف(۱-۲۸): محافظ تابع مختلط f بر فضای توپولوژیک X بست مجموعه ی $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ می باشد.

گردایه ی تمام توابع مختلط پیوسته بر X که محافظ فشرده دارند را با $C_c(X)$ نشان می دهیم. اگر X فشرده باشد، واضح است که $C_c(X) = C(X)$.

قضیه(۱-۲۹): به ازای $1 \leq p < \infty$، $C_c(X)$ در $L^p(\mu)$ چگال است.(μ اندازه ی مثبت است).

اثبات: رجوع شود به [18].

نکته: بنا به قضیه ی تقریب وایرشتراس نتیجه می گیریم چند جمله ای ها در $L^2[0,1]$ چگالند.

قضیه(۱-۳۰): فرض کنیم $f \in L^1(\mu)$ و به ازای هر $E \in m$، $\int_E f \, d\mu = 0$ در این صورت $f = 0$ ت.ه. بر X (μ اندازه ی مثبت بر σ - جبر m).

اثبات: رجوع شود به [18].

اندازه :

تعریف(۱-۳۱): گردایه ی m از زیر مجموعه های مجموعه ی X را یک σ-جبر در X نامیم اگر m از خواص زیر بهره مند باشد:

۱) $X \in m$؛

۲) هرگاه $A \in m$، آنگاه $A^c \in m$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

۳) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in m$، آنگاه $A \in m$.

هرگاه m یک σ-جبر در X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای m را مجموعه های اندازه پذیر در X می نامیم.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. کوچکترین σ- جبر مانند B در X هست به طوری که هر مجموعه ی باز در X متعلق به B **است. اعضای** B را مجموعه های بورل X می نامند.

چون B یک σ-جبر است، می توان X را یک فضای اندازه پذیر گرفت که در آن مجموعه های بورل نقش مجموعه های اندازه پذیر را دارند.

تعریف(۱-۳۲): یک اندازه ی مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ-جبر مانند m تعریف شده است، بردش در $[0,\infty]$ است، و جمعی شمارشپذیر می باشد. این یعنی هرگاه $\{A_i\}$ گردایه ای شمارشپذیر و از هم جدا از اعضای m باشد، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{A_i\}).$$

برای دوری از بدیهیات، فرض می کنیم به ازای دست کم یک $A \in m$، $\mu(A) < \infty$.

هر فضای اندازه یک فضای اندازه پذیر است که یک اندازه مثبت تعریف شده بر σ-جبر مجموعه های اندازه پذیر خود داشته باشد.

هر اندازه مختلط یک تابع جمعی شمارشپذیر مختلط تعریف شده بر یک σ –جبر می باشد. اندازه های حقیقی یک زیر رده از اندازه های مختلط تشکیل می دهند.

تعریف(۱–۳۳): اندازه ی μ تعریف شده بر σ –جبر تمام مجموعه های بورل در فضای هاسدرف موضعاً فشرده ی X یک اندازه ی بورل X نام دارد.

تعریف(۱–۳٤): اگر اندازه ی بورل μ مثبت باشد، مجموعه ی بورل $E \subset X$ را منتظم خارجی گویند اگر دارای خاصیت

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V \text{ و } V \text{ باز}\}$$

باشد و منتظم داخلی گویند اگر دارای خاصیت

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ و } K \text{ فشرده}\}$$

(E باز و $\mu(E) < \infty$) باشد.

اگر هر مجموعه ی بورل در X هم منتظم خارجی وهم منتظم داخلی باشد ، μ منتظم نام خواهد داشت.

نکته: اندازه ی بورلی چون μ روی R^n منتظم نامیده می شود هرگاه

برای هر مجموعه ی فشرده مانند K، $\mu(K) < \infty$؛

برای هر $E \in \mathrm{B}_{R^n}$، $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V \text{ و } V \text{ باز}\}$.

(عملاً شرط دوم توسط شرط اول برآورده می شود.)

نکته: هر اندازه ی منتظم، σ –متناهی است.

نکته: اندازه ی بورل مختلطی چون μ منتظم نامیده خواهد شد هرگاه $|\mu|$ منتظم باشد.

تعریف(۱–۳۵): فرض کنیم μ یک اندازه ی مثبت بر σ –جبر Ω بوده و λ یک اندازه ی دلخواه بر Ω باشد. λ ممکن است مثبت یا مختلط باشد. (به یاد آورید که برد یک اندازه ی مختلط در صفحه ی مختلط است ولی اندازه ی مثبت ∞ را به عنوان یک مقدار مجاز می گیرد. لذا اندازه های مثبت زیر رده ای از اندازه های مختلط تشکیل نمی دهند.)