بسم الله الرحمن الرحیم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادّی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌هایِ ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقرّرات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب مینا متین تازه کند دانش‌آموخته‌ی مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۰۳۱۱۴ که در تاریخ ۹۲.۶.۱۲ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان بررسی مسئله ی دوگان برای کلاس عملگرهای $b-$ به طور ضعیف فشرده دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.
۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.
۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.
۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.
۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.
۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.
۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام ونام خانوادگی دانشجو:

امضا

تاریخ

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

بررسی مسئله ی دوگان برای کلاس عملگرهای b - به طور ضعیف فشرده

استاد راهنما:

دکترکاظم حق نژاد آذر

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا عبداله پور

پژوهشگر:

مینا متین تازه کند

شهریور ۱۳۹۲

۱۳۵۷

دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه آموزشی ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

بررسی مسئله ی دوگان برای کلاس عملگرهای b– به طور ضعیف فشرده

پژوهشگر:

مینا متین تازه کند

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته‌ی داوران پایان‌نامه با درجه‌ی بسیار خوب

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضاء
کاظم حق نژاد آذر	استادیار	استاد راهنما و رییس کمیته‌ی داوران	
محمدرضا عبداله پور	استادیار	استاد مشاور	
عباس نجاتی	دانشیار	داور	

شهریور – ۱۳۹۲

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کاظم حق نژادآذر، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمدرضا عبداله پور که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکرمی‌کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مینا متین تازه کند

۱۳۹۲

نام خانوادگی: متین تازه کند نام: مینا

عنوان پایان‌نامه:
بررسی مسئله ی دوگان برای کلاس عملگرهای b - به طور ضعیف فشرده

استاد راهنما: دکتر کاظم حق نژادآذر
استاد مشاور: دکتر محمدرضا عبداله پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز
دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۹۲/۰۶/۱۲ تعداد صفحات: ۸۹

چکیده

فرض کنید $T:E\to F$ یک عملگر b - به طور ضعیف فشرده بین دو مشبکه ی باناخ باشد. می خواهیم بدانیم تحت چه شرائط لازم و کافی، الحاقی آن نیز b - به طور ضعیف فشرده است. به طور کلی در این پایان نامه می خواهیم روابط بین b - به طور ضعیف فشرده بودن عملگر پیوسته ی T بین دو مشبکه ی باناخ E و F، و b - به طور ضعیف فشرده بودن الحاقی آن را بررسی کنیم.

کلیدواژه‌ها: دوگان، عملگر b - به طور ضعیف فشرده، مشبکه ی باناخ، نرم پیوسته ی ترتیبی

فهرست مطالب

مقدمه

برای اولین بار عملگرهای فشرده در (هیلبرت، ۱۹۰۶ [۱]) بیان شد و بعد از آن ریس [۲] در سال (۱۹۱۸) خواص عملگرهای فشرده را بررسی کرد. از آنجا که عملگرهای فشرده دارای خاصیت های جالبی هستند، این سوال پیش آمد که آیا این خاصیت ها در توپولوژی ضعیف نیز برقرار هستند؟ بنابراین (کاکوتانی، ۱۹۳۸ [۳]) و (یسیدا، ۱۹۳۸ [۴]) عملگرهای به طور ضعیف فشرده را معرفی کردند و به مطالعه ی خواص این عملگرها پرداختند. برای اولین بار (آلپای و همکاران، ۲۰۰۳ [۵]) مجموعه های کران دار b – مرتب و عملگرهای b – به طور ضعیف فشرده را معرفی کردند. کلاس عملگرهای M – به طور ضعیف فشرده و عملگرهای به طور ضعیف فشرده ی ترتیبی نیز به ترتیب برای اولین بار در (میر – نیبرگ، ۱۹۷۴ [۶]) و (دادس، ۱۹۷۵ [۷]) معرفی شده است.

این پایان نامه، برگرفته از مرجع (اکزوز و همکاران، ۲۰۰۹ [۸]) بوده و در تدوین و نگارش این مجموعه، از مراجع (آلیپرانتیز، ۱۹۸۵ [۹]) و (آلپای و همکاران، ۲۰۰۳) بیشترین استفاده به عمل آمده است.

---

[۱] Hilbert, 1906
[۲] Riesz
[۳] Kakutani, 1938
[۴] Yosida, 1938
[۵] Alpay et al, 2003
[۶] Meyer-Nieberg, 1974
[۷] Dodds, 1975
[۸] Aqzzouz et al, 2009
[۹] Aliprantis, 1985

این پایان نامه شامل چهار فصل است که در فصل اول، برخی تعاریف و قضایای مقدماتی آورده شده اند. در بخش اول فصل دوم، مشبکه ی باناخ (چون دامنه ی عملگرهای b – به طور ضعیف فشرده، مشبکه ی باناخ می باشد.) همراه بامثال ها و خواصی معرفی شده است. در بخش دوم فصل دوم، انواعی از مشبکه های باناخ آورده شده اند. در فصل سوم، واژه ی عملگر و انواع خاصی از عملگرها ازجمله عملگر b – به طور ضعیف فشرده معرفی و به بررسی خواص آن ها پرداخته شده است. برای مثال، کلاس عملگرهای b – به طور ضعیف فشرده در خاصیت تسلطی صدق می کند. یعنی اگر E و F دو مشبکه ی باناخ و S و T دو عملگر پیوسته از E به توی F باشند که $0 \leq S \leq T$ و T عملگری b – به طور ضعیف فشرده باشد، آنگاه S نیز b – به طور ضعیف فشرده خواهد بود (نتیجه ۱۲.۲.۳). در بخش سوم فصل سوم، عملگرهای معرفی شده در بخش دوم، با هم مقایسه شده اند. کلاس عملگرهای b – به طور ضعیف فشرده در خاصیت دوگان صدق نمی کند. یعنی عملگر b – به طور ضعیف فشرده ای از مشبکه ی باناخ E به توی مشبکه ی باناخ F وجود دارد که الحاقی آن b – به طور ضعیف فشرده نیست. به طور معکوس، عملگری پیوسته بین دو مشبکه ی باناخ وجود دارد که b – به طور ضعیف فشرده نیست در حالی که الحاقی آن b – به طور ضعیف فشرده است. به عنوان مثال عملگر همانی $I : l^1 \to l^1$ عملگری b – به طور ضعیف فشرده است درحالی که عملگر الحاقی آن b – به طور ضعیف فشرده نیست. به طور معکوس، عملگر همانی $I : c_0 \to c_0$، b – به طور ضعیف فشرده است. اما عملگر $I : (c_0)' \to (c_0)'$، b – به طور ضعیف فشرده نیست (مثال های فوق، بنا به قضیه ۱۴.۲.۳ برقرار می باشند.). در فصل چهارم در قضیه ۱.۲.۴، بررسی کرده ایم که اگر عملگر پیوسته ی T بین دو مشبکه ی باناخ، عملگری b – به طور ضعیف فشرده باشد، آنگاه T'، b – به طور ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر یکی از E' یا F'، KB – فضا باشند. توجه داشته باشید که چون دوگان هر مشبکه ی باناخ دارای خاصیت (b) است،

قضیه ۱.۲.۴ برای عملگرهای به طور ضعیف فشرده ی ترتیبی نیز برقرار است (نتیجه ۴.۲.۴). در قضیه ۷.۲.۴، گفته ایم که عملگر پیوسته ی T بین دو مشبکه ی باناخ E و F زمانی که T'، b - به طور ضعیف فشرده است، b - به طور ضعیف فشرده خواهد بود اگر و تنها اگر یکی از E یا F، KB - فضا باشند.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل، برخی تعاریف و قضایای مقدماتی را که در روند کار به کمک ما خواهند آمد، آورده شده اند. این فصل متشکل از دو بخش است که اولی تعاریف و بعدی قضایا می باشد.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه ی E از بردارها را همراه با عمل جمع و ضرب اسکالر که در ده اصل موضوعی زیر صدق می کند، یک فضای برداری [1] می نامیم.

۱) هرگاه $x, y \in E$، آنگاه $x + y \in E$؛

۲) هرگاه $x, y, z \in E$، آنگاه $(x+y)+z = x+(y+z)$؛

۳) برداری مانند $\circ \in E$ موجود است، به طوری که به ازای هر x متعلق به E داریم، $x + \circ = \circ + x = x$؛

۴) اگر $x \in E$، آنگاه برداری مانند $-x$ متعلق به E موجود است، به طوری که $(-x) + x = x + (-x) = \circ$؛

۵) هرگاه $x, y \in E$، آنگاه $x + y = y + x$؛

۶) هرگاه x متعلق به E و α اسکالر باشد، آنگاه $\alpha x \in E$؛

۷) هرگاه $x, y \in E$ و α اسکالر باشد، آنگاه $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$؛

۸) هرگاه $x \in E$ و α, β اسکالر باشند، آنگاه $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$؛

۹) هرگاه $x \in E$ و α, β اسکالر باشند، آنگاه $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$؛

۱۰) به ازای هر x متعلق به E داریم $۱x = x$.

توجه کنید که اگر اسکالرها حقیقی باشند، E را فضای برداری حقیقی و در صورت مختلط بودن اسکالرها E را فضای برداری مختلط می نامیم.

[1] Vector space

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. $C \subseteq X$ را محدب [۱] گوییم، هرگاه برای هر $0 \leq t \leq 1$ داشته باشیم

$$tC + (1-t)C \subseteq C. \tag{1.1}$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ی ناتهی باشد. گردایه ی τ از زیرمجموعه های X را یک

توپولوژی [۲] بر X گوییم، هرگاه τ در خواص زیر صدق کند.

۱) $X, \phi \in \tau$؛

۲) هرگاه $U, V \in \tau$، آنگاه $U \cap V \in \tau$؛

۳) هرگاه $\{V_i : i \in I\}$ خانواده ای از اعضای τ باشد، آنگاه $\bigcup_{i\in I} V_i \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی بر مجموعه ی X باشد، جفت (X, τ) یک فضای توپولوژیک [۳] نامیده می شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه و $\tau \subseteq P(X)$ یک توپولوژی روی X باشد. $B \subseteq \tau$ را یک پایه [۴] برای توپولوژی τ می گوییم، هرگاه هر عضو τ (یعنی هر مجموعه ی باز) اجتماعی از اعضای B باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به طوری که

۱) هر زیر مجموعه ی تک عضوی از X، یک مجموعه ی بسته باشد؛

۲) دو تابع زیر پیوسته باشند.

$$X \times X \to X \quad , \quad \mathbb{R} \times X \to X \tag{2.1}$$

$$(x, y) \mapsto x + y \qquad (\alpha, x) \mapsto \alpha x \tag{3.1}$$

[۱] Convex
[۲] Topology
[۳] Topological space
[۴] Basic

در این شرائط گوییم، τ یک توپولوژی برداری [۱] بر فضای برداری X است و X یک فضای برداری توپولوژیک [۲] نامیده می شود.

توپولوژی τ روی فضای برداری حقیقی X را توپولوژی خطی [۳] گوییم، هرگاه شرط (۲) برقرار باشد.

تعریف ۶.۱.۱. توپولوژی خطی τ روی فضای برداری X، به طور موضعی محدب [۴] نامیده می شود، هرگاه τ پایه ای داشته باشد که همه ی اعضایش محدب باشند.

در این صورت جفت (X,τ) را فضای به طور موضعی محدب می نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع حقیقی $\|\,.\,\| : X \to [0,\infty)$ را که در سه خاصیت زیر صدق می کند، یک نرم [۵] می نامیم.

۱) به ازای هر x متعلق به X، $\| x \| \geq 0$ و $\| x \| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲) به ازای هر $x \in X$ و اسکالر α، $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$؛

۳) به ازای هر $x, y \in X$، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

فضای برداری X را به همراه $\|\,.\,\|$ یک فضای برداری نرم دار [۶] یا فضای نرم دار می نامیم. اگر X همراه با $\|\,.\,\|$ تام باشد، X را یک فضای باناخ [۷] می گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. اگر X یک فضای برداری باشد و نگاشت $P : X \to [0,\infty)$ در خاصیت ۲ و ۳ تعریف بالا صدق کند، آنگاه P را یک نیم نرم [۸] می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. گوییم زیر مجموعه ی A از یک فضای برداری نرم دار X، کران دار در نرم [۹] است، هرگاه

[۱] Vector topology
[۲] Topological vector space
[۳] Linear topology
[۴] Locally convex
[۵] Norm
[۶] Normed vector space
[۷] Banach space
[۸] Seminorm
[۹] Norm bounded

$M > ۰$ ی موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$،

$$\| x \| \leq M. \tag{۴.۱}$$

تعریف ۱۰.۱.۱. گوییم دنباله ی $\{x_n\}$ در فضای نرم دار X به x همگراست [۱]، هرگاه

$$\lim_n \| x_n - x \| = ۰. \tag{۵.۱}$$

تعریف ۱۱.۱.۱. دوگان جبری [۲] X^* از فضای برداری X، فضای برداری شامل تمام نگاشت های روی X است.

X^* با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری بوده و X^{**} که دوگان جبری X^* می باشد، مشابه بالا تعریف می شود.

نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X^{**}$ با ضابطه ی $\langle x^*, \varphi(x) \rangle = \langle x, x^* \rangle$ که در آن $x^* \in X^*$ و $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$ را یک نشاننده ی طبیعی [۳] می نامیم. می توان نشان داد که φ نگاشت خطی و حافظ نرم است و به راحتی می توان X را با $\varphi(X)$ یکی گرفت.

در صورتی که φ پوشا باشد، X را فضای انعکاسی [۴] گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر τ توپولوژی خطی روی X باشد، آنگاه دوگان توپولوژیکی [۵] X' از (X, τ)، زیرفضای برداری از X^* است که شامل تمام نگاشت های خطی و τ - پیوسته روی X است. به عبارت بهتر:

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{است.}\ \text{پیوسته}\ - \tau\ \text{خطی و}\ f\}. \tag{۶.۱}$$

حال اگر X یک فضای نرم دار باشد، X' بنا به قضیه ۴.۳ از (رودین، ۱۹۹۱ [۶]) به ازای هر $f \in X'$

[۱] Convergent
[۲] Dual algebra
[۳] Natural embedding
[۴] Reflexive space
[۵] Dual topological
[۶] Rudin, 1991

با نرم زیر تبدیل به فضای باناخ خواهد شد

$$\| f \| = \sup_{x \in B_X} \| f(x) \| \tag{۷.۱}$$

که در آن B_X گوی واحد بسته ی X است.

تعریف ۱۳.۱.۱. فضای برداری حقیقی E را همراه با رابطه ی ترتیبی [۱] $\leq$ (انعکاسی [۲]، پاد متقارن [۳] و تعدی [۴]) یک فضای برداری مرتب [۵] گوییم، هرگاه در خواص زیر صدق کند.

۱) برای هر x, y, z متعلق به E هرگاه $x \leq y$، آنگاه $x + z \leq y + z$؛

۲) برای هر x, y متعلق به E و اسکالر $\alpha \geq 0$، هرگاه $x \leq y$، آنگاه $\alpha x \leq \alpha y$.

نماد جایگزین $x \leq y$، $y \geq x$ می باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. عضو x از فضای برداری مرتب E را مثبت [۶] گوییم، هرگاه $x \geq 0$. مجموعه ی تمام عضوهای مثبت E را با نماد E^+ نشان می دهیم. یعنی:

$$E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}. \tag{۸.۱}$$

تعریف ۱۵.۱.۱. فضای برداری مرتب E را که برای هر $x, y \in E$، $\sup\{x, y\}$ در E وجود داشته باشد، یک مشبکه ی برداری [۷] (فضای ریس [۸]) می نامیم.

نمادهای جدید را به شرح زیر معرفی می کنیم.

$$x \vee y := \sup\{x, y\}, \tag{۹.۱}$$

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}. \tag{۱۰.۱}$$

---

[۱] Order relation
[۲] Reflexive
[۳] Antisymmetric
[۴] Transitive
[۵] Ordered vector space
[۶] Positive
[۷] Vector lattice
[۸] Riesz space

یاد آور می شویم که دو عنصر $x, y \in E$ دارای سوپریمم k در E اند، هرگاه $x \leq k$ و $y \leq k$، و اگر z یک کران بالایی $\{x, y\}$ باشد، آنگاه $k \leq z$ برقرار باشد.

مثال ۱.۱.۱. *فضای $c_\circ = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} :\ \lim_n \mid f(n) \mid = \circ\}$ با توجه به آنچه که در پایین می آید، یک مشبکه ی برداری می باشد.*

برای هر $f, g \in c_\circ$ رابطه ی ترتیبی را روی $c_\circ$ به شرح زیر تعریف می کنیم.

$$f \leq g \Leftrightarrow f(n) \leq g(n), \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{۱۱.۱}$$

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$ و برای هر $f, g, h \in c_\circ$ رابطه ی زیر را خواهیم داشت:

$$f \leq g \Rightarrow f(n) \leq g(n) \Rightarrow f(n) + h(n) \leq g(n) + h(n) \Rightarrow f + h \leq g + h. \tag{۱۲.۱}$$

همچنین برای هر اسکالر $\alpha \geq \circ$ و هر $f, g \in c_\circ$ و هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه ی زیر نیز برقرار خواهد بود.

$$f \leq g \Rightarrow f(n) \leq g(n) \Rightarrow \alpha f(n) \leq \alpha g(n) \Rightarrow \alpha f \leq \alpha g. \tag{۱۳.۱}$$

در نتیجه $c_\circ$ با توجه به قسمت های (۱۲.۱) و (۱۳.۱) همراه با رابطه ی ترتیبی (۱۱.۱) یک فضای برداری مرتب است.

در ادامه اگر برای هر $f, g \in c_\circ$، h را سوپریمم g, f بگیریم، برای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه ی زیر را خواهیم داشت.

$$\mid h(n) \mid = \mid (f \vee g)(n) \mid = \mid \sup\{f(n), g(n)\} \mid \leq \sup\{\mid f(n) \mid, \mid g(n) \mid\}. \tag{۱۴.۱}$$

در نتیجه با توجه به قسمت (۱۴.۱)،

$$\lim_n \mid h(n) \mid = \circ \Rightarrow h \in c_\circ. \tag{۱۵.۱}$$

بنابراین $c_\circ$ یک مشبکه ی برداری می باشد.

مثال ۲.۱.۱. *فضای $l^{\infty}=\{f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}:\ \sup_n\mid f(n)\mid<\infty\}$ یک مشبکه ی برداری می باشد.*

فضای l^{∞} با همان رابطه ی ترتیبی تعریف شده روی فضای $c_{\circ}$ یک فضای برداری مرتب می باشد.
حال دو عنصر دلخواه g,f را از l^{∞} برداشته و سوپریمم آن ها را با h نشان می دهیم. برای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطه ی زیر برقرار خواهد بود.

$$\mid h(n)\mid=\mid f\vee g(n)\mid=\mid\sup\{f(n),g(n)\}\mid\leq\sup\{\mid f(n)\mid,\mid g(n)\mid\}<\infty. \tag{۱۶.۱}$$

در نتیجه با توجه به (۱۶.۱)،

$$\sup\mid h(n)\mid<\infty\Rightarrow h\in l^{\infty}. \tag{۱۷.۱}$$

بنابراین l^{∞} یک مشبکه ی برداری است.

مثال ۳.۱.۱. *فضای $l^{۱}=\{f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}:\ \sum_{n=۱}^{\infty}\mid f(n)\mid<\infty\}$ یک مشبکه ی برداری می باشد.*

$l^{۱}$ با همان رابطه ی ترتیبی تعریف شده روی $c_{\circ}$ یک فضای برداری مرتب است.
حال اگر g,f عناصری از $l^{۱}$ باشند، می دانیم که $(f\vee g)(n)$ یا برابر با $f(n)$ یا $g(n)$ است. درنتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\mid(f\vee g)(n)\mid<\infty\Rightarrow f\vee g\in l^{۱}. \tag{۱۸.۱}$$

تعریف ۱۶.۱.۱. برای هر عنصر x از مشبکه ی برداری E، عناصر زیر را تعریف می کنیم.

$$x^{+}:=x\vee\circ\quad,x^{-}:=(-x)\vee\circ\quad,\mid x\mid:=x\vee(-x) \tag{۱۹.۱}$$

عنصر x^{+} قسمت مثبت [۱] ، عنصر x^{-} قسمت منفی [۲] و $\mid x\mid$ قدر مطلق [۳] x نام دارد.

تعریف ۱۷.۱.۱. زیر فضای F از مشبکه ی برداری E را زیر مشبکه [۴] گوییم، هرگاه برای هر دو عضو a و b از F، $a\vee b$ متعلق به F باشد.

[۱] Positive part
[۲] Negative part
[۳] Absolute
[۴] Sublattice