بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **غلامحسین راستی** متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه که حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می باشد.[1]

نام و نام خانوادگی دانشجو

غلامحسین راستی

امضاء

[1] تهران- لویزان- کد پستی ۱۶۷۸۸ – صندوق پستی ۱۶۷۵۸-۱۶۳ تلفن ۲۲۹۷۰۰۶۰-۹ (داخلی ۲۳۴۷)
نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی: sru@sru.ac.ir

دانشکده علوم پایه

انتشار امواج آکوستیک در متامواد

دانشجو

غلامحسین راستی

استاد راهنما : دکتر مهدی سعادت

استاد مشاور : دکتر ایوب اسماعیل پور

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک – حالت جامد

شهریور ۱۳۹۱

تاییدیه هیات داوران

تقدیم:

این اثر ناقابل را تقدیم می کنم به محضر باشکوه پروردگار بخشنده و مهربانم.

- ✓ **او که اول و آخر است و ظاهر و باطن.**
- ✓ **هم او که به انجام هر کاری تواناست.**
- ✓ **هم او که برای هدایت ما، آیات روشن و نبی و وصیی پاک و راست گو عنایت فرمود.**
- ✓ **هم او که همواره مربی و حافظ و ناصر من بوده است.**
- ✓ **هم او که از لحظه ی نخست تولدم، مرا از سایه ی پرمهر پدر و مادری مهربان و دلسوز بهره مند کرد.**
- ✓ **هم او که مرا در کانون گرم خانواده ای باصفا قرار داد.**
- ✓ **هم او که به من همسری مهربانتر از گلهای بهاری و پاک تر از چشمه های کوهساران عنایت فرمود.**
- ✓ **هم او که مرا در خدمت اساتیدی پربار و در عین حال متواضع گماشت.**
- ✓ **خدایا! همیشه تو را سپاس میگویم و از تو یاری می جویم.**

تقدیر وتشکر:

- جا دارد از زحمات کلیه ی عزیزانی که برای نگارش این اثر به مرا یاری کرده اند، تشکر بعمل آورم.
- در آغاز، از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر سعادت که حق بسیار زیادی به گردن من دارند، تشکر می کنم. ایشان نه تنها یک الگوی علمی بی نظیر، بلکه شخصیتی فاضل و وارسته می باشند که از هر لحاظ نمونه بی نظیر بزرگمنشی و فروتنی برای همه دانشجویان بوده اند.
- همچنین از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر ایوب اسماعیل پور تشکر می نمایم که از محضر ایشان استفاده کرده ام.
- در ادامه جا دارد از پدر و مادر عزیزم و بعد از آن از خواهر و برادرم که در همه مراحل زندگی یار و غمخوار من بوده اند تشکر کنم.
- اما تشکر ویژه را تقدیم به همسر مهربانم می کنم که با دلسوزی تمام، لحظه به لحظه مرا در تهیه و ارائه این اثر همراهی می کردند و از خدای مهربان توفیق روزافزون ایشان را خواستارم.

چکیده:

پیشتر محققین موفق به ساخت موادی شده بودند که هنگام مواجهـه بـا امـواج الکترومغناطیسـی، در فرکانس های خاص، از گذردهی الکتریکی یا تراوایی مغناطیسی منفی برخوردار می شدند. لذا ممکن بـود ضریب شکست این مواد، موهومی یا منفی گردد. به این نوع مواد دست ساز، متامواد الکترومغناطیسی می گویند که دارای خواص غیرمتعارفی نظیر پدیده مخفی شدن، ابرلنزها و اثر دوپلر منفی هستند.

در تناظر با متامواد الکترومغناطیسی، چنانچه مدول حجمی ، چگالی موثر ماده و یا هردوی آنها منفـی شوند، خواصی مشابه این بار در مواجهه با امواج صوتی مشاهده می شود. امواج صوتی دسـته ای از امـواج مکانیکی هستند که برای انتشار خود به محـیط مـادی احتیـاج دارنـد. بـه ایـن نـوع متامـاده متامـاده‌ی آکوستیک می گویند.

در این پروژه به تجزیه و تحلیل این دسته از مـواد مصـنوعی خـواهیم پرداخـت و انـواع آن را بررسـی خواهیم کرد.

کلمات کلیدی :

متامواد، امواج آکوستیک، بازتاب و عبور، معادله موج تخت، ماتریس انتقال

فهرست مطالب

1فصل اول : امواج آکوستیک و بازتاب و عبور آنها		۱
۱-۱	معادله موج آکوستیک و حل ساده آن:	۲
۱-۲	فرض های اولیه :	۳
۱-۳	معادله ی حالت	۳
۱-۴	شرایط ترمودینامیکی خاص	۴
۱-۵	معادله ی پیوستگی :	۴
۱-۶	معادله ی خطی موج	۶
۱-۷	موج های تخت هماهنگ :	۶
۱-۸	چگالی انرژی	۹
۱-۹	شدت صوتی	۱۰
۱-۱۰	امپدانس صوتی ویژه	۱۱
۱-۱۱	یکای دسی_بل	۱۱
۱-۱۲	بازتاب و عبور امواج آکوستیک	۱۲
۱-۱۳	عبور موج صوتی از یک سیال به سیال دیگر با تابش عمودی	۱۳
۱-۱۴	عبور از یک لایه ی سیال با تابش عمود	۱۷
۱-۱۵	تابش مایل	۲۰
۱-۱۶	بازتاب از سطح جامد	۲۲

فهرست مطالب

۲	متامواد آکوستیک	۲۵
۲-۱	متاماده آکوستیک تک منفی -با مدول موثر منفی-	۲۵
۲-۲	متا ماده‌ی صوتی با چگالی موثر منفی	۳۰
۲-۳	متاماده ی آکوستیک دومنفی با چهار علامت مختلف	۳۶
۳	بررسی خط انتقال آکوستیک	۴۴
۳-۱	معرفی	۴۴
۳-۲	مدار های آکوستیک	۴۵
۳-۳	مدارهای آکوستیک	۴۶
۳-۴	القای آکوستیک	۴۷
۳-۵	ظرفیت آکوستیک	۴۸
۳-۶	متامواد آکوستیک همسانگرد	۴۸
۳-۷	شبکه ی متا مواد آکوستیک همسانگرد	۵۰
۴	روش ماتریس انتقال برای پیش بینی افت انتقال مواد آکوستیک چند لایه	۵۵
۴-۱	معرفی	۵۵
۴-۲	آماده سازی آزمایش	۵۶
۴-۳	ماتریس انتقال اصلی	۵۶

فهرست مطالب

۴-۴	استفاده از نظریه ی آکوستیک برای محاسبه ی ماتریس انتقال	۵۹
۴-۵	معادله موج وحل آن:	۶۱
۴-۶	ویژگی های معادله موج:	۶۱
۴-۷	ماتریس انتقال	۶۲
۴-۸	ضریب عبور و امپدانس	۶۳

فهرست اشکال:

شکل ۱-۱: یک المان حجم سیال که نشاندهنده ی نرخ ورود و خروج جرم سیال است که ناشی از حرکت سیال در جهت x می باشد. ۵

(شکل ۱-۲) : سطوح فاز-ثابت برای موج تختی که عدد موج آن k است ۸

(شکل ۱-۳): عبور و بازتاب امواج تخت، که به صورت عمود روی مرز صفحه ایبین دو سیال مختلف با امپدانس های مشخصه متفاوت فرود می آید. ۱۴

(شکل ۱-۴) : بازتاب و عبور یک موج تخت که به طور عمود بر روی لایه ای با ضخامت یکنواخت، تابیده شده است. ۱۳

شکل ۱-۵ : بازتاب و عبور موج تخت که به صورت مایل به مرز تخت بین دو سیال با امپدانس های مشخصه ی مختلف تابیده شده است. ۲۱

شکل ۲-۱: متا ماده ی آکوستیک با مدول منفی به صورت شماتیک ۲۶

شکل ۲-۲ : تغییرات دامنه ی موج صوتی آکوستیک هنگام عبور از متاماده ی آکوستیک با مدول منفی، به ازای فرکانس های مختلف ۲۷

شکل ۲-۳ : نرخ عبور موج آکوستیک هنگام عبور از متاماده ی آکوستیک با مدول منفی، به ازای فرکانس های مختلف ۲۹

شکل ۲-۴ : سرعت فاز موج آکوستیک هنگام عبور از متاماده ی آکوستیک با مدول منفی، به ازای فرکانس های مختلف ۲۹

شکل ۲-۵ : متاماده ی آکوستیک تک منفی با چگالی موثر منفی ۳۳

شکل ۲-۶: دامنه ی عبور موج آکوستیک از متاماده ی تک منفی با چگالی موثر منفی (A) : بر حسب مکان (B) : بر حسب فرکانس ۳۶

شکل ۲-۷ : سرعت فاز در متاماده با چگالی موثر منفی بر حسب فرکانس ۳۶

شکل ۲-۸ : ساختار ترکیبی متاماده دو-منفی متشکل از غشاها و مشددهای هلمهولتز که یکی در میان چیده شده اند. ۳۸

شکل ۲-۹ : یک مدار متشکل از القاگر سری و خازن موازی که معادل است با یک لوله‌ی ساده پر از هوا ... ۳۹

شکل ۲-۱۰ : معادل الکتریکی سلول واحد ساختار P-منفی که شامل غشا است ۴۰

شکل ۲-۱۱ : نمایش متا ماده ی آکوستیک دو منفی مورد بحث متشکل از خازنهای و القاگر های سری و متوالی ۴۰

.. شکل ۲-۱۲ : اطلاعات عبور، برای دو نوار گذار و دو نوار توقف ۴۱

شکل ۲-۱۳: بردار موجها در نوار فرکانس $\omega 0 < \omega < \omega c$ منفی هستند و در فرکانس بیشتر از ωb

مثبت هستند. ۴۲
شکل ۲-۱۴.نمایش نمودار طول موج..... ۴۳
شکل ۳-۱ : (A) یک لوله با انتهای باز معادل با یک القاگر آکوستیک است. (B) یک لوله با انتهای بسته معادل یک خازن آکوستیک است. ۴۸
شکل ۳-۲ : سلول واحد خط عبور توزیع یافته همسانگرد دوبعدی ۵۰
شکل ۳- ۳ : (A) : سلول واحد محیط PI) B) : محیط NI . هندسه دوبعدی سلول واحدها در (C) محیط PI و (D) محیط NI متناظر با مدار توده ای در یک (E)محیط PI و (F) یک محیط NI است. ۵۳
شکل ۴-۱ شکل ۴ ۱: پیکر بندی آزمایش تعیین ماتریس انتقال آکوستیک ۵۶
شکل ۴-۲ : افت عبور اندازه گیری شده در نمونه های ۱+۲ تایی ۵۹

فهرست علائم و اختصارات :

مکان تعادلی المان سیال	$\vec{r}$
جابه جایی ذره ای المان سیال از نقطه تعادل	$\vec{\xi}$
سرعت ذره ای المان سیال	$\vec{u}$
چگالی لحظه ای سیال	ρ
تراکم پذیری	S
فشار صوتی	P
سرعت ترمودینامیکی صوت در سیال	c
دما بر حسب کلوین	T_k
امپدانس صوتی ویژه	Z
مقیاس دسی_بل	dB
چگالی موثر	ρ_{eff}
مدول کپه ای	κ

فصل اول

امواج آکوستیک و بازتاب و عبور آنها

۱ فصل اول : امواج آکوستیک و بازتاب و عبور آنها

۱-۱ معادله موج آکوستیک و حل ساده آن:

موج آکوستیک از نوعی نوسانات فشار که در سیال تراکم پذیر وجود دارد، ناشی می شود. سیالات"غیر ویسکوز" نسبت به تغییر شکل، قیدهای کمتری در مقایسه با جامدات دارد. نیروی بازگرداننده ای که انتشار موج را به وجود می آورد، همان تغییر فشاری است که به واسطه انبساط یا انقباض سیال به وجود می آید. المان سیال، در جهت نیروی اعمالی عقب و جلو می رود و باعث انقباض و انبساط المان مجاور می شود. واژگان و نمادهای مورد استفاده به شرح زیر است:

۱-۱-۱ مکان تعادلی المان سیال ($\vec{r}$) :

(۱-۱)

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

۱-۱-۲ جابه جایی ذره ای المان سیال از نقطه تعادل : $(\vec{\xi})$

(۲-۱)

$$\vec{\xi} = \xi_x\hat{x} + \xi_y\hat{y} + \xi_z\hat{z}$$

۱-۱-۳ سرعت ذره ای المان سیال : $(\vec{u})$

(۳-۱)

$$\vec{u} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + \xi u_z\hat{z}$$

۱-۱-۴ چگالی لحظه ای در (x,y,z) : (ρ)

۱-۱-۵ چگالی تعادلی در (x,y,z) : (ρ_0)

۱-۱-۶ تراکم در (x,y,z) : (s)

(۴-۱)

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

۱-۱-۷ فشار لحظه ای در (x,y,z) : (p)

۱-۱-۸ فشار تعادلی در (x,y,z) : (p_0)

۱-۱-۹ .فشار صوتی در (x,y,z) : (P) که $(P = p - p_0)$

۱-۱-۱۰ سرعت ترمودینامیکی صوت در سیال : c

۱-۱-۱۱ دما بر حسب کلوین : T_k

۱-۲ فرض های اولیه :

۱-۲-۱ واژه هایی نظیر المان سیال و ذره ، بر حجم بسیار کوچکی از سیال دلالت دارد که اندازه اش آنقدر بزرگ است که میلیونها مولکول را در برگیرد.به نحوی که سیال را محیطی پیوسته در نظر بگیریم. اما آنقدر هم کوچک باشد که متغیرهای صوتی هنگام عبور از آن یکنواخت باقی بماند.

۱-۲-۲ هرچند که سرعت جابجایی ذرات سیال بسیار بیشتر از سرعت ذره بواسطه ی حرکت موج است ، اما چون ذرات دور شونده جایگزین می شوند، می توان هر جزء سیال را بدون تغییر در نظر گرفت. یعنی ویژگی های ماکروسکوپیک اجزاء سیال ثابت است.

۱-۲-۳ از اثرات اتلافی سیال هم چشم پوشی می کنیم. (نظیر ویسکوزیته و انتقال گرما)

۱-۲-۴ فرض می شود نوسانات ناشی از موج دارای دامنه ی کوچک است. پس تغییرات در چگالی محیط نسیت به حجم تعادلی، کوچک است.

۱-۳ معادله ی حالت

برای محیط سیال، معادله‌ی حالت باید سه کمیت فیزیکی را که رفتار ترمودینامیکی سیال را توصیف می کنند، به یکدیگر ارتباط بدهد. مثلا معادله ی حالت برای گاز کامل به این صورت است:

$$P = \rho\, r\, T_k \qquad (۵-۱)$$

که بین فشار، چگالی و دمای گاز تحت شرایط تعادل ارتباط برقرار میکند. کمیت r ثابت ویژه ی گازهاست که به ثابت جهانی گاز و وزن مولکولی گاز وابسته است. ($r = 287\ \frac{J}{kg.K}$) [۱]

۱-۴ شرایط ترمودینامیکی خاص

۱-۴-۱ سیال در فرآیند همدما برای گاز کامل :

(۱-۶)

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

۱-۴-۲ سیال آدیابات (آنتروپی ثابت) :

(۱-۷)

$$\frac{P}{P_0} = (\frac{\rho}{\rho_0})^{\gamma}$$

که γ نسبت گرماهای ویژه است .(یا نسبت ظرفیت گرمایی)

۱-۴-۳ گازهای غیرکامل ذر فرآیند آدیابات:

با بسط تیلور فشار خواهیم داشت :

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)(\rho - \rho_0)^2 + \cdots \qquad (۱-۸)$$

اگر نوسانات سیال کوچک باشد، فقط پایین ترین توان جمله $(\rho - \rho_0)$ استفاده می شود. پس

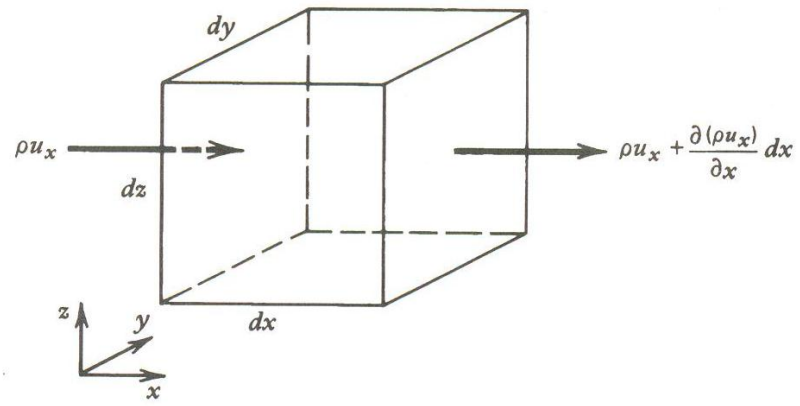
$$P - P_0 = \beta \ \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \qquad (۱-۹)$$

که β مدول حجمی آدیاباتیک نام دارد :

$$\beta = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \qquad \rightarrow \quad P = \beta s \qquad (۱-۱۰)$$

۱-۵ معادله ی پیوستگی :

اکنون به دنبال رابطه بین سرعت ذره $\vec{u}$ و چگالی لحظه ای ρ می گردیم. المان حجم را $dV = dx\, dy\, dz$ در نظر می گیریم. که در فضا ثابت است و سیال درون ان عبور می کند.



شکل ۱-۱: یک المان حجم سیال که نشاندهنده ی نرخ ورود و خروج جرم سیال است که ناشی از حرکت سیال در جهت x می باشد. نمودار مشابهی را می توان بری حرکت سیال در راستاهای y و z نوشت. [۱]

نرخ ورود جرم به داخل حجم از طریق سطح آن برابراست با نرخ افزایش جرم درون حجم :

$$\left[\rho u_x - \left(\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx\right)\right] dydz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \qquad (۱۱-۱)$$

روابط مشابهی شار خالص را در جهت y و z بیان می کند.پس شار کلی ورودی برابر است با :

$$-\left(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right) dV = -\nabla.(\rho\vec{u}) dV \qquad (۱۲-۱)$$

نرخ افزایش جرم درون حجم برابر است با $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$. شار خالص ورودی باید با نرخ افزایش جرم برابر باشد.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{u}) = 0 \qquad (۱۳-۱)$$

این معادله ی دقیق پیوستگی نام دارد. جمله ی دوم سمت چپ ، شامل حاصلضرب سرعت ذره و چگالی لحظه ای است ، که هردوی آنها متغیرهای آکوستیکی هستند. هرچند اگر بنویسیم $\rho = \rho_0(1 + s)$ و ρ_0 نسیت به زمان، تابعیت ضعیفی داشته باشد، و با فرض اینکه s بسیار کوچک است، معادله ی بالا به صورت زیر تغییر می یابد :

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla.(\rho_0\vec{u}) = 0 \qquad (۱۴-۱)$$

این معادله، معادله ی خطی پیوستگی نام دارد. علاوه براین، اگر ρ_0 تابعیت ضعیفی از فضا داشته باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla.\vec{u} = 0 \qquad (۱۵-۱)$$

با اعمال نیروی df به این المان سیال و نوشتن قانون نیوتن و بسط تیلور سرعت سیال، به رابطه ی

مشهور خطی اویلر می رسیم :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla P \quad (۱-۱۶)$$

که برای فرآیندهای ترمودینامیکی با دامنه ی کوچک برقرار است. [۲]

۱-۶ معادله ی خطی موج

معادلات خطی (۱-۱۰) ، (۱-۱۴) و (۱-۱۶) را می توان در یکدیگر ترکیب کرد تا بـه یـک معادلـه ی دیفرانسیل با یک متغیر وابسته رسید. در آغاز از معادله ی (۱-۱۶) دیورژانس می گیریم:

$$\nabla.(\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}) = -\nabla^2 P \quad (۱-۱۷)$$

سپس از طرفین روابط (۱-۱۴) مشتق زمانی می گیریم.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla.\left(\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) = 0 \quad (۱-۱۸)$$

با حذف جمله ی دیورژانس از دو طرف تساوی خواهیم داشت :

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (۱-۱۹)$$

معادله ی (۱-۱۰) به ما این اجازه را می دهد که تراکم را به صورت $s = {}^{P}/_{\beta}$ بنویسیم که β تابعیـت ضعیفی از زمان دارد :

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (۱-۲۰)$$

که c سرعت ترمودینامیکی صوت نام دارد که اینگونه تعریف می شود:

$$c^2 = \frac{\beta}{\rho_0} \quad (۱-۲۱)$$

معادله ی موج فوق، معادله ی موج خطی و بدون افت برای انتشار صـوت در سـیالی بـا سـرعت فـاز c است. [۲]

۱-۷ موج های تخت هماهنگ :

از این به بعد، بحث خود را به سیال همگن و همسانگرد که در آنها سرت صوت مقـدار ثابـت c اسـت، محدود می کنیم. ویژگی مشخصه ی موج تخت این است که متغیر آکوستیک، روی هر صفحه ی عمود بر راستای انتشار دارای دامنه ی ثابت و فاز ثابتی است.چون سطح هایی با فاز ثابت برای هـر مـوج واگـرا در فاصله ی بسیار دور از منبع، تقریبا به صورت صفحه ای درمی آید، بنابراین بسیار شبیه به موج تخت مـی

شود. اگر راستای انتشار موج در جهت محور x باشد، آنگاه :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad (۲۲-۱)$$

که p فشار آکوستیکی تابعی از x و t است.می دانیم که جواب معادله ی فوق، یک موج عرضی است. پس مستقیما به سراغ موج صفحه ای هارمونیک می رویم و روابط بین متغیرهای آکوستیک را بدست می آوریم. جواب مختلط معادله ی فوق بر حسب فشار آکوستیک به صورت زیر است:

$$P = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)} \qquad (۲۳-۱)$$

و به کمک رابطه ی خطی اویلر (۱-۱۶) خواهیم داشت:

$$\vec{u} = u\hat{x} = \left[\left(\frac{A}{\rho_0 c}\right)e^{j(\omega t - kx)} - \left(\frac{B}{\rho_0 c}\right)e^{j(\omega t + kx)}\right]\hat{x} \qquad (۲۴-۱)$$

که $\vec{u}$ موازی با راستای انتشار است.اگر زیر نویس (+) نشاندهنده ی انتشار موج در جهت (+x) و زیر نویس (-) نشاندهنده ی انتشار موج در جهت (-x) باشد، آنگاه :

$$P_+ = Ae^{j(\omega t - kx)} \quad , \quad P_- = Be^{j(\omega t + kx)} \qquad (۲۵-۱)$$

$$u_{\pm} = \pm \frac{P_{\pm}}{\rho_0 c} \qquad (۲۶-۱)$$

$$s_{\pm} = \pm \frac{P_{\pm}}{\rho_0 c^2} \qquad (۲۷-۱)$$

اگر موج جهت موج تخت را " دلخواه " در نظر بگیریم، جواب معادله‌ی دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$P = Ae^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \qquad (۲۸-۱)$$

با قرار دادن این جواب در معادله ی دیفرانسیل متوجه می شویم:

$$(\frac{\omega}{c})^2 = {k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2 \qquad (۲۹-۱)$$

تعریف بردار انتشار $\vec{k}$ به صورت زیر است :

$$\vec{k} = k_x\,\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} \qquad (۳۰-۱)$$

که مقدار آن برابر $\frac{\omega}{c}$ است.

بردار $\vec{r}$ که نشان دهنده ی مکان نقطه ی (x,y,z) نسبت به مبدا است، به ما کمک می کند تا جواب امتحانی را به صورت زیر بیان کنیم:

$$P = Ae^{\,j\,(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \qquad (۳۱-۱)$$

سطح فاز ثابت به کمک رابطه ی $\vec{k}.\vec{r} = const$ بیان می شود. با توجه به اینکه تعریف گرادیان به صورت $\vec{k} = \nabla(\vec{k}.\vec{r})$ برداری عمود بر سطح "فاز ثابت" است، لذا بردار $\vec{k}$ نشان دهنده ی جهت انتشار است.مقدار $\vec{k}$ عدد موج نامیده می شود.به عنوان یک حالت خاص، یک موج تخت که سطح های فازثابت آن موازی با محور z است، درنظر بگیرید. جواب معادله ی موج آن به صورت زیر است :