بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش کاربردی

روش هوموتوپی برای حل معادلات تابعی

از:

معصومه پرتوی

استاد راهنما:

دکتر جعفر بی آزار

تیر ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند، سپاس بی کران دارم.

تقدیر و تشکر

خدایا

تو را سپاس می گوییم و هر کاری را فقط با نام تو آغاز می کنیم، و جز تو را نیایش و پرستش نمی نماییم و از غیر تو یاری نمی خواهیم.

از استاد راهنمای گرامی، جناب آقای دکتر جعفر بی آزار که در راستای انجام این پایان نامه با زحمات بی دریغ و راهنمایی های ارزشمندشان مشوقم بودند تشکر و قدردانی می نمایم.

همچنین از اساتید بزرگوار آقایان دکتر نصیر تقی زاده و دکتر مازیار صلاحی که با حسن دقت و توجه داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند سپاسگزارم. از دوستان عزیز، خانم زینب آیاتی و خانم حمیده ابراهیمی به جهت همکاری و راهنمایی اینجانب متشکرم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان صفحه

فهرست جدول ها

عنوان صفحه

فهرست شکل ها

عنوان **صفحه**

چکیده

روش هوموتوپی برای حل معادلات تابعی
معصومه پرتوی

روش آشفتگی هوموتوپی که یکی از روش های توانا برای حل معادلات تابعی است، برای حل معادلات و دستگاه های انتگـرال ، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی به کار رفته است. نتایج به دست آمده توانایی و سادگی روش را آشکار می سازد. مثال های متنوعی برای نشان دادن قابلیت ها و توانایی های روش در پایان نامـه آمـده اسـت. بـرای انجـام محاسبات نرم افزار Maple۱۱ استفاده شده است.

کلید واژه: معادلات تابعی، روش آشفتگی هوموتوپی.

Abstract

Solutions of the functional equations by Homotopy perturbation method.
Masoomeh Partovi

Homotopy perturbation method, as a powerful device for solving functional equations has been employed to solve equations and systems integral, system of partial differential equations and ordinary differential equations. The results obtained reveal the ability and simplicity of the method. To illustrate the method some examples are provided. For computations Maple 11 is used.

Keyword: Functional equations, Homotopy perturbation method.

پیشگفتار

آنالیزعددی برای محققان رشته های علوم و مهندسی هر روز بیش از پیش به عنوان اساس و ابزار کار مورد استفاده قرار می گیرد. امروزه نقش این شاخه از ریاضیات کاربردی بسیار با اهمیت است به طوری که همه رشته های علوم و ریاضی به آن نیاز دارند و یکی از زمینه های پر کاربرد در آنالیز عددی حل معادلات تابعی است. معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال و معادلات انتگرال- دیفرانسیل دسته هایی از معادلات تابعی هستند. امکان پیدا کردن جواب تحلیلی برای اکثر معادلات وجود ندارد و یا به کارگیری آن ها بسیار دشوار است. در چنین مواقعی به روش های عددی رو می آوریم. در این پایان نامه به حل چند نمونه از معادلات دیفرانسیل جزئی و دستگاه معادلات و دستگاه معادلات انتگرال با استفاده از **روش آشفتگی هوموتوپی** می پردازیم.

در **فصل اول** برخی مفاهیم و تعاریف اولیه در معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرال و روش تجزیه آدومین ارائه شده است. در **فصل دوم** ساختار کلی روش آشفتگی هوموتوپی، با ارائه مثال هایی کارایی روش نشان داده می شود. در **فصل سوم** کاربرد هایی از روش آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات و دستگاه معادلات دیفرانسیل و دستگاه معادلات انتگرال ارائه شده است.

فصل اول

تعاریف و مقدمات اولیه معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرال و معرفی روش تجزیه آدومین

۱-۱ مقدمه

در هر پدیده ای، چه در علوم طبیعی از قبیل فیزیک، شیمی، زیست شناسی، پزشکی و نجوم و یا علوم نظری مانند روان شناسی و جامعه شناسی و غیره متغیرها و پارامترهای مختلفی وجود دارند که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم در ارتباط هستند. معادله تابعی حاصل از پدیده ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک و یا چند متغیر مستقل مطالعه می شود، یک معادله دیفرانسیل است. اگر تابع فقط به یک متغیر مستقل بستگی داشته باشد، یک معادله دیفرانسیل معمولی[1] و اگر تعداد متغیرها بیش از یکی باشد، معادله دیفرانسیل جزئی[2] است. در نتیجه مدل های ریاضی نظیر به جای معادلات دیفرانسیل معمولی، مستلزم معادلات دیفرانسیل جزئی هستند.

به عنوان یک مثال ساده به دمای اتاقی که در آن نشسته اید، توجه کنید واضح است که دمای اتاق از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می کند، یعنی تابعی از مختصات دکارتی x, y و z است. همچنین دما با زمان تغییر می کند. بنابراین آن را می توان به صورت $u=u(x,y,z,t)$، نوشت.

۱-۲ تعاریف و مقدمات اولیه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در هندسه و فیزیک زمانی پدید می آیند که تعداد متغیرهای مستقل در مسئله دو یا بیشتر از دو باشد. در چنین حالتی هر متغیر وابسته، احتمالاً تابع بیش از یک متغیر است، لذا نسبت به یک متغیر تنها مشتق عادی ندارد بلکه مشتقات جزئی نسبت به چند متغیر دارد. به طور کلی می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$F(x,y,\ldots,u,u_x,u_y,\ldots,u_{xx},\ldots,u_{yy},\ldots)=0 \qquad (۱-۱)$$

که در آن u_x, u_y و ... مشتقات جزئی (نسبی) این تابع هستند و به صورت های زیر بیان می شود

[1] Ordinary Differential Equation
[2] Partial Differential Equation

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \dots$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u_{yx}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \quad , \quad \dots$$

۱-۲-۱ تعریف

بالاترین مرتبهٔ مشتق در معادله (۱-۱) را مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی گویند. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به صورت $F(x,y,u_x,u_y,u)=0$ و معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به صورت زیر است

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$$

۱-۲-۲ مثال

معادلات زیر را در نظر می گیریم

۱) $u_{xx}+2xu_{xy}+u_{yy}=e^{y}$,

۲) $u_{xxy}+xu_{yy}+8u=7y$

معادلات (۱) و (۲) به ترتیب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دو و مرتبهٔ سه است.

۱-۲-۳ تعریف

اگر هر جمله معادله دیفرانسیل جزئی، نسبت به تابع مجهول و همه مشتقاتش، از درجه یک باشد، معادلـه خطـی نامیـده مـی شود و اگر نسبت به بالاترین مشتق مرتب شده تابع مجهول خطی باشد، شبه خطی گویند. معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد معادله غیرخطی نامیده می شود.

۱-۲-۴ مثال

معادلات زیر را در نظر می گیریم

۱) $yu_{xx}+2xyu_{xy}+u=1$,

۲) $u_xu_{xx}+xu_{yy}=\sin y$,

۳) $uu_{xx}+u_y^2=u^2+y$

معادلات (۱) و (۲) و (۳) به ترتیب یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبهٔ دو و شبه خطی مرتبهٔ سه و غیر خطی مـرتبهٔ دو است.

۱-۲-۵ تعریف

یک معادله دیفرانسیل جزئی را همگن گوییم، در صورتی که هر جمله آن شامل متغیر وابسته و یا یکی از مشتق های آن باشد.

۱-۲-۶ مثال

۱) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,$

۲) $uu_{xx}+u_y^2=u^2+y,$

معادله (۱) یک معادله همگن و معادله (۲) یک معادله غیر همگن است.

بسیاری از پدیده های فیزیکی به معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبۀ دوم منجر می شوند. از جمله آن ها می توان بـه مـوارد زیـر اشاره کرد

۱) معادله موج $u_{xx}-u_{tt}=0,$

۲) معادله لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0,$

۳) معادله شرودینگر در مکانیک کوآنتم $\nabla^2 u+a[E-v(x,y,z)]u=0,$

۴) معادله گرما $u_{xx}-u_t=0,$

۵) معادله تلگراف $u_{xx}-u_{tt}-u_t=0,$

۶) معادله یک بعدی انتشار $k\varphi_{xx}-\varphi_t=0,$

۷) معادله پواسن $\nabla^2 u=f(x,y,z),$

۱-۳ شرایط اولیه و مرزی برای معادله ی دیفرانسیل جزئی

برای به دست آوردن جواب هر معادله دیفرانسیل جزئی، شرایط دیگری نیز باید در دسـت داشـت. ایـن شـرایط روی تمـام یـا قسمتی از ناحیه ای که جواب را در آن جستجو می کنیم، بیان خواهد شد. این شرایط ممکن است شـرایط اولیـه و یـا شـرایط مرزی باشند. شرایط مرزی تابع را، در نواحی مرزی تعیین شده توصیف می کنند و شرایط اولیه تابع مجهول را در سراسر ناحیه مفروض در زمان آغازین معین می کند[۲۶].

۱-۳-۱ مثال

معادله ی زیر را با شرایط داده شده در نظر می گیریم

$$u_t-u_{xx}=0,\qquad 0<x<l,\quad t>0,$$

شرط مرزی $u(0,t)=0, \qquad t \geq 0,$

شرط مرزی $u(l,t)=0, \qquad t \geq 0,$

شرط اولیه $u(x,0)=\cos x, \qquad 0 \leq x \leq l,$

این گونه مسائل به مسئله مقدار مرزی و یا اولیه موسوم هستند. شرایط اولیه معمولاً در زمان مشخص $t=t_0$ یا $t=0$ تعیین می شوند و در نظر گرفتن شرایط در نقطه انتهایی دیگر بازه زمانی مفروض، مرسوم نیست. در موارد بسیاری علاوه بر شرایط اولیه و مرزی، شرایط دیگری نظیر مشتقات تابع بر روی مرز نیز در نظر گرفته می شوند. به عنوان مثال معادله ی

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

مسئله فیزیکی جریان انتشار دما در امتداد یک میله نازک به طول l است با شرایط مرزی

$$u_x(0,t)=0, \qquad t \geq 0,$$

$$u_x(l,t)=0, \qquad t \geq 0.$$

۱-۴ کاربردهایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در این بخش کاربردهایی از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول و دوم و مراتب بالاتر بیان می شود.

۱-۴-۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول

این معادلات در فرآیند های تصادفی به فراوانی کاربرد دارند.

۱-۴-۱-۱ مثال

یکی از این معادلات « معادله فوکر-پلانک»[1] است

$$(P)_t = \beta(Px)_x + D(P)_{xx}, \qquad (۱-۲)$$

که در حالت $D=0$، معادله (۱-۲) به معادله خطی مرتبه اول

$$(P)_t = \beta x(P)_x + \beta P,$$

تبدیل می شود.

[1] Fokker-Plank

مهمترین موارد پیدایش معادلات مرتبه اول در نظریه فرآیند های تولید و مرگ باکتری ها است که این معادله در زمینه های مختلفی از جمله فیزیک جامد، فیزیک شیمی، فیزیک ریاضی و تئوری زیست شناسی به کار برده می شود [۲۳].

جواب عمومی معادله فوکر-پلانک که برای شرح حرکت براونی ذره ها یا احتمال توزیع انحراف یک نوفه الکتریکی معرفی می گردد به صورت زیر است

$$P=\frac{1}{x}f\,(xe^{\beta t}).$$

۱-۴-۱-۲ مثال

توزیع احتمال مکالمات تلفنی که در عده ای از خطوط صورت گرفته، بر طبق قوانین زیر است:

الف) اگر خطی اشغال باشد احتمال اینکه مکالمه ای که در زمان $t=0$، شروع شده است در فاصله زمانی $(t,t+\delta t)$ تمام شود، $\mu\delta t$ است که در آن μ مقداری ثابت است.

ب) احتمال اینکه در فاصله زمانی $(t,t+\delta t)$ تلفنی زده شود $\lambda\delta t$است، که λ مقداری ثابت است.

ج) اگر زمان δt بسیار کوتاه باشد احتمال قطع دو مکالمه در زمان δt قابل اغماض است.

اگر $P_n(t)$ احتمال اشغال بودن n خط در زمان t باشد، تابع مولد احتمال در معادله زیر صدق می کند [۲۳].

$$\frac{\partial P}{\partial t}=(z-1)\{\lambda P-\mu\frac{\partial P}{\partial z}\}$$

۱-۴-۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم

معادلات دیفرانسیل در ریاضی فیزیک به طور وسیع کاربرد دارند. در واقع به همین دلیل است که مطالعه این معادلات ارزش کاربردی بسیار دارد. حیطه ریاضی فیزیک در این زمینه را به مفهوم وسیع کلمه، توصیف پدیده های طبیعی به زبان ریاضی تعبیر می کنیم.

۱-۴-۲-۱ مثال

جریان الکتریسته در یک سیم بلند عایق دار را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که جریان یک بعدی باشد، به طوری که بتوان در هر نقطه از سیم، شدت i و ولتاژ E را در هر نقطه از سیم به طول x و در زمان t مشخص کرد. اگر افت پتانسیل را در یک عنصر خطی به طول dx در نقطه x در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$-dE=iRdx+Ldx\,\frac{\partial i}{\partial t}, \qquad (۱-۳)$$

که در آن R مقاومت سری در واحد طول و L القایی برای واحد طول است. هرگاه خازنی به ظرفیت C در واحد طول در اتصال به زمین وجود داشته باشد، و اگر رسانایی سیم برای هر واحد طول G باشد، $E(x,t)$ در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر صدق می کند [۲۳].

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+(RC+LG)\frac{\partial\varphi}{\partial t}+RG\varphi, \tag{۱-۴}$$

که معادله فوق را معادله تلگرافی می گویند. هرگاه نشت برق به زمین کم باشد به نحوی که بتوان G و L را صفر فرض کرد، معادله (۱-۴) به صورت زیر ساده می شود

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

که در آن $k=(RC)^{-1}$ عدد ثابتی است و آن را معادله یک بعدی انتشار گویند.

۱-۴-۳ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مراتب بالاتر

بیشتر معادلات دیفرانسیلی که در مسائل فیزیکی بررسی می شوند، از نوع خطی و مرتبه دوم هستند. البته همه مسائل فیزیکی به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که خطی یا از مرتبه دوم باشند، منجر نمی شوند.

مثلاً حالت فشار در یک جسم دو بعدی را در نظر می گیریم. فشار به وسیله سه مؤلفه اش $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ معین می شود که این مؤلفه ها در شرایط تعادل زیر صدق می کند

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\rho X=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\rho Y=0,$$

که در آن ها X و Y مؤلفه های نیروی جسم برای هر واحد جرم هستند. برای سادگی مطلب، فرض می کنیم که نیروهای جسمی وجود ندارند، پس می توان X و Y را صفر در نظر گرفت. در این صورت به ازای هر تابع دلخواه φ، عبارت های

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

در معادلات تعادل صدق خواهند کرد. اگر جسم کشسان باشد، یعنی فشارها و تنش ها تعمیم ساده ای از قانون هوک[1] باشد، در این صورت باید φ در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0,$$

صدق کند که از مرتبه چهارم است [۲۳].

اگر جسم پلاستیک آرمانی باشد، به طوری که فشارها و تنش ها در شرط هتکی- میزس[2] باشد، در این صورت φ در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2=4k^2,$$

صدق کند که از مرتبه دوم است [۲۳].

به طور کلی حل معادلات دیفرانسیل جزئی خیلی مشکل تر از حل معادلات دیفرانسیل معمولی است و به جز در انواع خاصی از آن، هیچ راه حل عمومی برای حل این دسته از معادلات در دست نیست. برای این که علت وقوع معادلات دیفرانسیل جزئی در توصیف پدیده ها در طبیعت را درک کنیم، یادآور می شویم که بیشتر رویدادها و فرایندهای فیزیکی با توابعی شامل دو متغیر مستقل و یا بیشتر توصیف می شوند. متغیرهای معمول عبارتند از x, y و z مربوط به فضا و t برای زمان. بنابراین هر رابطه ای بین تابعی مانند $u(x,y,z,t)$ با مشتق های آن نسبت به هر یک از متغیرهای مستقل، به یک معادله دیفرانسیل جزئی منجر خواهد شد.

۱-۵ معادلات انتگرال

۱-۵-۱ تعریف

معادلاتی را که در آن تابع مجهول زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود معادله انتگرال گویند. یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $u(s)$ تابع مجهولی است که بایستی تعیین شود به صورت زیر است

$$u(s)=f(s)+\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)}K(s,t)F(u(t))dt. \qquad (۱-۵)$$

$K(s,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود. $\alpha(s)$ و $\beta(s)$ حدود انتگرال هستند. هسته معادله انتگرال یعنی $K(s,t)$ و تابع $f(s)$ از پیش معلوم اند. و هدف ما پیدا کردن تابع مجهول $u(s)$ است. اگر در معادله (۱-۵)، F به صورت غیرخطی برحسب $u(s)$ تعریف شود آن را معادله انتگرال غیرخطی و در غیر این صورت خطی گویند.

---

[1] Hooke
[2] Hencky-Mises

معادلات با مشتقات جزئی و معمولی منشأ پیدایش معادلات انتگرال هستند و امکان یافتن جواب تحلیلی برای اکثر معادلات انتگرال وجود ندارد یا در صورت وجود بسیار پیچیده و مشکل است. در چنین مواقعی به روش های عددی روی می آوریم که همیشه با نوعی خطا همراه است. البته در بین روش های عددی روشی بهتر است که خطای کمتری داشته باشد. معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل مهندسی، بیولوژی، فیزیکی و شیمی ظاهر می شود.

۱-۵-۲ معادلات انتگرال ولترا

شکل کلی معادلات انتگرال ولترا که در آن حد پایین ثابت و حد بالای انتگرال گیری متغیر می باشد به صورت زیر است

$$\alpha(s)u(s)=f(s)+\int_a^s K(s,t)F(u(t))\,dt. \tag{۱-۶}$$

حالات خاص معادلات انتگرال ولترا

۱- معادله انتگرال ولترا نوع اول

اگر $\alpha(s)=0$، معادله (۱-۶) به معادله زیر تبدیل می شود

$$f(s)+\int_a^s K(s,t)F(u(t))\,dt=0. \tag{۱-۷}$$

این معادله را معادله انتگرال ولترا نوع اول گویند.

۲- معادله انتگرال ولترا نوع دوم

اگر $\alpha(s)=1$، معادله (۱-۶) به معادله زیر تبدیل می شود

$$u(s)=f(s)+\int_a^s K(s,t)F(u(t))\,dt. \tag{۱-۸}$$

این معادله را معادله انتگرال ولترا نوع دوم گویند.

۳- معادله انتگرال ولترا همگن

اگر در معادله انتگرال ولترا نوع دوم (۱-۸) شرط $f(s)=0$ برقرار باشد معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن گویند در غیر این صورت معادله را یک معادله انتگرال غیر همگن گویند