بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

آقای حسین مامانی پایان نامه ۶ واحدی خود را با عنوان دنباله های نزدیک شونده به ظرفیت شانون برای کدهای LDPC در کانالهای متقارن در تاریخ ۱۳۹۰/۱۰/۱۸ ارائه کردند.

اعضای هیات داوران نسخه نهایی این پایان نامه را از نظر فرم و محتوا تایید کرده، پذیرش آنرا برای اخذ درجه کارشناسی ارشد مخابرات پیشنهاد می کنند.

عضو هیات داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضا
استاد راهنما	دکتر حمید سعیدی	استادیار	
استاد ناظر	دکتر احمدرضا شرافت	استاد	
استاد ناظر	دکتر پاییز عزمی	استاد	
استاد ناظر	دکتر حسین پیشرونیک	دانشیار	
مدیر گروه (یا نماینده گروه تخصصی)	دکتر پاییز عزمی	استاد	

این نسخه به عنوان نسخه نهایی پایان نامه/رساله مورد تائید است

امضای استاد راهنما :

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری می شود.

نام و نام خانوادگی:
حسین مانی

امضاء

۱۳۹۰/۱۱/۵

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **حسین مامانی** در رشته **مخابرات-سیستم** است که در تاریخ ۱۳۹۰/۱۰/۱۸ در دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **حمید سعیدی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده رابه عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده‌نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **حسین مامانی** دانشجوی رشته مهندسی برق، گرایش مخابرات سیستم، مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: حسین مامانی

تاریخ و امضا:

۱۳۹۰/۱۱/۵

دانشگاه تربیت مدرّس
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پایان‌نامه دوره‌ی کارشناسی ارشد مهندسی برق–مخابرات

دنباله‌های نزدیک شونده به ظرفیت شانون برای کدهای LDPC در کانال‌های متقارن

حسین مامانی

استاد راهنما:
دکتر حمید سعیدی

دی ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

در اینجا لازم می دانم تا از همه عزیزانی که مرا در انجام هرچه بهتر این تحقیق یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم.

استاد راهنمای عزیزم، جناب آقای دکتر حمید سعیدی که بدون راهنمایی های ایشان انجام این تحقیق امکان پذیر نبود؛

اساتید محترم گروه مهندسی برق مخابرات، آقایان دکتر احمد رضا شرافت، دکتر پائیز عزمی، دکتر محمد حسن قاسمیان یزدی و دکتر کیوان نوائی که افتخار شاگردی در محضر ایشان را داشتم؛

دکتر حسین پیشرو نیک که با پذیرش داوری این پایان نامه بنده را از نظرات ارزشمند خود بهره مند ساختند؛

مرکز تحقیقات مخابرات ایران، که زمینه انجام این تحقیق را تسهیل نمود؛

مطمئناً این کار دارای نقایصی است که می تواند با پیشنهادهای سودمند شما تکامل بیشتری یابد. از این رو بنده را در بهبود آن یاری دهید و پیشنهادها و نکات ارزشمند خود را به نشانی پست الکترونیک اینجانب (h.mamani@ieee.org, h.msbu88@gmail.com) ارسال نمایید.

حسین مامانی

دی ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه روشی را پیشنهاد کرده‌ایم که در آن می‌توان از نمودار GEXIT برای طراحی خانواده‌هایی از کدهای LDPC با عملکرد نزدیک به ظرفیت شانون در کانال‌های باینری متقارن بی‌حافظه استفاده کرد. نمودار GEXIT درواقع تعمیم داده شدهٔ نمودار EXIT می‌باشد، که استفادهٔ گسترده‌ای در بحث الگوریتم‌های تکرار و کدهای LDPC دارد. برای نمودار EXIT، در کانال باینری با پاکشدگی، مفهومی با نام قضیهٔ مساحت وجود دارد که این امکان را می‌دهد تا از آن در طراحی دنباله‌های رسنده به ظرفیت شانون بهره مند شویم. متاسفانه قضیهٔ مساحت در مورد دیگر انواع کانال‌های بی‌حافظه برقرار نیست. از طرف دیگر برقرار بودن قضیهٔ مساحت در مورد نمودار GEXIT نوید استفاده از آن را در طراحی دنباله‌های نزدیک شونده به ظرفیت شانون می‌دهد. نتایج اولیه‌ای که در مورد نمودار GEXIT وجود دارد تنها محدود به کدهای LDPC منظم می‌باشد. بعلاوه منحنی GEXIT برای بیت-گره فقط برای حالتی محاسبه شده است که پارامتر کانال در آن حذف شده باشد. این محدودیت‌ها استفاده از نمودار GEXIT را به منظور طراحی کدهای LDPC غیر ممکن می‌سازد. در این پایان نامه یافتن تابع GEXIT برای بیت‌گره‌ها در حضور پارامتر کانال یکی از اهداف اصلی بوده است. بعلاوه در بخش دیگری از این پایان نامه به تعریف متفاوتی از نمودار GEXITمی‌پردازیم که در آن معکوس منحنی GEXIT بیت-گره را با دوگان منحنی GEXIT چک-گره در یک نمودار رسم کرده و نشان می‌دهیم که قضیه مساحت در این حالت نیز برقرار است. در بخش دیگری از پایان نامه به تعمیم تعریف تابع GEXIT برای توزیع درجات نامنظم می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که منحنی GEXIT برای توزیع درجات نامنظم از مجموع وزن دار منحنی‌های GEXIT تشکیل دهنده آن توزیع درجات حاصل می‌شود. نتایج فوق استفاده از نمودار GEXIT را برای طراحی دنباله‌های نزدیک شونده به ظرفیت امکان پذیر می‌سازد.

کلید واژه: کدهای LDPC، کانال‌های باینری بی‌حافظه، الگوریتم‌های تکرار، کانال باینری پاکشدگی، قضیه مساحت، نمودار EXIT، تابع EXIT، منحنی EXIT، دنباله‌های نزدیک شونده به ظرفیت، مساله برازش منحنی، بیت-گره، چک-گره، پارامتر کانال، منحنی دوگانGEXIT، توزیع درجات.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست علایم و نشانه‌ها ..... د
فهرست جدول‌ها ..... ه
فهرست شکل‌ها ..... و

فصل ۱- پیشگفتار ۲

فصل ۲- پیش‌نیازها و معرفی کدهای LDPC ۷

۲-۱- مقدمه ۷
۲-۲- کانال‌های بی‌حافظه ۷
۲-۲-۱- کانال هموار ۸
۲-۲-۲- پارامتریزه کردن کانال ۹
۲-۳- معرفی کدهای LDPC ۱۰
۲-۴- مدل کدبرداری ۱۳
۲-۵- الگوریتم تبادل پیام ۱۷
۲-۶- روش تکامل چگالی(DE) ۱۹
۲-۷- پایداری ۲۱
۲-۸- تقارن ۲۲
۲-۹- طراحی کد ۲۳
۲-۱۰- دنباله‌های رسنده به ظرفیت ۲۴
۲-۱۱- روش‌های ساده سازی فرایند تکامل چگالی ۲۴
۲-۱۲- نتیجه گیری ۲۵

فصل ۳- منحنی EXIT و ویژگی‌های آن ۲۷

۳-۱- مقدمه ۲۷
۳-۲- تابع EXIT بر اساس اطلاعات متقابل ۲۷
۳-۳- تابع EXIT براساس آنتروپی ۳۰
۳-۳-۱- تابع EXIT در کانال‌های باینری بی‌حافظه ۳۱
۳-۳-۲- تابع EXIT در کانال‌های متقارن و ورودی‌های هم احتمال ۳۱
۳-۴- تابع EXIT برای کدهای نامنظم ۳۳
۳-۵- نمودار EXIT ۳۵
۳-۵-۱- رابطه تکامل چگالی و نمودار EXIT در کانال باینری پاکشدگی ۳۵
۳-۶- قضیه مساحت برای تابع EXIT در کانال باینری پاکشدگی ۳۶

۳-۷- نتیجه گیری ۳۷

فصل ۴- تابع GEXIT ۴۰

۴-۱- مقدمه ۴۰

۴-۲- قضیه مساحت ۴۰

۴-۳- بیان انتگرال توابع ضربه برحسب کانولوشن ۴۱

۴-۴- تابع GEXIT و منحنی آن ۴۲

۴-۵- منحنی دوگان GEXIT ۴۴

۴-۵-۱- منحنی دوگان GEXIT چک-گره در کانال باینری پاکشدگی ۴۴

۴-۶- برازش منحنی ۴۵

۴-۶-۱- درون یابی خانواده کانال‌ها ۴۵

۴-۷- نتیجه گیری ۴۷

فصل ۵- تابع GEXIT برای پارامتر کانال دلخواه ۴۹

۵-۱- مقدمه ۴۹

۵-۲- تابع GEXIT با در نظر گرفتن پارامتر کانال ۴۹

۵-۲-۱- تابع GEXIT در کانال‌های باینری بی‌حافظه ۴۹

۵-۲-۲- تابع GEXIT برای کانال‌های بی‌حافظه و ورودی‌های هم احتمال (BIOSM) ۵۰

۵-۳- منحنی GEXIT برای پارامتر کانال دلخواه ۵۳

۵-۳-۱- منحنی GEXIT در کانال باینری پاکشدگی ۵۳

۵-۳-۲- منحنی GEXIT در کانال باینری متقارن ۵۵

۵-۳-۳- منحنی GEXIT در کانال BIAWGN ۵۸

۵-۴- نقطه شروع منحنی GEXIT ۵۹

۵-۵- تابع GEXIT برای کدهای نامنظم ۶۲

۵-۶- مدل جدید برای نمودارGEXIT ۶۵

۵-۷- نتیجه گیری ۶۷

فصل ۶- نتایج شبیه سازی ۶۹

۶-۱- مقدمه ۶۹

۶-۲- کانال باینری متقارن و بررسی کد منظم (۳,۶) ۶۹

۶-۳- کد نزدیک شونده به ظرفیت در کانال باینری متقارن با پارامتر δ ۷۰

۶-۴- کانال BIAWGN و بررسی کد طراحی شده با $D_v^{\max} = 4$ ۷۰

۶-۵- کانال BIAWGN و بررسی کد طراحی شده در [۷] با $D_v^{\max} = 20$ ۷۱

۶-۶- طراحی با کمک نمودار GEXIT برای کانال BIAWGN با $D_v^{\max} = 20$ ۷۲

۶-۷- نتیجه گیری ۷۴

فصل ۷- نتیجه گیری و جمع‌بندی ۷۶

فصل ۸- ضمایم ومراجع ۷۸
ضمیمه أ -تابع EXIT برای کانال‌های باینری بی‌حافظه ۷۹
ضمیمه ب -تابع GEXIT برای کانال‌های باینری بی‌حافظه ۸۱
ضمیمه ج - اثبات رابطه (۵-۱۲) ۸۳
ضمیمه د - اثبات قضیه ۵-۲: ۸۴
ضمیمه ه - اثبات قضیه ۵-۳: ۸۷
ضمیمه و - اثبات قضیه ۵-۴: ۹۰
ضمیمه ز - تاثیر Δ' در محاسبه دوگان تابع GEXIT برای چک-گره ۹۲
واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۹۵
واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۹۷

فهرست علایم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری
بیت-گره	v
چک-گره	c
پارامتر کانال مجازی	ε
لگاریتم نسبت درستنمایی	L
فضای شامل توابع $F(x)$	$\mathcal{F}$
فضای شامل توابع $\Gamma(x)$	$\Im$
پیام‌های غیر ذاتی	E_i
پیام‌های پیشین	A_i
پیام‌های پسین	D_i

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

جدول ۲-۱: کانال‌های متقارن بی‌حافظه ۸
جدول ۲-۲: عبارت آنتروپی کانال ۹
جدول ۲-۳: توصیف ریاضی گراف ۱۳
جدول ۲-۴: شرط پایداری برای کانال‌های متقارن بی‌حافظه ۲۲
جدول ۳-۱: توابع EXIT برای کانال باینری پاکشدگی با پارامتر q ۲۹
جدول ۴-۱: انتگرال تابع $f(t)=\log_2\left(1+e^{-t-y-z}\right)$ در کنار تابع ضربه ۴۱
جدول ۵-۱: منحنی‌های GEXIT برای کدبردارهای بیت-گره و چک-گره ۵۳
جدول ۵-۲: تعریف تابع GEXIT براساس [۱۶] ۶۵
جدول ۵-۳: تابع جدید نمودار GEXIT ۶۶

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۲-۱: گراف Tanner مربوط به کد منظم (۳,۶) ۱۲
شکل ۲-۲: مدل کدبردار تکرار [۱۸] ۱۴
شکل ۲-۳: مدل کدبردار برای بلوک جزئی ۱۵
شکل ۲-۴: مدل کدبردار برای بلوک چک-گره ۱۵
شکل ۲-۵: مدل کدبردار برای بلوک بیت-گره ۱۶
شکل ۳-۱: نمودار EXIT برای کد منظم (۳,۶) در کانال باینری پاکشدگی ۳۰
شکل ۳-۲: منحنی EXIT بیت-گره برای $\lambda(x)=0.2x+0.3x^3+0.5x^5$ ۳۴
شکل ۳-۳: منحنی EXIT چک-گره برای $\rho(x)=0.25x+0.75x^5$ ۳۴
شکل ۳-۴: نمودار EXIT برای کد منظم (۳,۶) براساس آنتروپی ۳۶
شکل ۳-۵: قضیه مساحت برای نمودار EXIT ۳۷
شکل ۵-۱: مقایسه مدل‌های معرف نمودار EXIT و GEXIT ۵۰
شکل ۵-۲: منحنی GEXIT بیت-گره برای کانال باینری متقارن با پارامترهای مختلف ۵۶
شکل ۵-۳: منحنی GEXIT و دوگان آن برای چک-گره درجه ۶ ..... ۵۸
شکل ۵-۴: منحنی GEXIT بیت-گره برای کانال BIAWGN با پارامترهای مختلف ۵۹
شکل ۵-۵: تقسیم بندی بردارها ۶۳
شکل ۵-۶: منحنی GEXIT بیت-گره برای توزیع درجات $\lambda(x)=0.2x+0.35x^4+0.45x^7$ ۶۴
شکل ۵-۷: منحنی GEXIT چک-گره برای توزیع درجات $\rho(x)=0.25x^2+0.75x^7$ ۶۵
شکل ۶-۱: کد منظم (۳,۶) در کانال باینری متقارن با پارامتر $\delta=0.07$ ۶۹
شکل ۶-۲: کد نامنظم طراحی شده در [۷] با نرخ کد $R=\frac{1}{2}$ ۷۰
شکل ۶-۳: کد نامنظم طراحی شده در [۷] با $D_v^{\max}=4$ در کانال BIAWGN ۷۱
شکل ۶-۴: کد نامنظم طراحی شده در [۷] با $D_v^{\max}=20$ در کانال BIAWGN ۷۲
شکل ۶-۵: منحنی های GEXIT استفاده شده در فرایند طراحی ۷۳
شکل ۶-۶: نمودار GEXIT برای کد طراحی شده ۷۴

فصل اول:

پیشگفتار

فصل ۱– پیشگفتار

کدهای LDPC[۱] با کدبردار تکرار[۲] تبادل پیام[۳] برای اولین بار در پایان نامهٔ دکترای آقای R. G. Gallager در دانشگاه M. I. T در سال ۱۹۶۲ معرفی شدند[۱]. در روش کدبرداری تکرار پیچیدگی کدبرداری تنها بطور خطی با طول بلوک افزایش می‌یابد. این کدها برای چندین دهه به فراموشی سپرده شدند، که شاید عمده ترین دلیل آن ضعیف بودن کامپیوترها در آن زمان بود. در سال ۱۹۹۵ این کدها توسط MacKay و Neal دوباره مطرح شدند[۲, ۳].

کدهای LDPC مانند سایر کدهای خطی بلوکی[۴] دارای یک ماتریس بررسی توازن[۵] (H) می‌باشند. ماتریس بررسی توازن برای این کدها باید تنک[۶] باشد. یعنی تعداد عناصر غیر صفر ماتریس در مقایسه با صفرها خیلی کم باشد. به ماتریس H یک گراف نسبت داده می‌شود که در توصیف فرایند کدبرداری مفید است و گراف Tanner[۷] نام دارد[۴, ۵]. گراف Tanner مربوط به یک ماتریس بررسی توازن از دو نوع گره با نام‌های بیت-گره[۸] و چک-گره[۹] تشکیل می‌شود که به ترتیب نشان دهنده ستون‌ها و ردیف‌های ماتریس می‌باشند. به ازای هر المان ۱ در هر سطر و ستون H ، بیت-گره و چک-گره مربوطه توسط یک خط که یال[۱۰] نامیده می‌شود به هم متصل می‌شوند. درجه هر چک-گره یا بیت-گره عبارت است از تعداد یال‌های متصل به آن. اگر دریک گراف تمام بیت-گره‌ها دارای درجه برابر و تمام چک-گره‌ها نیز دارای درجه برابر(نه الزاما برابر با یکدیگر) باشند به کد مربوطه منظم[۱۱] و در غیر این صورت به آن کد نامنظم[۱۲] گفته می‌شود. الگوریتم تبادل پیام با انتقال پیام‌هایی بین بیت-گره‌ها و چک-گره‌ها تحقق می‌یابد. در بیشتر موارد پیام‌ها معرف لگاریتم نسبت درستنمایی[۱۳] (LLR) بیت‌ها می‌باشند.

در [۶, ۷] نشان داده شده است که در طول بلوک بینهایت، عملکرد کد از ماتریس H مستقل است و فقط به نسبت یال‌های متصل به بیت-گره و چک-گره از هر درجه به تعداد کل یال‌ها بستگی دارد. نسبت یال‌های متصل به بیت-گره با درجه i به کل یال‌ها را با λ_i و نسبت یال‌های متصل به چک-گره درجه i به کل یال‌ها را با ρ_i نشان می‌دهیم. چنین مجموعه‌ای از ماتریس‌ها معرف یک خانواده[۱۴] از کدهای

---

[1] Low Density Parity Check Codes
[2] Iterative Decoder
[3] Iterative Message Passing Decoder
[4] Linear block Codes
[5] Parity Check Matrix
[6] Sparse
[7] Tanner Graph
[8] Bit-Node
[9] Check-Node
[10] Edge
[11] Regular
[12] Irregular
[13] Log-likelihood ratio (LLR)
[14] Ensemble

LDPC می‌باشند که توسط یک زوج توزیع درجات[1] (λ,ρ) توصیف می‌گردد. نتایج [۶, ۷] حاکی از آن است که عملکرد هر عضو از یک خانواده کدهای LDPC به عملکرد میانگین خانواده کدها میل می‌کند. این نتیجه مهم استفاده از ابزار تجزیه و تحلیل طول بینهایت[2] را به منظور طراحی و تحلیل کدهای LDPC نزدیک شونده به ظرفیت[3] امکان پذیر می‌سازد.

اصلی ترین روش تحلیل طول بینهایت کدهای LDPC روش تکامل چگالی[4] نام دارد که مبتنی دنبال کردن تغییرات تابع چگالی احتمال[5] پیام‌های مبادله شده در الگوریتم تبادل پیام است. در این روش با فرض ارسال کد تمام یک و با شروع از چگالی اولیه کانال، با تکرار الگوریتم به دنبال کردن چگالی‌ها می‌پردازیم. در هر تکرار الگوریتم احتمال خطای چگالی‌ها را محاسبه می‌کنیم. بسته به چگالی کانال اولیه که کاملا وابسته به پارامتر کانال[6] است، با ادامه این فرایند دو حالت ممکن است رخ بدهد. یا احتمال خطای چگالی‌ها به سمت صفر میل می‌کند یا اینکه حتی پس از تعداد تکرار بینهایت نیز احتمال خطا عددی غیر صفر می‌شود. می‌توان نشان داد که برای دسته وسیعی از کانال‌ها از جمله کانال پاکشدگی[7]، کانال باینری متقارن[8] و کانال BIAWGN ، یک مقدار مشخص از پارامتر کانال وجود دارد بگونه‌ای که برای پارامتر کانال‌های کمتر از آن، فرایند تکامل چگالی همگرا می‌شود و در غیر این صورت همگرا نمی‌شود. این مقدار مرزی برای پارامتر کانال، به عنوان آستانه[9] برای خانواده کد در کانال مربوطه نامگذاری می‌شود.

با کمک روش تکامل چگالی امکان طراحی خانواده کدهای بهینه بوجود می‌آید. در طراحی کدها برای یک نرخ کد داده شده و یک مجموعه از بیت گره‌ها و چک گره‌ها با درجه معین به دنبال تعیین λ_iها و ρ_iها هستیم بطوریکه سطح آستانه بیشینه شود. همچنین در طراحی کد برای یک کانال با پارامتر ثابت به دنبال تعیین λ_iها و ρ_iها هستیم بطوریکه مقدار نرخ کد بیشینه شود[۸]. در هر دوحالت هرچه مقدار بیشینه شده به حد بالای آن که توسط قضیه شانون پیش بینی شده نزدیکتر باشد طراحی انجام شده بهتر است. آقای Gallager نشان داد که شرط لازم برای رسیدن به ظرفیت این است که مقدار متوسط تعداد یک‌ها در هر سطر و ستون ماتریس H به سمت بینهایت میل کند. بنابراین برای رسیدن به ظرفیت باید دنباله‌ای از خانواده کدها طراحی کرد و نشان داد که حد نرخ و یا آستانه آن‌ها به ظرفیت شانون[10] نزدیک است.

---

[1] Degree distribution pair
[2] Asymptotic analysis
[3] Capacity Approaching Sequences
[4] Density Evolution
[5] Probability Density Function(PDF)
[6] در اینجا کانال‌هایی را در نظر می‌گیریم که توسط یک پارامتر توصیف می‌شوند و فرض می‌کنیم که کیفیت کانال با افزایش پارامتر کاهش می‌یابد.
[7] Binary Erasure Channel
[8] Binary Symmetric Channel
[9] Threshold
[10] Shannon Capacity

در حالت کلی دنباله درجات (λ,ρ) را رسنده به ظرفیت[1] گوئیم، هرگاه با میل دادن متوسط تعداد یک‌ها در هر سطر و ستون ماتریس H ، نرخ کد و یا آستانه آن به ظرفیت شانون میل کند[۹-۱۱]. وجود و طراحی چنین دنباله‌هایی فقط در کانال پاکشدگی توسط آقای شکراللهی نشان داده شده است. طراحی دنباله‌های رسنده به ظرفیت در سایر کانال‌های متقارن بی‌حافظه هنوز به عنوان یک مساله حل نشده باقی است. در این کانال‌ها دنباله‌های نزدیک شونده[2] به ظرفیت مطرح هستند. در این دنباله‌ها که با کمک روش تکامل چگالی طراحی می‌شوند نشان داده می‌شود که مقادیر نرخ کد و یا آستانه به صورت عددی به ظرفیت شانون نزدیک می‌شوند اما نمی‌توان به صورت ریاضی نشان داد که حد نرخ کد و آستانه برابر با ظرفیت شانون است[۶, ۱۲, ۱۳].

در طراحی هر خانواده کد از یک دنباله نزدیک شونده به ظرفیت، همگرایی هر زوج توزیع درجات (λ,ρ) داده شده باید به وسیله روش تکامل چگالی بررسی شود. از طرفی در هر تکرار از فرایند تکامل چگالی، باید تغییرات تعداد زیادی عدد که معرف چگالی در هر مرحله هستند دنبال شود که از نظر محاسباتی خیلی پیچیده است. به همین دلیل روش‌های بسیاری به منظور ساده کردن تکامل چگالی معرفی شده‌اند، که می‌توان از روش نمودار EXIT[3] و روش تقریب گوسی[4] نام برد. هدف اصلی تمام این روش‌ها نسبت دادن یک عدد اسکالر به توابع چگالی است[۱۴, ۱۵].

برای نمودار EXIT نشان می‌دهیم که در مورد کانال پاکشدگی نمودار EXIT دیگر یک تقریب برای تکامل چگالی نیست بلکه کاملا معادل آن می‌باشد و همان مقدار آستانه که از فرایند تکامل چگالی حاصل شده را می‌توان با آن هم بدست آورد. بعلاوه برای نمودار EXIT در کانال پاکشدگی یک قضیه مهم با نام قضیه مساحت[5] اثبات شده است[۱۵]. این قضیه بیان می‌دارد که سطح محصور بین منحنی‌های EXIT چک-گره و معکوس بیت-گره فاصله تا ظرفیت را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر برای دستیابی به کدهای رسنده به ظرفیت در کانال BEC تنها کافی است به دنبال توزیع درجاتی باشیم که سطح محصور بین نمودارهای مربوط به آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند. این فرایند برازش منحنی[6] نام دارد که نتایج حاصل از آن با نتایجی که قبلا توسط آقای شکراللهی در طراحی دنباله‌های رسنده به ظرفیت در کانال BEC مطرح شده بود یکسان است. متاسفانه قضیه مساحت برای نمودار EXIT در مورد دیگر کانال‌های متقارن بی‌حافظه برقرار نیست و لذا نمی‌توان از نمودار EXIT برای طراحی دنباله‌های رسنده به ظرفیت در کانال‌های متقارن بی‌حافظه استفاده کرد. البته لازم به ذکر است که اگر اصل برازش منحنی را برای نمودار EXIT در چنین کانال‌هایی اعمال کنیم ممکن است به کدهایی با عملکرد نزدیک به ظرفیت دست یابیم اما تضمینی وجود ندارد که کدهای طراحی شده بهینه باشند.

[1] Capacity Achieving Sequences
[2] Capacity Aproaching Sequences
[3] Extrinsic Information Transfer Chart
[4] Gaussian Aproximation
[5] Area Theorem
[6] Curve Fitting Problem

اخیرا مفهوم جدیدی با نام منحنی GEXIT[1] معرفی شد که برخلاف منحنی EXIT قضیه مساحت در آن برای هر کانال متقارن بی‌حافظه برقرار است[۱۶]. این مفهوم می‌توانست امکان جدیدی را برای طراحی دنباله‌های رسنده و یا نزدیک شونده به ظرفیت بوجود آورد اما تابع GEXIT[2] معرفی شده در [۱۶] منحصر به کدهای منظم است. بعلاوه فرض شده پارامتر کانال در بدترین وضعیت خود قرار دارد. این دو حقیقت استفاده از نمودار GEXIT[3] به منظور طراحی کدهای با عملکرد بهینه را غیر ممکن می‌سازد.

در این پایان نامه منحنی GEXIT بیت گره را برای هر پارامتر کانال دلخواه بدست می‌آوریم. به دنبال آن یک فرمول بسته برای تابع GEXIT در کانال باینری متقارن ارائه می‌کنیم و در مورد کانال BIAWGN یک فرمول بسته برای نقطه شروع منحنی اثبات می‌کنیم. سپس تابع GEXIT را برای کدهای نامنظم بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم این رابطه همانند رابطه موجود برای منحنی‌های EXIT می‌باشد[۱۷]. لازم به ذکر است در [۱۶] شرط قضیه مساحت به برازش منحنی GEXIT چک-گره و معکوس منحنی دوگان GEXIT[4] بیت-گره ترجمه می‌شود. بررسی‌های ما نشان می‌دهد بدست آوردن تابع GEXIT دوگان بیت-گره برای هر پارامتر کانال دلخواه پیچیده می‌باشد. بنابراین در این پایان نامه پیشنهاد کرده‌ایم که برای طراحی کد، برازش برای منحنی‌های معکوس بیت گره و دوگان چک گره انجام شود. ثابت می‌کنیم که قضیه مساحت در این حالت نیز برقرار است. نتایج بالا طراحی کدهای نزدیک شونده به ظرفیت را با کمک تابع GEXIT امکان پذیر می‌سازد. نشان می‌دهیم که در این حالت مساله طراحی کد به یک مساله بهینه سازی برنامه ریزی خطی[5] تبدیل می‌شود.

سازماندهی فصل‌های این پایان نامه به صورت زیر است. ابتدا در فصل دوم به مرور تعاریف و پیش نیازها می‌پردازیم و علائم و اصطلاحات مهمی که در طول پایان نامه به آن‌ها پایبند هستیم معرفی می‌شود. در فصل سوم تابع EXIT معرفی شده و ویژگی‌های آن بررسی می‌شود. در فصل چهارم تابع GEXIT را معرفی می‌کنیم و قضیه کلی مساحت[6] را در مورد آن ذکر می‌کنیم. در فصل پنجم به ارائه نوآوری‌ها می‌پردازیم. در فصل ششم با ارائه مثال‌ها و شبیه سازی‌ها صحت نوآوری‌های صورت گرفته را نشان می‌دهیم و یک کد با عملکرد نزدیک به ظرفیت را با کمک نمودار GEXIT طراحی می‌کنیم. در فصل هفتم به جمع بندی و نتیجه گیری می‌پردازیم.

[1] GEXIT Curve
[2] GEXIT Function
[3] Generalized Extrinsic Information Transfer Chart
[4] Dual GEXIT Curve
[5] Linear programming optimization problem
[6] General Area Theorem

فصل دوم:

پیش نیازها و معرفی کدهای LDPC