دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

مقادیر ویژه‌ی عملگرهای انتگرال با هسته‌ی مثبت معین

نگارش:

بهاره رضایانی

استاد راهنما: **دکتر حبیب امیری**

استاد مشاور: **دکتر سعید مقصودی**

اسفند ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس

پروردگارا، امروز سر بر آستانت می‌سایم و کرنش شاکرانه در پیشگاهت می‌نهم.

بارالهی تو بودی که چراغ پرفروغ دانش را در دستانم نهادی تا در تلألو آن بتوانم راه بهتر شناختن تو را بیابم، گرچه راه علم راهی بی منتهاست. قوت قلب من در این طی طریق کوتاه والدین عزیز و مهربانم بودند که خوبیهایشان همواره در ذهن و روحم باقی خواهند ماند. همچنین از دوستان و همکلاسیم خانمها مهری شریعتی، مریم علیجانی و آقای جعفر عبدی کمال تشکر را دارم.

در پایان از زحمات و کمک‌های اساتید بزرگوارم خصوصاً استاد راهنمایم جناب دکتر حبیب امیری و استاد مشاورم جناب دکتر سعید مقصودی و همچنین جناب آقایان دکتر محمد تقی دستجردی و دکتر هادی خطیب زاده کمال تشکر و قدردانی را داشته و هیچ‌گاه بزرگواری‌هایشان را فراموش نخواهم کرد.

بهاره رضایانی

اسفند ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه عملگرهای انتگرالی را که توسط هسته‌ی معین مثبتی مانند $K : X \times X \to \mathbb{C}$ تعریف می‌شوند، مطالعه می‌کنیم و همچنین شرایطی را که تحت آنها این عملگرها خودالحاقی و فشرده می‌شوند را بررسی می‌نماییم. X در اینجا فضای متریک همراه با یک اندازه‌ی مثبت فرض شده است. در ابتدا، دو رده‌ی $PD(X,\nu)$ و $L^{2}PD(X,\nu)$ از عملگرهای انتگرالی را معرفی می‌نماییم. در ادامه، به معرفی و بررسی عملگرهای از کلاس تریس (هسته‌ای)، فشرده و نیز هیلبرت— اشمیت می‌پردازیم. در بخشی دیگر، معین مثبت بودن یک هسته را بررسی نموده و به بیان قضیه‌ی مهم مرسر می‌پردازیم. در یکی از فصلها ریشه‌ی مربع $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$ معرفی نموده و خواصی از جمله معین مثبت بودن هسته‌ی آن بررسی می‌نماییم. همچنین عملگر انتگرالی $\mathcal{F}$ متناظر با هسته‌ی F را معرفی نموده و به بررسی رفتار این عملگر می‌پردازیم.

در پایان، با فرض هموار بودن هسته‌ی K به تحلیل میزان نرخ کاهش مقادیر ویژه‌ی مربوط به عملگرهای انتگرالی می‌پردازیم. نتایج حاصل حالاتی که $X \subseteq \mathbb{R}^m$ مجهز به اندازه‌ی لبگ است و یا X زیرمجموعه‌ای از کره‌ی S^m و مجهز به اندازه‌ی لبگ سطح می‌باشد را شامل می‌گردد.

واژگان کلیدی: عملگر انتگرالی، تخمین‌های مقادیر ویژه، قضیه‌ی مرسر، عملگر فشرده، عملگر از کلاس تریس، عملگر هیلبرت— اشمیت، قضیه‌ی طیفی، ریشه‌ی مربع.

فهرست مندرجات

پیش گفتار ۱

۱ پیش‌نیازها و تعاریف اولیه ۴

۲ عملگرهای هیلبرت– اشمیت ، فشرده و از کلاس تریس ۱۶

۱.۲ عملگرهای هیلبرت– اشمیت ۱۸

۲.۲ ساختار عملگرهای فشرده ۲۴

۳.۲ عملگرهای از کلاس تریس ۳۳

۳ نگاهی به مثبت معین بودن و قضیه‌ی مرسر ۵۴

۱.۳ مثالی درباره‌ی عملگر انتگرالی ۷۲

۴ ریشه‌ی مربع $\mathcal{K}$ ۷۵

۵ هسته‌ها با رتبه‌ی متناهی ۸۲

۱.۵ هسته‌ها با رتبه‌ی متناهی ۸۳

۶ نرخ کاهش مقادیر ویژه تحت شرایط لیپ شیتس ۹۴

مراجع ۱۰۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۹

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه به معرفی عملگرهای انتگرالی نظیر هسته‌ی $K : X \times X \to \mathbb{C}$ روی فضای متریک X می‌پردازیم. همچنین بررسی می‌نماییم که تحت چه شرایطی این عملگرها خودالحاقی و فشرده می‌باشند. فضای X در اینجا به اندازه اکیداً مثبت ν مجهز شده است. مفهوم معین مثبت بودن یک هسته را معرفی و تحقیق می‌نماییم که برای یک هسته‌ی معین مثبت، عملگر مربوط به آن دارای چه نوع ویژگی‌هایی می‌باشد.

در فصل دوم، به معرفی و بررسی رفتار عملگرهای از کلاس تریس (هسته‌ای)، فشرده و هیلبرت— اشمیت می‌پردازیم.

در فصل سوم، به بیان و بررسی قضیه‌ی مهم مرسر پرداخته و همچنین مثبت معین بودن یک هسته را به طور دقیق‌تری مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم، ریشه‌ی مربع عملگر K را تعریف نموده و با قرار دادن شرط‌هایی روی هسته‌ی K، خواص عملگر مربوط به آن را شناسائی می‌نماییم.

فصل پنجم در ارتباط با هسته‌های با رتبه‌ی متناهی بوده و به تعریف یک هسته‌ی خاص F و نیز به مطالعه‌ی عملگر انتگرالی نظیر آن می‌پردازیم.

در نهایت به تجزیه و تحلیل سرعت تنزل مقادیر ویژه‌ی عملگرهای انتگرالی که توسط هسته‌های معین مثبت روی زیرمجموعه‌های فضای متریک تعریف می‌شوند، می‌پردازیم. همچنین شایان ذکر است که چنین عملگرهایی در مسائل مربوط به نظریه‌ی تقریب، معادلات انتگرالی و نظریه‌ی عملگرها نقش بسیار مهمی را ایفاء می‌کنند.

دو کلاس $PD(X)$ و $L^2PD(X,\nu)$ از توابع معرفی می‌شوند که اعضای آنها در یک مفهوم معین مثبت بودن صدق می‌کنند. با حفظ عمومی‌ترین حالت سعی می‌کنیم رابطه‌ی ممکن را بین دو مفهوم معین مثبت بودن اعضای این دو کلاس بدست آوریم. اگر X به اندازه‌ی ν مجهز شده باشد و $K \in L^2(X \times X, \nu \times \nu)$، در این

صورت عملگر انتگرالی $\mathcal{K}: L^{2}(X,\nu) \to L^{2}(X,\nu)$ با تعریف

$$\mathcal{K}(f)(x) := \int_X K(x,y)f(y)d\nu(y), \quad f \in L^{2}(X,\nu), \quad x \in X, \qquad (*)$$

همواره فشرده و کراندار می‌باشد. همچنین ثابت می‌گردد که در صورت هرمیتی بودن هسته‌ی K، خودالحاقی نیز می‌باشد.

با فرض معین مثبت بودن و هموار بودن هسته‌ی K، نظریه‌ی مرسر [1] متناظر را بازنویسی نموده و به تجزیه و تحلیل اندازه‌ی مقادیر ویژه‌ی عملگر انتگرالی تعریف شده در $(*)$ می‌پردازیم. اگر عملگر انتگرالی دارای تعدادی شمارا مقادیر ویژه باشد که $\lambda_1(\mathcal{K}) \geq \lambda_2(\mathcal{K}) \geq \cdots \geq 0$، آن‌گاه اولین نتیجه‌ای که می‌توانیم در مورد نرخ تنزل مقادیر ویژه‌ی عنوان شده در قضیه‌ی مرسر بدست آوریم این است که $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1})$، هنگامی که $n \to \infty$.

در نهایت طی مثالی نشان می‌دهیم که با فرضیات قضیه‌ی مرسر، تخمین $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(\frac{1}{n})$ بهترین تخمین برای کاهش $\lambda_n(\mathcal{K})$ به صفر می‌باشد. مراجع [۱۲] و [۱۴] مطالعه شوند.

تخمین‌های دقیق‌تر از آنچه که در بالا برای مرتبه‌ی همگرایی مقادیر ویژه بیان شد، وجود دارد و آنها را در بسیاری از متون با فرضیات متفاوت می‌توان یافت. به عنوان مثال در [۲۱] ویل نشان داده که اگر K هسته‌ای (نه لزوماً معین مثبت) باشد که به کلاس C^1 تعلق دارد، آن‌گاه $\lambda_n = o\left(1/n^{\frac{3}{2}}\right)$. در حالی که در [۱۷] با این فرض که X، یک بازه فشرده می‌باشد، رید نشان داده برای هسته‌ی معین مثبت K که به کلاس C^1 تعلق دارد $\lambda_n = o(\frac{1}{n^2})$. مراجع [۱۳] و [۱۴] به تحلیل حالتی می‌پردازند که در آن X یک فضای متریک فشرده و یا یک خمینه‌ی دیفرانسیل‌پذیر بوده که به یک اندازه‌ی متناهی مجهز شده است. به عنوان مثال در [۱۷] فرض شده که M یک خمینه‌ی C^∞ $d-$بعدی فشرده و همراه با یک اندازه‌ی لبگ متناهی می‌باشد. برای هر هسته‌ی $K \in \mathcal{L}^t(M,M)$ که $0 < t < \infty$ و $\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-t/d})$.

در [۱۸] رید به طور بهینه‌ای ثابت نموده برای هسته‌های معین مثبتی که به طور پیوسته N بار دیفرانسیل‌پذیرند، $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-N-1})$. هسته در اینجا تعریف شده روی بازه‌ی واحد I همراه با اندازه‌ی لبگ μ می‌باشد.

---
[1] Mercer's theorem

در [۲]، با حذف شرط فشردگی X و جایگزین کردن این فضا با یک بازه‌ی بسته $I \subseteq \mathbb{R}$ و نیز با انجام دادن بررسی‌های کلی روی آن، زمانی که K هسته‌ای هموار باشد، نتایجی حاصل شده اند. در آنجا تحت این فرض که $K(x,y)$ هسته‌ی معین مثبتی بوده و نیز در شرط لیپ شیتس مرتبه‌ی α صدق می‌کند ($0 < \alpha \leq 1$)، در یکی از حالات بررسی شده که اگر $K(x,x)$ با محمل فشرده باشد، آن‌گاه $\lambda_n = O(n^{-\alpha-1})$. نتایجی مشابه در مراجع [۳] و [۴] موجود می‌باشند.

در خلال پایان‌نامه با فرض اینکه X یک فضای متریک باشد که به یک اندازه‌ی کاملاً مثبت مجهز شده، این سوالات دوباره مطرح می‌گردند.

بررسی میزان تنزل مقادیر ویژه‌ی مربوط به عملگرهای انتگرالی، هنگامی که X یک فضای $(q,t)-$ فشرده بوده و هسته مولد، شرایط هموار بودن لیپ شیتس را دارا باشد، یکی از اهداف اصلی این پایان‌نامه می‌باشد.

فصل ۱

پیش‌نیازها و تعاریف اولیه

در ارائه‌ی تعاریف و قضایای این فصل بیشتر از مراجع [۹] و [۱۵] استفاده شده است. همچنین برخی از تعاریف و نیز اثبات قضیه‌ی طیفی به شکلی متفاوت ارائه شده اند.

تعریف ۱.۰.۱ فرض کنیم (X,T) یک فضای توپولوژیکی هاسدورف و Σ یک $\sigma-$جبر روی X باشد که توپولوژی T را در بر دارد. اندازه‌ی ν روی (X,Σ) اندازه‌ی اکیداً مثبت نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی باز ناتهی از X دارای اندازه‌ی اکیداً مثبت باشد.

تعریف ۲.۰.۱ زیرمجموعه‌ی E از فضای متریک X را کلاً کراندار گوییم، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، مجموعه‌ی E در اجتماع تعدادی متناهی گوی باز به شعاع ϵ قرار داشته باشد.

تعریف ۳.۰.۱ نگاشت خطی $T: X \to Y$ بین فضاهای هیلبرت X و Y فشرده است، هرگاه $T(S)$ به طور نسبی فشرده باشد. (بستار $T(S)$ در Y فشرده باشد) که S یک گوی یکه بسته در X است. به طور معادل $T(S)$ کلاً کراندار باشد. در این حالت $T(S)$ کراندار و بنابراین T کراندار می‌باشد. واضح است که عملگر $T \in B(\mathcal{H})$

را فشرده می‌باشد، هرگاه برای هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ از بردارهای $\mathcal{H}$، $\{Tx_n\}$ دارای یک زیردنباله‌ی همگرا باشد.

تعریف ۴.۰.۱ عملگر از رتبه‌ی متناهی: عملگر T روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را از رتبه‌ی $(r < \infty)$ می‌گوییم، هرگاه $dim\ T(\mathcal{H}) = r$. یعنی برد آن از درجه‌ی متناهی باشد.

کلاس تمام عملگرها با رتبه r را با K_r نمایش داده و قرار می‌دهیم $K := \bigcup_r K_r$. هر عملگر از رتبه‌ی متناهی فشرده می‌باشد. این یک نتیجه‌ی مستقیمی از قضیه‌ی بولتزانو– وایرشتراس بوده که بیان می‌نماید هر دنباله‌ی کراندار در $\mathbb{C}^n$ دارای یک زیردنباله‌ی همگرا می‌باشد.

زیر فضای عملگرهای با رتبه‌ی متناهی روی فضای $\mathcal{H}$ را با $B_{fin}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۰.۱ عملگر T دارای رتبه‌ی متناهی است، اگر و تنها اگر T^* دارای رتبه‌ی متناهی باشد.

برهان . فرض کنیم $T \in K_r$ و $\{e_k\}_1^r$، یک پایه‌ی متعامد یکه در $T(\mathcal{H})$ باشد، در این صورت برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم

$$Tx = \sum_{k=1}^{r} \langle Tx, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{r} \langle x, T^* e_k\rangle e_k,$$

قرار می‌دهیم $f_k = T^* e_k$، آن‌گاه $T = \sum_{k=1}^{r} \langle ., f_k\rangle e_k$. همچنین

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{k=1}^{r} \langle \langle x, f_k\rangle e_k, y\rangle = \sum_{k=1}^{r} \langle x, \langle y, e_k\rangle f_k\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

از این رو $T^* = \sum_{k=1}^{r} \langle ., e_k\rangle f_k$ و بنابراین $T^* \in K_r$. □

لم ۶.۰.۱ عملگر همانی روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ فشرده است، اگر و تنها اگر $\mathcal{H}$ متناهی‌البعد باشد.

برهان . ($\Longleftarrow$) فرض کنیم I عملگری فشرده باشد و $dim(\mathcal{H}) = \infty$ و نیز $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد. اما از آنجا که I فشرده است، لذا $\{I(e_i)\}_{i=1}^{\infty} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ باید دارای زیر دنباله‌ی همگرا باشد.

ولی طبق قضیه‌ی فیثاغورث

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{۲},$$

رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد که $\{I(e_i)\}_{i=۱}^{\infty}$ هیچ زیردنباله‌ی همگرایی ندارد و این متناقض با فرض فشردگی عملگر I است.

$(\Longleftarrow)$ اگر $dim(\mathcal{H}) < \infty$ لذا I عملگری با رتبه‌ی متناهی و نهایتاً فشرده می‌باشد. □

تعریف ۷.۰.۱ اگر $X,\ Y$ فضاهای هیلبرت باشند، فضای برداری تمام نگاشتهای خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم و زمانی که $X = Y$، می‌نویسیم $B(X)$. $B(X,Y)$ فضایی نرمدار است که نرم آن به صورت زیر می‌باشد

$$\|T\| = \sup\{\ \|T(x)\| \quad : \quad \|x\| \leq ۱\}.$$

تعریف ۸.۰.۱ مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده از X به Y را با $K(X,Y)$ نشان می‌دهیم و عملگرهای فشرده روی X را با $K(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۹.۰.۱ $K(\mathcal{H})$ یک ایده آل از $B(\mathcal{H})$ می‌باشد.

برهان . باید نشان دهیم که اگر A ،$B \in K(\mathcal{H})$ و $T \in B(\mathcal{H})$، آن‌گاه αA، $A+B$، TA و AT همگی در $K(\mathcal{H})$ قرار دارند. به عبارت دیگر برای هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ از $\mathcal{H}$، $\{(AT)x_n\}$، $\{(TA)x_n\}$، $\{(A+B)x_n\}$ و $\{\alpha A x_n\}$ دارای زیردنباله‌های همگرا می‌باشند.

اما از آنجا که A فشرده می‌باشد، پس $\{Ax_n\}$ دارای زیردنباله‌ی همگرای $\{Ax_{n_i}\}$ بوده، لذا بوضوح $\{\alpha Ax_{n_i}\}$ یک زیردنباله‌ی همگرا از $\{\alpha Ax_n\}$ است. که این نشان می‌دهد αA فشرده می‌باشد. همچنین از آنجا که $T \in B(\mathcal{H})$، لذا T پیوسته بوده و در نتیجه $\{TAx_{n_i}\}$ یک زیردنباله‌ی همگرا از $\{TAx_n\}$ می‌باشد. بر این اساس نتیجه می‌گیریم که TA فشرده می‌باشد.

اثبات فشردگی AT کمی متفاوت می‌باشد. از آنجا که $\{x_n\}$ کراندار بوده و $\|Tx_n\| \leq \|T\|.\|x_n\|$، لذا دنباله‌ی $\{Tx_n\}$ کراندار می‌باشد. اما از آنجا که A فشرده است، لذا $\{(AT)x_n\} = \{A(Tx_n)\}$ دارای یک زیردنباله‌ی همگرا بوده و این نشان می‌دهد AT فشرده است. حالت جمع بدیهی می‌باشد. $\square$

نتیجه ۱۰.۰.۱ اگر $\mathcal{H}$ نامتناهی‌البعد بوده و $T \in B(\mathcal{H})$ دارای وارون $T^{-1} \in B(\mathcal{H})$ باشد، آن‌گاه T فشرده نیست.

چون اگر T عملگری فشرده باشد، آن‌گاه از آنجا که $K(\mathcal{H})$ ایده‌آل است، لذا $T^{-1}T = I$ نیز فشرده می‌باشند، دراین‌صورت طبق لم (۶.۰.۱) $\mathcal{H}$ باید متناهی‌البعد باشد و این تناقض است.

تعریف ۱۱.۰.۱ فضای توپولوژیکی X را تفکیک‌پذیر می‌نامیم، هرگاه شامل زیرمجموعه‌ی شمارش پذیر چگال باشد. به عبارت دیگر یک دنباله $\{x_n\}$ از عناصر فضا چنان موجود باشد که هر زیر مجموعه باز غیر تهی از فضا شامل حداقل یک عنصر از دنباله باشد. توجه کنید که اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه $\mathcal{H}$ تفکیک‌پذیر است، اگر و تنها اگر $dim(\mathcal{H}) = \aleph_\circ$.

تعریف ۱۲.۰.۱ نماد O بزرگ: فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع حقیقی باشند که روی بازه‌ی (a, ∞) تعریف شده اند. زمانی که $x \to \infty$ می‌نویسیم $f(x) = O(g(x))$، اگر و تنها اگر یک عدد حقیقی مثبت M و یک عدد حقیقی $x_\circ$ وجود داشته باشند، به طوری که

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \,, \quad \forall x > x_\circ .$$

در بسیاری از متون، هنگامی که متغیر x به بی‌نهایت میل می‌کند، سخن از نرخ رشد به میان آمده و برای سادگی می‌نویسیم $f(x) = O(g(x))$.

تعریف ۱۳.۰.۱ نماد o کوچک: فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع حقیقی باشند که روی بازه‌ی (a, ∞) تعریف شده اند. زمانی که $x \to \infty$ می‌نویسیم $f(x) = o(g(x))$ اگر و تنها اگر

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۰.$$

گزاره ۱۴.۰.۱ فرض کنیم p و q اعداد مزدوج بوده و $۱ < p < \infty$. همچنین X یک فضای اندازه با اندازه‌ی ν باشد و f, g توابعی اندازه‌پذیر بر X با برد در $[۰, \infty]$ باشند، در این صورت

$$\int_X fg d\nu \leq \Big(\int_X f^p d\nu\Big)^{۱/p} \Big(\int_X g^q d\nu\Big)^{۱/q}, \qquad (۱)$$

$$\Big(\int_X (f+g)^p d\nu\Big)^{۱/p} \leq \Big(\int_X f^p d\nu\Big)^{۱/p} + \Big(\int_X g^q d\nu\Big)^{۱/p}, \qquad (۲)$$

(۱) نامساوی هولدر[۱] و (۲) نامساوی مینکوفسکی[۲] می‌باشد.

اگر $p = q = ۲$، نامساوی (۱) به نامساوی شوارتز[۳] معروف است.

قضیه ۱۵.۰.۱ برای هر x, y در یک فضای ضرب داخلی حقیقی X، اتحاد قطبی زیر برقرار است.

$$\langle x, y \rangle = \frac{۱}{۴}\big(\|x+y\|^۲ - \|x-y\|^۲\big). \qquad (*)$$

[۱] Holder inequality

[۲] Minkowsky inequality

[۳] Schwartz ineguality

نکته ۱۶.۰.۱ در حالت کلی هر فضای هیلبرتی یک فضای باناخ می‌باشد ولی عکس آن همواره صادق نیست. در واقع شرط لازم و کافی برای اینکه فضای باناخ X به یک ضرب داخلی مرتبط گردد، (این ضرب داخلی X را به فضای هیلبرت مبدل می‌سازد.) آن است که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$\|x+y\|^{2}+\|x-y\|^{2}=2\left(\|x\|^{2}+\|y\|^{2}\right).$$

برای هر $x,y\in X$. همچنین $\|.\|$ ضرب داخلی روی X را تعریف می کند.
رابطه‌ی فوق به خاصیت متوازی الاضلاع [4] معروف می‌باشد.

تعریف ۱۷.۰.۱ مجموعه‌ی $U=\{u_\alpha\ :\ \alpha\in I\}$ از بردارهای ناصفر در فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ متعامد یکه است، هرگاه برای $\gamma\neq\beta$، $\langle u_\gamma,u_\beta\rangle=0$ و برای هر $\alpha\in I$، $\|u_\alpha\|=1$.
همچنین U مجموعه‌ی متعامد ماکزیمال نامیده می‌شود، هرگاه مشمول هیچ مجموعه متعامد یکه ای نباشد. چنین مجموعه‌ای را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

لم ۱۸.۰.۱ (نامساوی بسل):[5] فرض کنید $U=\{x_\alpha\ :\ \alpha\in I\}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ بوده و $x\in\mathcal{H}$، در این صورت

$$\Big\|x-\sum_{\alpha\in I}\langle x,x_\alpha\rangle x_\alpha\Big\|^{2}=\|x\|^{2}-\sum_{\alpha\in I}|\langle x,x_\alpha\rangle|^{2},$$

و همچنین

$$\sum_{\alpha\in I}|\langle x,x_\alpha\rangle|^{2}\leq\|x\|^{2}.\qquad(*)$$

[4] Parallelogram
[5] Bessel inequality

رابطه‌ی $(*)$ در بالا به نامساوی بسل معروف می‌باشد.

برهان . $\|x\|^{2}$ را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم.

$$\|x\|^{2} = \Big\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i + \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i\Big\|^{2},$$

حال ادعا می‌کنیم

$$\Big(x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i\Big) \perp \Big(\sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i\Big),$$

برای این منظور داریم

$$\Big\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i, \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i\Big\rangle$$

$$= \Big\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i\Big\rangle - \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j\rangle x_j\Big\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, x_i\rangle}\langle x, x_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle\overline{\langle x, x_i\rangle}\langle x_i, x_i\rangle = 0$$

حال با توجه به اینکه $\Big\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i\Big\rangle = 0$، داریم

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i\Big\|^{2} = \|x\|^{2} - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle x_i|^{2}$$

از آنجا که عبارت سمت چپ تساوی فوق نامنفی می‌باشد، لذا

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^{2} \leq \|x\|^{2}.$$

$\square$

لم ۱۹.۰.۱ فرض کنیم $U = \{u_\alpha \;:\; \alpha \in I\}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت روابط زیر هم ارزند.

۱. U یک پایه است.

۲. برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم $x = \sum_{e \in U} \langle x, e\rangle e$.

۳. برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ داریم $\langle x, y\rangle = \sum_{e \in U} \langle x, e\rangle \ \langle e, y\rangle$.

۴. $\forall x \in \mathcal{H} \quad \|x\|^۲ = \sum_{\alpha \in I} |\langle u_\alpha, x\rangle|^۲,$. (تساوی پارسوال[6])

تعریف ۲۰.۰.۱ فرض کنیم T یک عملگر خودالحاقی و فشرده روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. اگر λ یک مقدار مختلط باشد، مجموعه‌ی

$$X_\lambda = \{x \in X \ : \ Tx = \lambda x\},$$

را یک $\lambda-$فضای ویژه‌ی عملگر T می‌نامیم.

قضیه ۲۱.۰.۱ قضیه‌ی طیفی:[7] فرض کنید T عملگری خودالحاقی و فشرده باشد، در این صورت روابط زیر برقرارند.

۱. تتمیم $\bigoplus X_\lambda$ برابر با X می‌باشد. یعنی یک پایه‌ی متعامد یکه شامل بردارهای ویژه وجود دارد.

۲. صفر، تنها نقطه‌ی انباشتگی ممکن برای مجموعه‌ی مقادیر ویژه T بوده و اگر X نامتناهی‌البعد باشد، خود صفر نقطه‌ی انباشتگی است.

۳. فضاهای ویژه‌ی X_λ متناهی‌البعدند.

۴. تمامی مقادیر ویژه حقیقی مقدار می‌باشند.

۵. $|T|+$ و یا $|T|-$ مقدار ویژه‌ی T خواهند بود.

[6] Persoval equality

[7] spectral theorem

برهان . حکم ۵ قضیه مهم‌ترین قسمت آن است. برای اثبات آن فرض می‌کنیم که T یک عملگر خودالحاقی باشد، در این صورت داریم

$$\|T\| =_{|x|\leq ۱} \sup \ |\langle Tx, x\rangle|,$$

توجه داریم که چون T خودالحاقی است، لذا $\langle Tx, x\rangle$ حقیقی مقدار می‌باشد. حال دنباله‌ی $\{x_n\}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌نماییم که $\|x_n\| \leq ۱$ و نیز $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \to \|T\|$، در این صورت با جایگزین کردن یک زیردنباله بجای آن (در صورت لزوم) دنباله‌ی $\langle Tx_n, x_n\rangle$ از اعداد حقیقی دارای حد $\lambda = \|T\|$ و یا $\lambda = -\|T\|$ می‌باشد، لذا

$$\begin{aligned} ۰ \leq \|Tx_n - \lambda x_n\|^۲ \ &= \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n\rangle \\ &= \|Tx_n\|^۲ - ۲\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^۲\|x_n\|^۲ \\ &\leq \lambda^۲ - ۲\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^۲. \end{aligned}$$

عبارت سمت راست نامساوی در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند. حال با توجه به فشرده بودن T می‌توانیم $\{Tx_n\}$ را با یک زیر دنباله‌ی همگرا از آن جایگزین نماییم. در اینجا برای سادگی فرض می‌کنیم آن زیر دنباله همان $\{Tx_n\}$ است. فرض کنیم $y \in X$ چنان موجود باشد که $Tx_n \to y$. با توجه به اینکه $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to ۰$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\lambda x_n \to y$. معادلاً

$$x_n \to \lambda^{-۱}y,$$

لذا بنابر پیوستگی T، $\lambda T(x_n) \to T(y)$. اما از طرفی $Tx_n \to y$، پس $T(y) = \lambda y$، لذا y بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی $\|T\|$ و یا $-\|T\|$ می‌باشد.

برای اثبات بند ۱ فرض می‌کنیم $Y = \bigoplus X_\lambda$. ولی از آنجا که $T(X_\lambda) \subseteq X_\lambda$، لذا Y تحت عملگر T پایا می‌باشد. حال فرض می‌کنیم $Z = Y^\perp$. ادعا می‌کنیم Z نیز تحت T پایا و (تحدید) T روی فضای هیلبرت Z عملگری فشرده می‌باشد. با توجه به پایداری Y تحت عملگر T و نیز خودالحاقی بودن T، برای $z \in Z$ و $y \in Y$

داریم

$$\langle Tz, y\rangle = \langle z, Ty\rangle = 0$$

که رابطه‌ی اخیر، پایداری Z را نشان می‌دهد.

به وضوح یک گوی واحد در Z زیر مجموعه‌ی گوی واحد B_X در X بوده و همچنین این گوی تحت عملگر T به یک مجموعه‌ی پیش‌فشرده (با بستار فشرده) $TB \cap Z$ در X نگاشته می‌گردد.

زیرا فرض کنیم T_1 تحدید T به Z باشد. اگر

$$B_z = \{x \in Z \ : \ \|x\| \leq 1\},$$

یک گوی یکه در Z باشد، آن‌گاه باید نشان دهیم $\overline{T_1(B_Z)}$ فشرده می‌باشد. داریم

$$T_1(B_Z) = T(B_Z) \subset T(B_X),$$

از طرفی $T_1(B_Z) \subset Z$، لذا $T_1(B_Z) = T(B_X) \cap Z,$. از این رو

$$\overline{T_1(B_Z)} = \overline{T(B_X) \cap Z} = \overline{T(B_X)} \cap \overline{Z} = \overline{T(B_X)} \cap Z,$$

اما Z بسته و $\overline{T(B_X)}$ فشرده است، لذا $\overline{T_1(B_Z)}$ فشرده می‌باشد. اگر $Z \neq 0$ آن‌گاه طبق بند (۵) قضیه T_1 دارای مقادیر ویژه‌ی $|T_1|$ یا $-|T_1|$ است. اما در این صورت $|T_1|$ یا $-|T_1|$ مقادیر ویژه‌ی عملگر T نیز می‌باشند. و این تناقض است، زیرا $Z = Y^{\perp}$ هیچ فضای ویژه‌ای از T را در بر ندارد.

قبل از ادامه‌ی اثبات توجه داریم که در یک فضای هیلبرت نامتناهی‌البعد Y، گوی $B(0, r)$ پیش‌فشرده نمی‌باشد. یعنی اگر فرض می‌کنیم $\{e_1, e_2, \cdots\}$ یک پایه برای فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه $\{re_1, re_2, \cdots\}$ یک دنباله بوده که فاقد زیردنباله‌ای همگراست. چون فاصله تمام نقاط این دنباله حداقل $r\sqrt{2}$ است، زیرا

$$\|re_i - re_j\|^2 \leq \|re_i\|^2 + \|re_j\|^2 = 2r^2,$$

برای اینکه اثبات کنیم تنها نقطه‌ی انباشتگی ممکن برای مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی، نقطه صفر است کافی است نشان دهیم برای هر $\epsilon > 0$ تنها تعداد متناهی تا مقدار ویژه‌ی λ وجود دارد، به طوری که $|\lambda| > \epsilon$.

فرض می‌کنیم B_1 یک گوی واحد در $Y = \sum_{|\lambda|>\epsilon} X_\lambda$ باشد، آن‌گاه تصویر B_1 تحت T، گوی با شعاع $\epsilon > 0$ در Y را در بر دارد. یعنی،

$$B_\epsilon(Y) \subseteq T(B_1(Y)),$$

برای این منظور فرض می‌کنیم $z \in B_\epsilon(Y)$، درنتیجه $|z| < \epsilon$.

حال قرار می‌دهیم $x = \sum_{\lambda>\epsilon} \lambda^{-1} x_\lambda$. ادعا می‌کنیم $x \in B_1$ و $T(x) = z$. داریم

$$\begin{aligned} |x| &= \left|\textstyle\sum_{|\lambda|>\epsilon} \lambda^{-1} x_\lambda\right| \\ &< \tfrac{1}{\epsilon}\left|\textstyle\sum_{|\lambda|>\epsilon} x_\lambda\right| \\ &= \tfrac{1}{\epsilon}|z| \\ &< \tfrac{1}{\epsilon}\epsilon = 1. \end{aligned}$$

از این رو

$$T(x) = \sum_{\lambda>\epsilon} \lambda^{-1}\lambda x_\lambda = \sum_{\lambda>\epsilon} x_\lambda = z,$$

اما از آنجایی که T عملگری فشرده بوده و گوی $B_\epsilon(Y)$ بسته می‌باشد، لذا این گوی پیش فشرده و به دنبال آن Y باید متناهی‌البعد باشد و چون ابعاد X_λ ها صحیح مثبت می‌باشد، بنابراین حداکثر تعداد متناهی از آنها در شرط $|\lambda| > \epsilon$ قرار می‌گیرند.

همین موضوع نشان می‌دهد که تنها نقطه‌ی انباشتگی ممکن از مجموعه‌ی مقادیر ویژه، صفر است. همچنین اگر X نامتناهی‌البعد باشد، آن‌گاه صفر یک نقطه‌ی انباشتگی است. زیرا اگر صفر نقطه‌ی انباشتگی نباشد، آن‌گاه $\epsilon > 0$ چنان موجود است که تعداد متناهی از λ ها در شرط $|\lambda| \leq \epsilon$ قرار می‌گیرند. از این رو $Z = \bigoplus_{|\lambda|\leq\epsilon} X_\lambda$ متناهی‌البعد است، زیرا هر کدام از X_λ ها متناهی‌البعد می‌باشند.