دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی

گرایش تحقیق‌درعملیات

مسائل بهینه‌سازی تولیدی چندمخزنه و کاربرد آن در میدان‌های نفتی

استاد راهنما

دکتر صغری نوبختیان

استاد مشاور

دکتر محمدرضا پوریای‌ولی

پژوهشگر

فهیمه دیانی

دی‌ماه ۱۳۹۱

چکیده

زمانی که یک میدان نفت و گاز مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد، اغلب چند مخزن عملیات را به طور مشترک انجام می‌دهند. این تاسیسات عموما قابلیت فرآوری مقدار محدودی از محصولات در واحد زمان را دارند. به منظور جبران این محدودیت‌ها، نیاز به اعمال یک فاکتور بازدارندگی مناسب است به طوری که میزان محصول تولیدی به صورت تدریجی کاهش یابد. برای این منظور، استراتژی تولید به شکل تابع برداری برای تمامی نقاط زمانی که نمایانگر فاکتورهای بازدارندگی اعمال شده بر مخازن در بازه زمانی داده شده است، تعریف می‌گردد. در این پایان‌نامه، تمرکز بر مسأله بهینه‌سازی تولید میدان‌های نفتی است که شامل تعداد زیادی مخزن هستند. همچنین مسأله بهینه‌سازی چنین استراتژی‌های تولید با در نظر داشتن توابع هدف متنوع مدنظر است. حل این مسأله بهینه‌سازی به مشخصه‌های کلیدی همچون، تقعر و تحدب تابع هدف و توابع نرخ پتانسیل تولید بستگی دارد. با استفاده از این مشخصات چندین مسأله‌ی موردی مهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. از آنجایی که تابع هدف محدب است، الگوریتمی برای یافتن بهترین استراتژی تولید ارائه می‌دهیم. همچنین در جایی که تمام توابع هدف خطی هستند، یک استراتژی تولید خاص جهت بهینه‌سازی برای محدوده‌ی گسترده‌ای از توابع هدف اثبات می‌شود. همچنین یک نوع از مدل‌های تخصیص منابع که از مسائل سرمایه‌گذاری مختلف بدست آمده است را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف اولیه، قضایا، لم‌ها و گزاره‌هایی که در فصل‌های بعدی استفاده خواهند شد را بیان می‌نماییم. بنابراین از آوردن برخی از اثبات‌ها صرف‌نظر می‌نماییم [۷، ۱۹، ۳۱، ۳۵].

تعریف ۱.۱.۱. گردایه‌ی $\mathfrak{m}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک $\sigma-$جبر در X می‌نامیم اگر

۱. $X \in \mathfrak{m}$.

۲. هرگاه $A \in \mathfrak{m}$، آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{m}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

۳. هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in \mathfrak{m}$ آن‌گاه $A \in \mathfrak{m}$.

هرگاه $\mathfrak{m}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد، آن‌گاه $(X, \mathfrak{m})$ را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{m}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامند.

هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر، Y یک فضای توپولوژیکی و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آن‌گاه گوییم f اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

قضیه ۲.۱.۱ (همگرایی تسلطی لبگ[1]). فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر[2] باشد به طوری که

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

هرگاه تابعی مانند g موجود باشد که g انتگرال‌پذیر باشد و

$$|f_n| \leq g, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

آنگاه f انتگرال‌پذیر است و

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

اثبات. به [۳۵] رجوع شود. □

تعریف ۳.۱.۱. دو فضای متریک (X, d_X) و (Y, d_Y) را در نظر می‌گیریم که d_X یک متر روی مجموعه‌ی X و d_Y یک متر روی مجموعه‌ی Y را مشخص می‌کند. تابع f یک تابع لیپ‌شیتز[3] پیوسته نامیده می‌شود اگر یک ثابت حقیقی $K \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2).$$

[1] Lebesgue's Dominated Convergence

[2] Measurable Functions

[3] Lipschitz

که K ثابت لیپ‌شیتزی برای تابع f می‌باشد، بیشتر اوقات کوچکترین ثابت K، بهترین ثابت لیپ‌شیتز است.

برای مثال، Y ممکن است مجموعه‌ای از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با متر $d_Y(x,y) = |x-y|$، و X ممکن است زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد.

قضیه ۴.۱.۱ (پیکار-لیندلف[۴]). مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_\circ) = y_\circ, \qquad t \in [t_\circ - \varepsilon, t_\circ + \varepsilon].$$

اگر f یک تابع لیپ‌شیتز پیوسته در y و پیوسته در t باشد، آنگاه یک جواب یکتای $y(t)$ برای مسأله مقدار اولیه در بازه $[t_\circ - \varepsilon, t_\circ + \varepsilon]$ وجود دارد.

اثبات. به [۲۳] رجوع شود. □

لم ۵.۱.۱. فرض می‌کنیم $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ به طوری که

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

آنگاه برای هر $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ به طوری که

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0. \tag{2.1}$$

داریم

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i a_i, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

اثبات. اثبات با استقرا روی k انجام می‌شود. بنابر (۱.۱) داریم $x_1 \geq y_1$. بنابراین، چون همه‌ی a_iها نامنفی هستند، پس $x_1 a_1 \geq y_1 a_1$.

[۴] Picard-Lindelof's

بنابراین نتیجه برای $k = ۱$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم نتیجه برای $k \leq m$ برقرار باشد، نشان می‌دهیم که برای $k = m + ۱$ نیز برقرار است. در ابتدا b_iها را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$b_i = a_i - a_{m+۱}, \qquad i = ۱, \ldots, m.$$

بنابر رابطه (۱.۲) داریم

$$b_۱ \geq b_۲ \geq \ldots \geq b_m \geq ۰.$$

در نتیجه با توجه به فرض استقرا داریم

$$\sum_{i=۱}^{m} x_i b_i \geq \sum_{i=۱}^{m} y_i b_i.$$

لذا با در نظر گرفتن این رابطه و رابطه (۱.۱) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{m+۱} x_i a_i &= \sum_{i=۱}^{m} x_i (a_i - a_{m+۱}) + a_{m+۱} \sum_{i=۱}^{m+۱} x_i \\
&= \sum_{i=۱}^{m} x_i b_i + a_{m+۱} \sum_{i=۱}^{m+۱} x_i \\
&\geq \sum_{i=۱}^{m} y_i b_i + a_{m+۱} \sum_{i=۱}^{m+۱} y_i \\
&= \sum_{i=۱}^{m} y_i (a_i - a_{m+۱}) + a_{m+۱} \sum_{i=۱}^{m+۱} y_i \\
&= \sum_{i=۱}^{m+۱} a_i y_i.
\end{aligned}$$

بنابراین، نتیجه برای $k = m + ۱$ برقرار است و از این‌رو برای $k = ۱, \ldots, n$ با استفاده از استقرا برقرار است. $\square$

تعریف ۶.۱.۱. تابع $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را متقارن[۵] گوییم هرگاه به ازای هر دو جایگشت δ, σ از مجموعه $s = \{1, \dots, n\}$ داشته باشیم

$$\phi(b^\delta) = \phi(b^\sigma).$$

که $b^\delta = (b_i)_{i\in\delta}$ و $b^\sigma = (b_i)_{i\in\sigma}$.

تعریف ۷.۱.۱. هرگاه X یک مجموعه باشد برای هر $C \subseteq X$ تابع مشخصه[۶] C روی X را با $I_C(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$I_C(x) = \begin{cases} 1 & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

تعریف ۸.۱.۱. اگر $X \subseteq \mathbb{R}^n$ و $Y \subseteq \mathbb{R}^n$، $f : X \longrightarrow Y$ را یک همانریختی[۷] گوییم هرگاه f پیوسته، یک‌به‌یک، پوشا و دارای وارون پیوسته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. برای هر $M \subseteq X$، مرز[۸] M را با ∂M نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\partial M = \overline{M} \cap \overline{M^C}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. هرگاه M یک خمینه‌ی مرزدار n بعدی با مرز $\partial(M)$ باشد در این صورت $\partial(M)$ یک خمینه‌ی $n-1$ بعدی است.

[۵] Symmetric Function

[۶] Characteristic Function

[۷] Homeomorphism

[۸] Boundary

۲.۱ ابرصفحه‌های جداکننده و محمل

نتایج بسیاری در نظریه بهینه‌سازی محدب پس از قضایای ابرصفحه جداکننده[۹] و محمل[۱۰] بدست آمده است [۱۲].

تعریف ۱.۲.۱. ابرصفحه H در $\mathbb{R}^n$، مجموعه‌ی نقاط به شکل $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ l(\boldsymbol{x}) = c\}$ است که l یک فرم خطی غیرصفر و c یک اسکالر می‌باشد.

در فضای $\mathbb{R}^n$ یک ابرصفحه $H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ l(\boldsymbol{x}) = c\}$ فضا را به دو نیم‌فضای $H^+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ l(\boldsymbol{x}) \geq c\}$ و $H^- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ l(\boldsymbol{x}) \leq c\}$ تقسیم می‌کند.

تعریف ۲.۲.۱. ابرصفحه Hمجموعه‌های T و S را جدا می کند، هرگاه یکی از مجموعه‌ها مشمول در H^+ در حالی که مجموعه دیگر مشمول در H^- باشد.

تعریف ۳.۲.۱. ابرصفحه Hمحمل مجموعه S است، هرگاه $S \subseteq H^+$ یا $S \subseteq H^-$ و $S \cap H \neq \emptyset$.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید $S, T \subset \mathbb{R}^n$ دو مجموعه محدب مجزا باشند. آنگاه یک ابرصفحه H وجود دارد به طوری که S و T را جدا می کند.

اثبات. به [۳۱] رجوع شود. □

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی محدب بسته و $\boldsymbol{x}_\circ \in S$ یک نقطه مرزی از S باشند. در این صورت یک ابرصفحه H وجود دارد که محمل S است به طوری که $\boldsymbol{x}_\circ \in H$.

با ترکیب قضیه‌های ۴.۲.۱ و ۵.۲.۱ گزاره زیر را داریم:

---

[۹] Separating

[۱۰] Supporting

گزاره ۶.۲.۱. فرض کنید $S, T \subset \mathbb{R}^n$ دو مجموعه محدب مجزا باشند. همچنین فرض کنید یک $x_\circ \in S$ وجود دارد به طوری که هر همسایگی از $x_\circ$، T را قطع می کند. آنگاه یک ابرصفحه H که S و T را جدا می کند به طوری که H محملS در $x_\circ$ باشد، وجود دارد.

۳.۱ توابع محدب و شبه‌محدب

تعریف ۱.۳.۱. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک مجموعه‌ی محدب می‌نامیم، اگر برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in A.$$

در واقع مجموعه‌ی A در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را محدب گوییم، هر گاه به ازای هر دو نقطه دلخواه واقع در A آنگاه خط واصل این دو نقطه هم متعلق به A باشد.

گزاره ۲.۳.۱. اگر A محدب و درون A ناتهی باشد، آنگاه بستار[۱۱] A محدب است.

اثبات. به [۶] رجوع شود. $\square$

تعریف ۳.۳.۱. مجموع $x = \sum_{i=۱}^{n} t_i x_i$ را یک ترکیب محدب از عناصر $x_i \in \mathbb{R}^n$ گوئیم، هرگاه $\sum_{i=۱}^{n} t_i = ۱$ و $t_i \geq \circ$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، و فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی ناتهی و محدب در $\mathbb{R}^n$ باشد. تابع f، روی S محدب است، اگر به ازای هر $x_۱, x_۲ \in S$ و $\lambda \in (\circ, ۱)$ داشته باشیم

$$f(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲) \leq \lambda f(x_۱) + (۱ - \lambda) f(x_۲).$$

[۱۱] Closure

همچنین تابع f روی S اکیدا محدب[۱۲] است، اگر به ازای هر دو نقطه‌ی مجزا $x_۱ \neq x_۲$ داشته باشیم

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) < \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda) f(x_۲).$$

به همین ترتیب تابع f را مقعر گویند، اگر $-f$ محدب باشد. یعنی به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ مفروض داشته باشیم

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda) f(x_۲).$$

همچنین تابع اکیدا مقعر[۱۳] تابعی است که به ازای هر دو نقطه‌ی مجزا $x_۱ \neq x_۲$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) > \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda) f(x_۲).$$

نتیجه ۱.۳.۵. اگر $f_۱, f_۲, \ldots, f_k : S \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب باشند در اینصورت

۱. برای هر $\alpha_j > ۰$ و $j = ۱, \ldots, k$ ، تابع $f(x) = \sum_{j=۱}^{k} \alpha_j f_j(x)$ محدب است.

۲. $f(x) = \max\{f_۱(x), \ldots, f_k(x)\}$ تابع محدب می‌باشد.

اثبات. به [۳۴] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱.۳.۶. اگر C مجموعه‌ای غیرتهی محدب در $\mathbb{R}^n$ و $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد، آنگاه بردار $\xi \in \mathbb{R}^n$ زیرگرادیان[۱۴] تابع f در $\overline{x} \in C$ گفته می‌شود وقتی که

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \xi^t (x - \overline{x}), \qquad \forall x, \overline{x} \in C.$$

[۱۲] Strictly Convex

[۱۳] Strictly Concave

[۱۴] Subgradient

و اگر $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مقعر باشد، آنگاه ξ زیرگرادیان تابع f در $\overline{x} \in C$ گفته می‌شود وقتی که

$$f(x) \leq f(\overline{x}) + \xi^t(x - \overline{x}), \qquad \forall x, \overline{x} \in C.$$

پس در نتیجه مجموعه زیرگرادیان f در $\overline{x}$ یک مجموعه محدب است.

قضیه ۷.۳.۱. اگر C مجموعه‌ای محدب در $\mathbb{R}^n$ و $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر روی C باشد، آنگاه f محدب است اگروتنهااگر

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})(x - \overline{x}), \qquad \forall x, \overline{x} \in C.$$

اثبات. به [۷] رجوع شود. □

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید S مجموعه‌ای دلخواه در $\mathbb{R}^n$ باشد. غلاف محدب[۱۵] Sمجموعه‌ای محدب شامل S است که آن را با $conv(S)$ نشان می‌دهیم و شامل تمام ترکیبات محدب از S می‌باشد، یعنی $x \in conv(S)$ اگر و تنها اگر

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j, \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \qquad \lambda_j \geq 0.$$

که k عددی صحیح و مثبت است و $x_1, \ldots, x_k \in S$. از این‌رو $conv(S)$ کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل S است. در واقع $conv(S)$، اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل S می‌باشد.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید $f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و S یک مجموعه‌ی ناتهی و محدب در $\mathbb{R}^n$ باشند. f را شبه‌محدب[۱۶] گویند، اگر برای هر $x_1, x_2 \in S$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \qquad \forall \lambda \in (0, 1).$$

[۱۵] Convex hull

[۱۶] Quasiconvex

همچنین تابع f شبه مقعر[۱۷] است، اگر $-f$ شبه محدب باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، تابع f را آفین[۱۸] گوییم هرگاه f هم محدب و هم مقعر باشد.

تعریف ۱۱.۳.۱. با در نظر گرفتن فرضیات تعریف ۹.۳.۱ اگر به ازای $x_1, x_2 \in S$ و $f(x_1) \neq f(x_2)$ رابطه‌ی زیر

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \qquad \forall \lambda \in (0, 1).$$

برقرار باشد، آنگاه f را اکیدا شبه محدب می گویند.

همچنین f اکیدا شبه‌مقعر است اگر $-f$ اکیدا شبه محدب باشد.

تعریف ۱۲.۳.۱. اگر تابع f شبه‌محدب و شبه‌مقعر باشد، آنگاه گوییم تابع f شبه‌خطی است.

گزاره ۱۳.۳.۱. فرض می کنیم $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب و $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع شبه‌محدب باشد. اگر $\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_n \in S$ و $\lambda_1, \dots \lambda_n \in [0, 1]$ را به طوری که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ باشد را در نظر بگیریم آنگاه

$$g\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i\big) \leq \max\{g(\boldsymbol{x}_1), \dots, g(\boldsymbol{x}_n)\}.$$

اثبات. اثبات با استقرا روی n انجام می‌شود. این نتیجه برای $n = 1$ ونیز بنابر تعریف شبه‌محدب بودن برای $n = 2$ برقرار است. فرض می‌کنیم نتیجه برای $n - 1$ یا بردارهای کمتر برقرار باشد. نشان می‌دهیم که نتیجه برای n بردار نیز برقرار است. اگر $\lambda_n = 1$ نتیجه بدیهی است، بنابراین فرض می‌کنیم که $\lambda_n < 1$، معرفی می‌کنیم

$$\lambda'_i = \lambda_i \big[\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j\big]^{-1}, \qquad i = 1, \dots, (n-1).$$

---

[۱۷] Quasiconcave

[۱۸] Affine

چون به وضوح $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda'_i = 1$، بنابر فرض استقرا داریم

$$g\big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i \boldsymbol{x}_i\big) \leq \max\{g(\boldsymbol{x}_1), \ldots, g(\boldsymbol{x}_{n-1})\}.$$

از این‌رو به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} g\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i\big) &= g\big([\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_j][\sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i \boldsymbol{x}_i] + \lambda_n \boldsymbol{x}_n\big) \\ &\leq \max\{g\big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i \boldsymbol{x}_i\big), g(\boldsymbol{x}_n)\} \\ &\leq \max\{\max\{g(\boldsymbol{x}_1), \ldots, g(\boldsymbol{x}_{n-1})\}, g(\boldsymbol{x}_n)\} \\ &= \max\{g(\boldsymbol{x}_1), \ldots, g(\boldsymbol{x}_n)\}. \end{aligned}$$

پس بنابر استقرا نتیجه مورد نظر به دست آمد. $\square$

گزاره ۱۴.۳.۱. فرض می کنیم $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب و $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. آنگاه تابع g شبه‌محدب است اگروتنهااگر مجموعه‌های $L_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ g(\boldsymbol{x}) \leq y\}$ برای هر y محدب باشند. و به طور مشابه، تابع g شبه‌مقعر است اگروتنهااگر مجموعه‌های $U_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ g(\boldsymbol{x}) \geq y\}$ برای هر y محدب باشند. سرانجام، تابع g شبه‌خطی[۱۹] است اگروتنهااگر L_y و U_y برای هر y محدب باشند.

توجه کنیم که برای برخی yها L_y یا U_y ممکن است تهی باشند. در این شرایط، $\emptyset$ محدب تعریف شده است، به منظور بررسی شبه‌محدب یا شبه‌مقعر بودن، کافی است مجموعه‌ها ناتهی در نظر گرفته شود.
با استفاده از گزاره ۱۴.۳.۱ می‌توان خصوصیات زیر را بدست آورد.

[۱۹] Quasi Linear

گزاره ۱۵.۳.۱. فرض می کنیم $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب و $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. آنگاه تابع g شبه‌محدب است اگروتنهااگر مجموعه‌های $L^\circ_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ g(\boldsymbol{x}) < y\}$ برای هر y محدب باشند. و به طور مشابه، تابع g شبه‌مقعر است اگروتنهااگر مجموعه‌های $U^\circ_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ g(\boldsymbol{x}) > y\}$ برای هر y محدب باشند. سرانجام، تابع g شبه‌خطی است اگروتنهااگر L°_y و U°_y برای هر y محدب باشند.

اثبات. در ابتدا فرض کنیم g شبه‌محدب است، مجموعه $L^\circ_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ g(\boldsymbol{x}) < y\}$ را در نظر می‌گیریم. حال فرض کنیم $\boldsymbol{x}^۱, \boldsymbol{x}^۲ \in L^\circ_y$، پس برای $i = ۱, ۲$، $g(\boldsymbol{x}^i) < y$. مجموعه $y' = \max\{g(\boldsymbol{x}^۱), g(\boldsymbol{x}^۲)\}$ را معرفی می‌کنیم و سپس مجموعه $L_{y'}$ را در نظر می‌گیریم. چون $y' < y$ پس $L_{y'} \subseteq L^\circ_y$. بنابراین، طبق گزاره ۱۴.۳.۱ چون g شبه‌محدب است لذا $L_{y'}$ محدب است. از این‌رو برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ داریم

$$\alpha \boldsymbol{x}^۱ + (۱ - \alpha)\boldsymbol{x}^۲ \in L_{y'}.$$

چون $L_{y'} \subseteq L^\circ_y$لذا برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$،

$$\alpha \boldsymbol{x}^۱ + (۱ - \alpha)\boldsymbol{x}^۲ \in L^\circ_y.$$

پس نتیجه می‌گیریم که L°_y محدب است.
حال فرض کنیم مجموعه‌های $L^\circ_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ g(\boldsymbol{x}) < y\}$ برای هر y محدب باشند. مجموعه $L_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ g(\boldsymbol{x}) \leq y\}$ و $y_n = y + \frac{۱}{n}$ که $n = ۱, ۲, \ldots$ را در نظر می‌گیریم. بنابر فرض مجموعه‌های $L^\circ_{y_۱}, L^\circ_{y_۲}, \ldots$ محدب هستند. بنابراین

$$L_y = \bigcap_{n=۱}^{\infty} L^\circ_{y_n}.$$

بنابراین چون محدب بودن تحت اشتراک حفظ می‌شود [۱۲]، پس L_y محدب است. پس این برای هر L_y برقرار است، بنابر گزاره ۱۴.۳.۱ نتیجه می‌شود g شبه‌خطی است. □

با ترکیب نتایج بالا، می‌بینیم که تابع $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ شبه‌خطی است اگروتنهااگر L_y و مکمل آن هر دو برای هرy محدب باشند. و این دلالت می‌کند که برای هرy، $\partial(L_y) = S \cap H_y$ زمانی که H_y ابرصفحه[۲۰] است. گزاره زیر یک شرط کافی برای شبه‌خطی بودن را ثابت می‌کند.

گزاره ۱۶.۳.۱. فرض می کنیم $S \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب و $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. و فرض کنیم یک فرم خطی ناصفر l وجود داشته باشد به طوری که $g(\boldsymbol{x}) = h(l(\boldsymbol{x}))$ برای هر $\boldsymbol{x} \in S$، که $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ غیرافزایشی یا غیرکاهشی باشد. دراین‌صورت g شبه خطی است.

اثبات. فرض کنیم h غیرکاهشی باشد. مجموعه ناتهی $L_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ h(l(\boldsymbol{x})) \leq y\}$ را در نظر می‌گیریم، تعریف می‌کنیم $z = \sup\{u : \ h(u) \leq y\}$. چون h غیرکاهشی است برای هر $u < z$، $h(u) \leq y$ و برای هر $u > z$، $h(u) > y$.

اگر $y \leq h(u)$، آن‌گاه داریم $h(u) \leq y$ اگروتنهااگر $u \leq z$. از این‌رو در این حالت $L_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ l(\boldsymbol{x}) \leq z\}$.

اگر $y < h(u)$، آن‌گاه داریم $h(u) \leq y$ اگروتنهااگر $u < z$. از این‌رو در این حالت $L_y = \{\boldsymbol{x} \in S : \ l(\boldsymbol{x}) < z\}$ در دو حالت چون l خطی است، L_y محدب می‌باشد. با استفاده از استدلال مشابه می‌توان نشان داد که U_y محدب است، و نتیجه می‌گیریم که g شبه‌خطی است.

اثبات در حالتی که h غیرافزایشی است کاملا مشابه می‌باشد. $\square$

[۲۰] Hyperplanes

۴.۱ مفاهیم اولیه در بهینه‌سازی

تعریف ۱.۴.۱. مساله‌ی زیر

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t \quad & x \in S, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، نقطه‌ی $\overline{x} \in S$ را مینیمم سراسری[۲۱] برای مساله‌ی فوق می‌نامند، اگر به ازای هر $x \in S$، $f(x) \geq f(\overline{x})$.
و نقطه‌ی $\overline{x} \in S$ را مینیمم موضعی[۲۲] مساله می‌نامند، هرگاه یک همسایگی حول نقطه‌ی $\overline{x}$ و به شعاع ε، مانند $N_\varepsilon(\overline{x})$، وجود داشته باشد به طوری که، به ازای هر $x \in S \cap N_\varepsilon(\overline{x})$، $f(x) \geq f(\overline{x})$.

تعریف ۲.۴.۱. مساله‌ی زیر

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t \quad & x \in S, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، نقطه‌ی $\overline{x} \in S$ را ماکزیمم سراسری[۲۳] برای مساله‌ی فوق می‌نامند، اگر به ازای هر $x \in S$، $f(x) \leq f(\overline{x})$.
و نقطه‌ی $\overline{x} \in S$ را ماکزیمم موضعی[۲۴] مساله می‌نامند، هرگاه یک همسایگی حول نقطه‌ی $\overline{x}$ و به شعاع ε، مانند $N_\varepsilon(\overline{x})$، وجود داشته باشد به طوری که، به ازای هر $x \in S \cap N_\varepsilon(\overline{x})$، $f(x) \leq f(\overline{x})$.

[۲۱] Global Minimum

[۲۲] Local Minimum

[۲۳] Global Maximum

[۲۴] Local Maximum

تعریف ۳.۴.۱. نقطه‌ی x در مجموعه‌ی محدب C نقطه‌ی فرین $C \subseteq \mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود، اگر دو نقطه‌ی متمایز $x_۱$ و $x_۲$ در C وجود نداشته باشد به طوری که برای برخی مقادیر $۰ < \alpha < ۱$،

$$x = \alpha x_۱ + (۱ - \alpha) x_۲,$$

از این‌رو نقطه‌ی فرین[۲۵] در یک مجموعه، نقطه‌ای است که روی خط واصل هیچ دو نقطه‌ی متمایزی از آن مجموعه قرار نداشته باشد.

تعریف ۴.۴.۱. مساله‌ی بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t \quad & g_i(x) \leq ۰ \qquad i = ۱, \ldots, m, \\ & h_j(x) = ۰ \qquad j = ۱, \ldots, l. \\ & x \in X, \end{aligned}$$

تابع لاگرانژی[۲۶] این مسأله یعنی $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i=۱}^{m} \mu_i g_i(x) + \sum_{j=۱}^{l} \nu_j h_j(x).$$

μ و νرا ضرایب لاگرانژی می‌نامیم.

[۲۵] Extreme Point

[۲۶] Lagrangian

تعریف ۱.۴.۵. مساله‌ی بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t \quad & g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m, \\ & h_j(x) = 0 \qquad j = 1, \ldots, l. \\ & x \in X, \end{aligned}$$

$I(\overline{x})$ را مجموعه اندیس قیدهای فعال در $\overline{x}$ گوییم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I(\overline{x}) = \{ i \mid g_i(\overline{x}) = 0 \}.$$

تعریف ۱.۴.۶. مساله‌ی بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t \quad & g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m, \\ & h_j(x) = 0 \qquad j = 1, \ldots, l. \\ & x \in X, \end{aligned}$$

فرض کنید برای نقطه‌ی موجه $\overline{x}$، f و g_iها و h_jها در $\overline{x}$ مشتق‌پذیر باشند. اگر اسکالرهای ν_j و μ_i که $i \in I$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\begin{aligned} & \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{l} \nu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0, \\ & \mu_i \geq 0 \qquad \forall i \in I. \end{aligned}$$

آن‌گاه $\overline{x}$ را یک نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر گوییم.