بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه علوم کامپیوتر

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

علوم کامپیوتر

محاسبه فاصله فرشه گسسته در زمان زیرمربعی

استاد راهنما:

دکتر محمد فرشی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش‌گر:

سعید ریخته گر غیاثی

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

سپاس‌گزاری

سپاس خداوند یکتای عزتمندی که رحمت و دانش او در سراسر گیتی گسترده شده، آسمان‌ها و زمین همه از آن اوست و علم و دانش حقیقی را بر هر که بخواهد موهبت می‌فرماید. رحمت و لطف او را بی‌نهایت سپاس می‌گویم چرا که فهم و درک مطالب این پژوهش را بر من ارزانی داشت و مرا به این اصل رساند که علم و ایمان دو بال یک پروازند. توفیق تلاش به من داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی تازه را آغاز کنم و به خواست او به نتیجه‌ی مطلوب نائل آیم. به‌راستی که همه چیز از آن اوست و همه‌چیز به خواست اوست.

چکیده

فاصله فرشه یک معیار اندازه‌گیری تشابه بین دو منحنی A و B است. به طور غیر رسمی، فاصله فرشه بین دو منحنی A و B طول کوتاه‌ترین قلاده‌ای است که برای وصل کردن یک سگ، که در امتداد A، و صاحبش، در امتداد B، حرکت می‌کنند، لازم است، به گونه‌ای که آن‌ها بدون بازگشت به عقب در امتداد منحنی‌های مربوطه‌شان از یک نقطه انتهایی به نقطه انتهایی دیگر راه می‌روند. مزیت این اندازه گیری نسبت به اندازه گیری‌های دیگر مانند فاصله هاسدورف این است که این فاصله ترتیب نقاط در امتداد منحنی‌ها را در نظر می‌گیرد. فاصله فرشه گسسته، سگ و صاحبش را با یک جفت قورباغه که فقط می‌توانند روی m و n سنگ‌ریزه مشخص شده روی A و B حرکت کنند، عوض می‌کند. این قورباغه‌ها از یک سنگ‌ریزه به روی دیگری بدون بازگشت به عقب می‌پرند. فاصله فرشه می‌تواند با یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویای با مرتبه زمانی نسبتا سرراست مربعی نسبت به اندازه مجموعه بزرگ‌تر از نظر تعداد نقاط، محاسبه شود. در این پایان‌نامه، ما یک الگوریتم زیرمربعی را برای محاسبه فاصله فرشه گسسته بین دو دنباله A و B از نقاط روی صفحه، با تعداد نقاط متناظر m و n مطالعه می‌کنیم. الگوریتم در زمان $O(\frac{mn\log\log n}{\log n})$ با شرط $m \leq n$ اجرا می‌شود و از فضای $O(m+n)$ استفاده می‌کند. روش مطالعه شده، هندسه مساله را در یک راه دقیق برای رمز کردن موقعیت‌های قانونی قورباغه‌ها به عنوان حالت‌های یک اتوماتای متناهی استفاده می‌کند.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

جدول نمادها

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مفاهیم

توصیف عددی دور بودن دو شیی از هم فاصله نامیده می‌شود. در فیزیک یا هر بحث روزمره، فاصله به طول فیزیکی یا یک تقریب بر اساس معیارهایی گفته می‌شود (برای مثال، فاصله دو شهر از هم). در ریاضیات، یک تابع فاصله یا متر، تعمیمی از مفهوم فاصله فیزیکی است. متر تابعی است که بر اساس مجموعه‌ای از قوانین خاص رفتار می‌کند و یک راه برای توصیف مفهوم نزدیک یا دور بودن عناصر یک فضا از هم است.

اندازه‌گیری همسانی بین دو شیئ هندسی یک مساله اساسی در زمینه‌های بسیاری از علوم و مهندسی می‌باشد. اگرچه برای مهیا کردن چنین مقایسه‌هایی، یک معیار خوب برای فرمول‌بندی قابل درک از همسانی لازم می‌باشد. درمیان تعداد زیادی از معیارهایی که مطرح شده است، فاصله فرشه[۱] به عنوان یک انتخاب محبوب و قدرتمند، به‌خصوص زمانی که شیئ‌ها منحنی هستند، پدیدار شده است.

۱.۱.۱ شرح مساله

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید A و B دو دنباله به شکل $A = (a_۱, \ldots, a_m)$ و $B = (b_۱, \ldots, b_n)$، به ترتیب متشکل از m و n نقطه روی صفحه باشند. فرض کنید G_δ یک گراف با مجموعه رئوس ضرب دکارتی $A \times B$ و مجموعه یال‌های:

$$E_\delta = \{((a_i, b_j), (a_{i+۱}, b_j)) \,|\, \|a_i - b_j\| \leq \delta \text{ و } \|a_{i+۱} - b_j\| \leq \delta\} \bigcup$$
$$\{((a_i, b_j), (a_i, b_{j+۱})) \,|\, \|a_i - b_j\| \leq \delta \text{ و } \|a_i - b_{j+۱}\| \leq \delta\}$$

باشد، که در آن δ یک مقدار مثبت است. در اینجا $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی در نظر گرفته شده است. فاصله فرشه گسسته[۲] $\delta_{dF}(A, B)$ بین A و B کوچک‌ترین $\delta > ۰$ای است به طوری که (a_m, b_n) و $(a_۱, b_۱)$ در گراف G_δ در یک مولفه همبندی باشد.

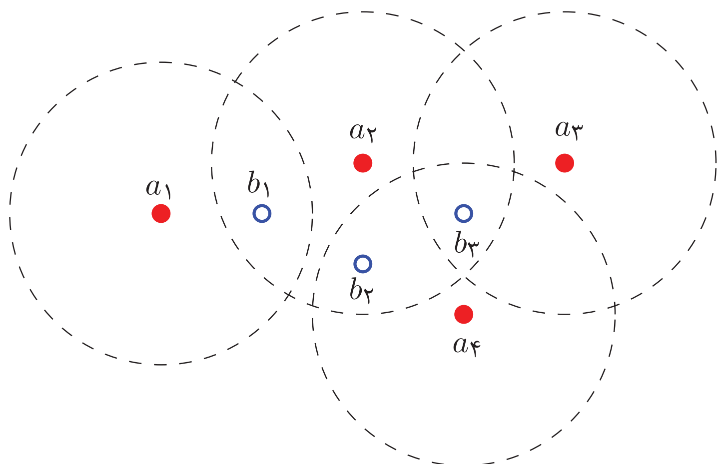
به طور غیررسمی، A و B را دو دنباله از سنگ‌ها، و دو قورباغه، $A - Frog$ و $B - Frog$ را، به گونه‌ای که $A - Frog$ باید تمام سنگ‌های دنباله A و $B - Frog$ باید تمام سنگ‌های دنباله B به ترتیب ملاقات

[۱] Fréchet Distance

[۲] Discrete Fréchet Distance

کند، در نظر بگیرید. قورباغه‌ها با یک طناب به طول δ به هم وصل هستند، و در ابتدا قورباغه $A-Frog$ روی $a_۱$ و قورباغه $B-Frog$ روی $b_۱$ قرار گرفته‌اند. در هر حرکت، دقیقاً یکی از قورباغه‌ها می‌تواند از سنگ فعلی خود روی سنگ بعدی بپرد، که این می‌تواند انجام شود اگر و فقط اگر فاصله‌هایش با قورباغه دیگر، قبل و بعد از پریدن، هر دو حداکثر δ باشد.

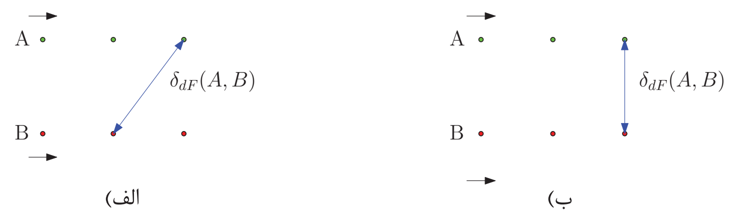
مثال ۲.۱.۱ شکل ۱.۱ مثالی از یک دنباله شدنی از پرش‌های دو قورباغه را نشان می‌دهد. سنگ‌هایی که $A-Frog$ باید روی آن‌ها بپرد، نقاط توپر، و سنگ‌هایی که $B-Frog$ باید روی آن‌ها بپرد، نقاط توخالی می‌باشند. دایره‌ها با شعاع δ به مرکزیت نقاط دنباله A قرار گرفته‌اند. در این مثال، یک مسیر قابل قبول از دو قورباغه، $((a_۱, b_۱), (a_۲, b_۱), (a_۲, b_۲), (a_۲, b_۳), (a_۳, b_۳), (a_۴, b_۳))$ می‌باشد.



شکل ۱.۱: مثالی از پرش‌های قابل قبول دو قورباغه.

با توجه به تعریف، $\delta_{dF}(A,B)$ کوچک‌ترین $\delta > ۰$ای است که حداقل یک دنباله از پرش‌ها که قورباغه‌ها را به (a_m, b_n) می‌رساند، وجود داشته باشد (در نظر بگیرید که قورباغه‌ها نمی‌توانند به عقب برگردند).

ملاحظه ۳.۱.۱ در این فرمول‌بندی پریدن هم‌زمان قورباغه‌ها از یک مکان (a_i, b_j) به مکان دیگر $(a_{i+۱}, b_{j+۱})$ ممنوع شده است. اگرچه الگوریتم می‌تواند اصلاح شود، به گونه‌ای که در نسخه جدید حرکت‌های "قطری" نیز اتفاق بیافتد. حرکت‌های هم‌زمان ممکن است باعث کاهش فاصله فرشه شوند (برای واضح‌تر شدن می‌توانید شکل ۲.۱ را ملاحظه نمایید).



شکل ۲.۱: پرش هم‌زمان دو قورباغه ممکن است باعث کاهش فاصله فرشه گسسته شود. الف) - بدون پرش هم‌زمان، ب) با پرش هم‌زمان.

۲.۱.۱ فاصله فرشه پیوسته

مساله فاصله فرشه گسسته، یک نسخه از فاصله فرشه پیوسته[۳] (استاندارد) می‌باشد. به طور غیررسمی، یک شخص و سگش را در نظر بگیرید به گونه‌ای که سگ با یک قلاده به صاحبش وصل شده است. هر کدام از این دو روی یک مسیر (منحنی) از نقطه ابتدای آن تا انتهایش در حال حرکت می‌باشد. هر دوی آن‌ها اجازه دارند که سرعت خود را کنترل کنند، ولی نمی‌توانند به عقب برگردند. فاصله فرشه بین دو منحنی، طول کوتاه‌ترین قلاده‌ای است که امکان طی کردن دو منحنی وجود داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ یک پارامترسازی مجدد α از $[۰,۱]$، یک تابع پیوسته غیرنزولی پوشای $\alpha : [۰,۱] \to [۰,۱]$ است.

تعریف ۵.۱.۱ یک فضای متریک S را در نظر بگیرید. یک منحنی f در S یک نگاشت پیوسته از بازه واحد $[۰,۱]$ به S است.

دو منحنی داده شده f و g واقع در S را در نظر بگیرید. فاصله فرشه $\delta_F(f,g)$ بین دو منحنی f و g در نوشتار ریاضی بدین‌گونه تعریف می‌شود:

$$\delta_F(f,g) = \inf_{\alpha,\beta} \max_{t\in[۰,۱]} \{\|f(\alpha(t)) - g(\beta(t))\|\},$$

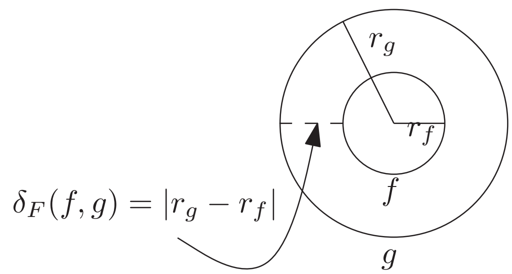
که در آن $\|\cdot\|$ نرم مربوطه می‌باشد (به طور معمول، نرم اقلیدسی)، و α و β پارامترسازی مجدد $[۰,۱]$ می‌باشند.

به طور غیررسمی، می‌توانیم پارامتر t را به عنوان زمان در نظر بگیریم. با این حساب، $f(\alpha(t))$ موقعیت سگ روی منحنی f، و $g(\beta(t))$ موقعیت شخص روی منحنی g (یا بالعکس، سگ روی منحنی g و شخص

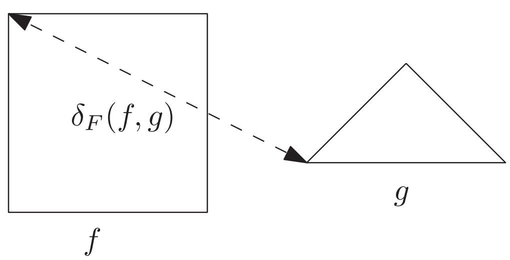
[۳] Continuous Fréchet Distance

روی منحنی f) در زمان t نشان می‌دهد. طول قلاده بین آن‌ها در زمان t، فاصله بین $f(\alpha(t))$ و $g(\beta(t))$ می‌باشد. انتخاب پایین‌ترین[۴] از بین تمام پارامترسازی‌های مجدد [۰, ۱] به معنای انتخاب مسیری از بین تمام مسیرهای ممکن است، به طوری که بیش‌ترین طول مورد نیاز برای حرکت، کمینه شده است. مقید کردن α و β به غیرنزولی بودن، بدین معنا است که، نه سگ و نه صاحبش نمی‌توانند به عقب برگردند.

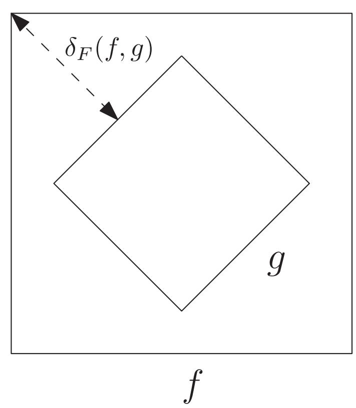
مثال ۶.۱.۱ شکل ۳.۱ مثال‌هایی از فاصله فرشه پیوسته بین اشکال مختلف را نشان می‌دهد. باید توجه داشت که برای محاسبه فاصله فرشه بین منحنی‌های بسته، در سناریوی شخص و سگ، هر دو اجازه دارند که علاوه بر تغییر سرعت، نقطه بهینه را برای شروع روی مسیرها (منحنی) انتخاب کنند [۶].



(آ) فاصله فرشه بین دو دایره هم‌مرکز.



(ب) فاصله فرشه بین یک مربع و یک مثلث.



(ج) فاصله فرشه بین مربع و لوزی هم‌مرکز.

شکل ۳.۱: مثال‌هایی از فاصله فرشه پیوسته.

۳.۱.۱ فاصله فرشه نیمه‌پیوسته

یک نفر ممکن است نسخه ترکیبی از مساله را در نظر بگیرد. در این حالت یک شخص و یک قورباغه به وسیله یک طناب به هم وصل شده‌اند، به صورتی‌که شخص روی یک مسیر (منحنی) در حال حرکت می‌باشد ولی

[۴] Infimum

قورباغه روی نقاط مشخص شده از مسیر دیگر می‌پرد. به این نسخه از مساله، فاصله فرشه نیمه‌پیوسته[۵] گفته می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱ یک منحنی $f : \mathbb{R}^۲ \rightarrow \mathbb{R}^۲$ و یک دنباله $B = \{b_۱, \dots, b_n\}$ متشکل از n نقطه داریم. هدف این است که کوچک‌ترین $\delta > ۰$ای را پیدا کنیم که بتوان f را به n کمان (دو به دو متمایز) $f_۱, \dots, f_n$ تقسیم کرد، به طوری که فاصله $b_i \in B$ از هر نقطه f_i برای $i = ۱, \dots, n$ حداکثر δ باشد. در این وضع، برای هر $i = ۱, \dots, n$، شخص در امتداد f_i از نقطه آغازین تا انتهایی حرکت می‌کند، در حالی‌که قورباغه در b_i مانده است. زمانی‌که شخص به نقطه انتهایی f_i می‌رسد، قورباغه به روی $b_{i+۱}$ می‌پرد. آن دو این حرکت را تا زمانی‌که تمام f و B پیموده شود، ادامه می‌دهند.

ملاحظه ۸.۱.۱ هر سه نسخه از فاصله فرشه به وضوح می‌تواند به هر بُعد[۶] $d > ۲$ تعمیم یابد، اما در این پایان‌نامه فقط مورد صفحه را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۴.۱.۱ فاصله بین مجموعه‌ها، و یک نقطه و یک مجموعه

دو تعریف متداول برای فاصله بین دو مجموعه غیرتهی موجود می‌باشد:

- یک نسخه از فاصله بین دو مجموعه غیرتهی، کوچک‌ترین فاصله بین هر دو نقطه متناظر از دو مجموعه می‌باشد، که معنای روزمره از کلمه می‌باشد، یعنی

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

  که در این‌جا $d(x, y)$ را می‌توان فاصله اقلیدسی در نظر گرفت.

- فاصله هاوسدورف مقدار بزرگ‌تر از بین دو مقدار را در نظر می‌گیرد، که یکی بزرگ‌ترین برای یک نقطه روی محدوده یک مجموعه، از کوچک‌ترین، برای نقطه‌ای که روی محدوده مجموعه دیگر قرار گرفته، روی فاصله بین نقاط است، و دیگری شبیه چیزی است که برای مقدار اول گفته شد، با این تفاوت که نقش مجموعه‌ها با هم عوض شده است.

[۵] Semi-Continuous Fréchet Distance

[۶] Dimension

فاصله بین یک نقطه و یک مجموعه، کوچک‌ترین فاصله بین آن نقطه و نقطه‌های داخل مجموعه است. این مطابق است با فاصله‌ای که در بالا، در تعریف اول برای فاصله دو مجموعه ذکر شد، در این حالت یکی از مجموعه‌ها دارای یک عضو است.

۵.۱.۱ فاصله فرشه در مقایسه با فاصله هاوسدورف

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید A و B دو مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^d$ باشند. فاصله هاوسدورف جهت‌دار[۷] از A به B به صورت زیر تعریف می‌شود :

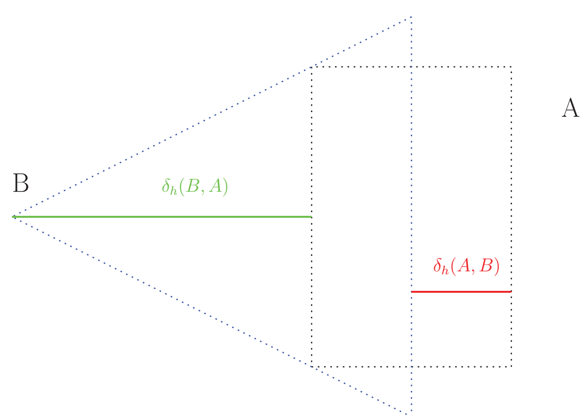
$$\delta_h(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,$$

و فاصله هاوسدورف بین A و B نیز به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\delta_H(A,B) = \max\{\delta_h(A,B), \delta_h(B,A)\}.$$

در این‌جا $\|\cdot\|$ نرم مربوطه می‌باشد. به طور شهودی، تابع $\delta_h(A,B)$ یک نقطه $a\in A$ را که دارای بیش‌ترین فاصله از هر نقطه در B می‌باشد پیدا کرده، و فاصله بین a و نزدیک‌ترین همسایه‌اش در B را اندازه‌گیری می‌کند.

مثال ۱۰.۱.۱ شکل ۴.۱ یک مثال از فاصله هاوسدورف جهت‌دار بین دو مجموعه نقاط A و B را نشان می‌دهد. در این شکل مجموعه نقاط A با چینشی به شکل مستطیل، و مجموعه نقاط B با چینشی به شکل مثلث نشان داده شده است.



شکل ۴.۱: مثالی از فاصله هاوسدورف جهت‌دار.

[۷] Directed Hausdorff distance