

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه علوم کامپیوتر

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

علوم کامپیوتر

محاسبه فاصله فرشه گسسته در زمان زیرمربعی

استاد راهنما:

دکتر محمد فرشی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش گر:

سعید ریخته گر غیائی

مهر ۱۳۹۲

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه / رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه / رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه / رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

سپاس‌گزاری

سپاس خداوند یکتای عزتمندی که رحمت و دانش او در سراسر گیتی گسترده شده، آسمان‌ها و زمین همه از آن اوست و علم و دانش حقیقی را بر هر که بخواهد موهبت می‌فرماید. رحمت و لطف او را بی‌نهایت سپاس می‌گوییم چرا که فهم و درک مطالب این پژوهش را بر من ارزانی داشت و مرا به این اصل رساند که علم و ایمان دو بال یک پروازند. توفیق تلاش به من داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی تازه را آغاز کنم و به خواست او به نتیجه‌ی مطلوب نائل آیم. به‌راستی که همه چیز از آن اوست و همه‌چیز به خواست اوست.

چکیده

فاصله فرشه یک معیار اندازه‌گیری تشابه بین دو منحنی A و B است. به طور غیر رسمی، فاصله فرشه بین دو منحنی A و B طول کوتاه‌ترین فلاده‌ای است که برای وصل کردن یک سنگ، که در امتداد A ، و صاحبش، در امتداد B ، حرکت می‌کنند، لازم است، به گونه‌ای که آن‌ها بدون بازگشت به عقب در امتداد منحنی‌های مربوطه‌شان از یک نقطه انتهایی به نقطه انتهایی دیگر راه می‌روند. مزیت این اندازه‌گیری نسبت به اندازه‌گیری‌های دیگر مانند فاصله هاسدورف این است که این فاصله ترتیب نقاط در امتداد منحنی‌ها را در نظر می‌گیرد. فاصله فرشه گسسته، سنگ و صاحبش را با یک جفت قورباغه که فقط می‌توانند روی m و n سنگ‌ریزه مشخص شده روی A و B حرکت کنند، عوض می‌کند. این قورباغه‌ها از یک سنگ‌ریزه به روی دیگری بدون بازگشت به عقب می‌پروند. فاصله فرشه می‌تواند با یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویای با مرتبه زمانی نسبتاً سراسر است مربعی نسبت به اندازه مجموعه بزرگ‌تر از نظر تعداد نقاط، محاسبه شود. در این پایان‌نامه، ما یک الگوریتم زیرمربعی را برای محاسبه فاصله فرشه گسسته بین دو دنباله A و B از نقاط روی صفحه، با تعداد نقاط متناظر m و n مطالعه می‌کنیم. الگوریتم در زمان $O\left(\frac{mn \log \log n}{\log n}\right)$ با شرط $m \leq n$ اجرا می‌شود و از فضای $O(m+n)$ استفاده می‌کند. روش مطالعه شده، هندسه مساله را در یک راه دقیق برای رمز کردن موقعیت‌های قانونی قورباغه‌ها به عنوان حالت‌های یک اتوماتای متناهی استفاده می‌کند.

فهرست مطالب

چ	جدول نمادها
۱	۱ مقدمات
۲	۱.۱ مفاهیم
۲	۱.۱.۱ شرح مساله
۴	۲.۱.۱ فاصله فرشه پیوسته
۵	۳.۱.۱ فاصله فرشه نیمه پیوسته
۶	۴.۱.۱ فاصله بین مجموعه‌ها، و یک نقطه و یک مجموعه
۷	۵.۱.۱ فاصله فرشه در مقایسه با فاصله هاوسدورف
۸	۶.۱.۱ تقریب فاصله فرشه پیوسته به وسیله فاصله فرشه گسسته
۱۲	۲.۱ تاریخچه
۱۴	۳.۱ نسخه‌های دیگر فاصله فرشه
۱۵	۱.۳.۱ فاصله فرشه ضعیف
۱۶	۲.۳.۱ فاصله فرشه مجموعه‌ای از منحنی‌ها
۱۶	۳.۳.۱ فاصله فرشه میانگین و فاصله فرشه مجموع
۱۸	۴.۱ برخی ابزارهای لازم از نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها
۱۸	۱.۴.۱ اتوماتای متناهی
۱۹	۲.۴.۱ اتوماتای متناهی قطعی
۲۱	۳.۴.۱ اتوماتای متناهی غیرقطعی

۲۳	مبدل	۴.۴.۱
۲۴	برخی تعریف‌های لازم از هندسه محاسباتی	۵.۱
۲۴	راس، وجه و یال	۱.۵.۱
۲۵	چندضلعی‌ای یکنوا نسبت به یک خط	۲.۵.۱
۲۶	برنامه‌ریزی پویا	۶.۱
۲۶	اصل بهینگی	۱.۶.۱
۲۷	زیرسازه بهینه	۲.۶.۱
۲۷	زیرمساله‌های هم‌پوشان	۳.۶.۱
۲۹		روند تصمیم‌گیری	۲
۳۰	طرح مختصری از روند تصمیم‌گیری	۱.۲
۳۴	پردازش یک بلوک از A	۲.۲
۳۷	تفسیر یک اتوماتای متناهی قطعی	۱.۲.۲
۴۱	طراحی یک اتوماتای متناهی قطعی کارآمد	۲.۲.۲
۴۴	پردازش یک لایه از A	۳.۲
۴۸	روند کلی	۴.۲
۵۱		محاسبه فاصله فرشه گسسته	۳
۵۲	محاسبه فاصله فرشه گسسته	۱.۳
۵۳	انتخاب k -امین کوچک‌ترین فاصله	۲.۳
۵۴	جست‌وجوی پارامتری	۱.۲.۳
۵۵	مساله رتبه‌بندی	۲.۲.۳
۵۵	یک الگوریتم رتبه‌بندی ساده	۳.۳
۵۷	یک الگوریتم ترتیبی	۱.۳.۳
۵۸	یک بهبود آسان برای الگوریتم	۲.۳.۳
۶۰	محاسبه k -امین فاصله	۴.۳

۶۳	۴	یک کران پایین نمایی برای تعداد حالات
۶۴	۱.۴	بررسی تعداد حالات
۶۹	۵	نتیجه‌گیری
۷۱		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۵		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۷۹		مراجع

لیست تصاویر

- ۱.۱ مثالی از پرش‌های قابل قبول دو قورباغه. ۳
- ۲.۱ پرش هم‌زمان دو قورباغه ممکن است باعث کاهش فاصله فرشه گسسته شود. الف) - بدون پرش هم‌زمان، ب) با پرش هم‌زمان. ۴
- ۳.۱ مثال‌هایی از فاصله فرشه پیوسته. ۵
- ۴.۱ مثالی از فاصله هاوسدورف جهت‌دار. ۷
- ۵.۱ مثالی از فاصله هاوسدورف و عدم همسانی دو منحنی. ۸
- ۶.۱ مثالی از فاصله هاوسدورف و فاصله فرشه بین دو منحنی. ۸
- ۷.۱ مثالی از تقریب فاصله فرشه پیوسته به وسیله فاصله فرشه گسسته. در دو شکل (I) و (II) ، خط نقطه‌چین فاصله فرشه گسسته و خط پیکان دار فاصله فرشه پیوسته را نشان می‌دهد. شکل (II) دارای تعداد نقاط نمونه زیادی روی دو منحنی می‌باشد، در شکل (I) تعداد نقاط نمونه نسبت به شکل (II) کم‌تر می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود تعداد کافی نقاط نمونه باعث تقریب بهتر فاصله فرشه پیوسته به وسیله فاصله فرشه گسسته می‌شود. ۹
- ۸.۱ نمودار فضای آزاد بین دو منحنی P و Q برای یک ϵ مشخص. این نمودار با استفاده از یک اپلت جاوا ایجاد شده است [۲۷]. ۱۵
- ۹.۱ بازگشت به عقب ممکن است باعث کاهش فاصله فرشه شود. فاصله فرشه ضعیف بین دو منحنی P و Q با $\delta_{wF}(P, Q)$ و فاصله فرشه با $\delta_F(P, Q)$ نشان داده شده است. ۱۵
- ۱۰.۱ در شکل ملاحظه می‌شود که $\delta_F(f_1, f_2) = \delta_F(f_2, f_3) = \epsilon$ ولی منحنی f_2 بیش‌تر شبیه منحنی f_3 می‌باشد. ۱۷
- ۱۱.۱ اجزای اصلی یک اتوماتون متناهی. ۲۰

۲۰	مثالی از جدول مربوط به تابع انتقال یک اتوماتون متناهی قطعی.	۱۲.۱
۲۱	مثالی از گراف یک اتوماتون متناهی قطعی.	۱۳.۱
۲۲	مثالی از جدول مربوط به تابع انتقال یک اتوماتون متناهی غیرقطعی.	۱۴.۱
۲۳	مثالی از گراف یک اتوماتون متناهی غیرقطعی.	۱۵.۱
۲۴	مثالی از گراف یک مبدل.	۱۶.۱
۱۷.۱	نمایش راس، وجه و یال در یک زیرتقسیم مسطح. a ، b و c به ترتیب نشان دهنده راس، وجه و یال می‌باشند.	
۲۵		
۱۸.۱	چندضلعی یکنوا نسبت به خط l .	
۱۹.۲	بخش‌بندی ماتریس M به نوارهای افقی (و زیرنوارها)، که متناظر با لایه‌های (و بلوک‌های) دنباله A می‌باشد. دنباله B به زیردنباله‌هایی به طول τ تقسیم شده است، که هر زیردنباله از B متناظر با یک نماد Σ_i است که اتوماتون K^* پردازش می‌کند.	
۲۲	مثالی برای نشان دادن مفاهیم ایجاد یک اتوماتا.	۲۰.۲
۳۲	جدول مربوط به تابع انتقال مبدل.	۳۰.۲
۴۰	آرایه بیتی مشخص کننده Σ_k . در این شکل تعداد τ وجه f که هر کدام دارای β بیت هستند، و پرچم‌های متناظر با وجه‌ها در کنار هم و با Φ_k نشان داده شده است (تعداد τ پرچم دودویی وجود دارد).	
۴۱		
۴۴		
۵۷	تجزیه عمودی آرایشی از دایره‌ها.	۱۳.۳
۱.۴	یک پیکره‌بندی از دایره‌ها با تعداد نمایی از حالات. دایره‌های قرمز به صورت پیوسته، و دایره‌های آبی به صورت خط‌چین نشان داده شده‌اند.	
۶۵		

جدول نمادها

صفحه	توضیح	نماد
۲	فاصله فرشه گسسته بین دو دنباله A و B	$\delta_{dF}(A, B)$
۴	فاصله فرشه بین دو منحنی f و g	$\delta_F(f, g)$
۷	فاصله هاسدورف جهت‌دار بین دو مجموعه A و B	$\delta_h(A, B)$
۷	فاصله هاسدورف بین دو مجموعه A و B	$\delta_H(A, B)$
۳۴	گراف جهت‌دار G با توجه به δ	G_δ
۲	مجموعه یال‌های G با توجه به δ	E_δ
۲۲	گراف G مربوط به اتوماتون M	$G(M)$
۲۳	گراف G مربوط به مبدل T	$G(T)$
۳۴	دنباله دایره‌ها	\mathcal{D}
۳۴	آرایش متناظر با دایره‌ها	\mathcal{A}
۴۱	آرایش بهبود یافته متناظر با دایره‌ها	\mathcal{A}^*
۳۴	زیرمجموعه‌ای از دایره‌هایی که شامل وجه f می‌باشند	\mathcal{D}_f
۳۷	یک وجه از $\mathcal{A}(\mathcal{D})$	f
۳۷	یک وجه از $\mathcal{A}(\mathcal{D})$	f_i
۳۷	یک وجه از $\mathcal{A}(\mathcal{D})$	g
۳۸	یک وجه از $\mathcal{A}(\mathcal{D})$	g_i
۳۷	رشته‌ای شامل n وجه	F
۳۷	زیررشته‌ای به طول τ از F	F_k
۳۷	یک پرچم دودویی	φ
۳۷	یک پرچم دودویی	φ_i
۳۷	رشته‌ای شامل n پرچم	Φ
۳۸	زیررشته‌ای به طول τ از Φ	Φ_k
۳۸	یک جفت (f, φ) از یک وجه f و یک پرچم دودویی φ	σ

۳۸.....	رشته‌ای شامل n جفت σ	Σ
۳۸.....	یک زیر رشته شامل τ جفت σ از Σ	Σ_k
۳۷.....	اتوماتای متناهی قطعی	\mathcal{K}
۴۱.....	اتوماتای متناهی قطعی کارآمد	\mathcal{K}^*
۴۳.....	جدول انتقال \mathcal{K}^*	\mathcal{T}
۵۴.....	یک مساله	$\mathcal{P}(d)$
۵۴.....	الگوریتم ترتیبی	A_s
۵۵.....	بیشترین تعداد مقایسه‌ها	C_s
۵۵.....	زمان اجرای الگوریتم A_s	T_s
۵۵.....	الگوریتم موازی	A_p
۵۵.....	تعداد گام موازی	T_P
۵۵.....	تعداد جفت نقاط روی سطح با فاصله کم‌تر از d	$\mathcal{N}(d)$
۵۶.....	مجموعه‌ای از دایره‌ها	\mathcal{D}
۵۶.....	مجموعه‌ای از نقاط	\mathcal{P}
۵۶.....	تعداد جفت‌هایی از مجموعه $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ با شرایط خاص	$\mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$
۵۶.....	آرایی از دایره‌ها	$\mathcal{A}(\mathcal{D})$
۵۶.....	تجزیه عمودی از دایره‌ها	$\mathcal{A}^*(\mathcal{D})$
۵۷.....	نقشه سطحی	\mathcal{M}

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مفاهیم

توصیف عددی دور بودن دو شیئی از هم فاصله نامیده می‌شود. در فیزیک یا هر بحث روزمره، فاصله به طول فیزیکی یا یک تقریب بر اساس معیارهایی گفته می‌شود (برای مثال، فاصله دو شهر از هم). در ریاضیات، یک تابع فاصله یا متر، تعمیمی از مفهوم فاصله فیزیکی است. متر تابعی است که بر اساس مجموعه‌ای از قوانین خاص رفتار می‌کند و یک راه برای توصیف مفهوم نزدیک یا دور بودن عناصر یک فضا از هم است.

اندازه‌گیری همسانی بین دو شیئی هندسی یک مساله اساسی در زمینه‌های بسیاری از علوم و مهندسی می‌باشد. اگرچه برای مهیا کردن چنین مقایسه‌هایی، یک معیار خوب برای فرمول‌بندی قابل درک از همسانی لازم می‌باشد. درمیان تعداد زیادی از معیارهایی که مطرح شده است، فاصله فرشه^۱ به عنوان یک انتخاب محبوب و قدرتمند، به خصوص زمانی که شیئی‌ها منحنی هستند، پدیدار شده است.

۱.۱.۱ شرح مساله

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید A و B دو دنباله به شکل $A = (a_1, \dots, a_m)$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ به ترتیب متشکل از m و n نقطه روی صفحه باشند. فرض کنید G_δ یک گراف با مجموعه رئوس ضرب دکارتی $A \times B$ و مجموعه یال‌های:

$$E_\delta = \left\{ ((a_i, b_j), (a_{i+1}, b_j)) \mid \|a_i - b_j\| \leq \delta \text{ و } \|a_{i+1} - b_j\| \leq \delta \right\} \cup \\ \left\{ ((a_i, b_j), (a_i, b_{j+1})) \mid \|a_i - b_j\| \leq \delta \text{ و } \|a_i - b_{j+1}\| \leq \delta \right\}$$

باشد، که در آن δ یک مقدار مثبت است. در اینجا $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی در نظر گرفته شده است. فاصله فرشه گسسته^۲ $\delta_{dF}(A, B)$ بین A و B کوچک‌ترین $\delta > 0$ ای است به طوری که (a_m, b_n) و (a_1, b_1) در گراف G_δ در یک مولفه همبندی باشد.

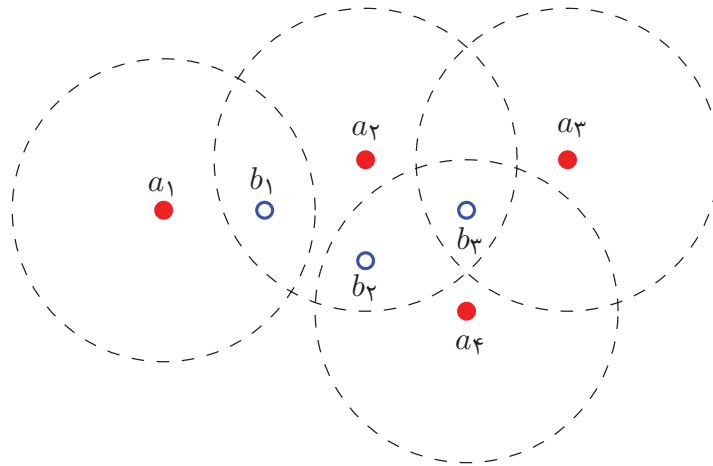
به طور غیررسمی، A و B را دو دنباله از سنگ‌ها، و دو قورباغه، $A - Frog$ و $B - Frog$ را، به گونه‌ای که $A - Frog$ باید تمام سنگ‌های دنباله A و $B - Frog$ باید تمام سنگ‌های دنباله B به ترتیب ملاقات

^۱Fréchet Distance

^۲Discrete Fréchet Distance

کند، در نظر بگیرید. قورباغه‌ها با یک طناب به طول δ به هم وصل هستند، و در ابتدا قورباغه $A - Frog$ روی a_1 و قورباغه $B - Frog$ روی b_1 قرار گرفته‌اند. در هر حرکت، دقیقاً یکی از قورباغه‌ها می‌تواند از سنگ فعلی خود روی سنگ بعدی بپرد، که این می‌تواند انجام شود اگر و فقط اگر فاصله‌هایش با قورباغه دیگر، قبل و بعد از پریدن، هر دو حداکثر δ باشد.

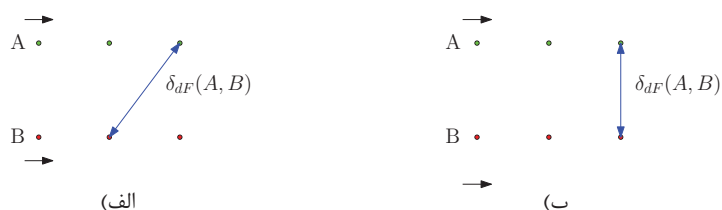
مثال ۲.۱.۱ شکل ۱.۱ مثالی از یک دنباله شدنی از پرش‌های دو قورباغه را نشان می‌دهد. سنگ‌هایی که $A - Frog$ باید روی آن‌ها بپرد، نقاط توپر، و سنگ‌هایی که $B - Frog$ باید روی آن‌ها بپرد، نقاط توخالی می‌باشند. دایره‌ها با شعاع δ به مرکزیت نقاط دنباله A قرار گرفته‌اند. در این مثال، یک مسیر قابل قبول از دو قورباغه، $((a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_4, b_3))$ می‌باشد.



شکل ۱.۱: مثالی از پرش‌های قابل قبول دو قورباغه.

با توجه به تعریف، $\delta_{dF}(A, B)$ کوچک‌ترین $\delta > 0$ ای است که حداقل یک دنباله از پرش‌ها که قورباغه‌ها را به (a_m, b_n) می‌رساند، وجود داشته باشد (در نظر بگیرید که قورباغه‌ها نمی‌توانند به عقب برگردند).

ملاحظه ۳.۱.۱ در این فرمول‌بندی پریدن هم‌زمان قورباغه‌ها از یک مکان (a_i, b_j) به مکان دیگر (a_{i+1}, b_{j+1}) ممنوع شده است. اگرچه الگوریتم می‌تواند اصلاح شود، به گونه‌ای که در نسخه جدید حرکت‌های "قطری" نیز اتفاق بیافتند. حرکت‌های هم‌زمان ممکن است باعث کاهش فاصله فرشه شوند (برای واضح‌تر شدن می‌توانید شکل ۲.۱ را ملاحظه نمایید).



شکل ۲.۱: پرش همزمان دو قورباغه ممکن است باعث کاهش فاصله فرشه گسسته شود. الف) - بدون پرش همزمان، ب) با پرش همزمان.

۲.۱.۱ فاصله فرشه پیوسته

مساله فاصله فرشه گسسته، یک نسخه از فاصله فرشه پیوسته^۳ (استاندارد) می‌باشد. به طور غیررسمی، یک شخص و سگش را در نظر بگیرید به گونه‌ای که سگ با یک قلاده به صاحبش وصل شده است. هر کدام از این دو روی یک مسیر (منحنی) از نقطه ابتدای آن تا انتهایش در حال حرکت می‌باشد. هر دوی آنها اجازه دارند که سرعت خود را کنترل کنند، ولی نمی‌توانند به عقب برگردند. فاصله فرشه بین دو منحنی، طول کوتاه‌ترین قلاده‌ای است که امکان طی کردن دو منحنی وجود داشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ یک پارامترسازی مجدد α از $[0, 1]$ ، یک تابع پیوسته غیرنزولی پوشای $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ است.

تعریف ۵.۱.۱ یک فضای متریک S را در نظر بگیرید. یک منحنی f در S یک نگاشت پیوسته از بازه واحد $[0, 1]$ به S است.

دو منحنی داده شده f و g واقع در S را در نظر بگیرید. فاصله فرشه $\delta_F(f, g)$ بین دو منحنی f و g در نوشتار ریاضی بدین‌گونه تعریف می‌شود:

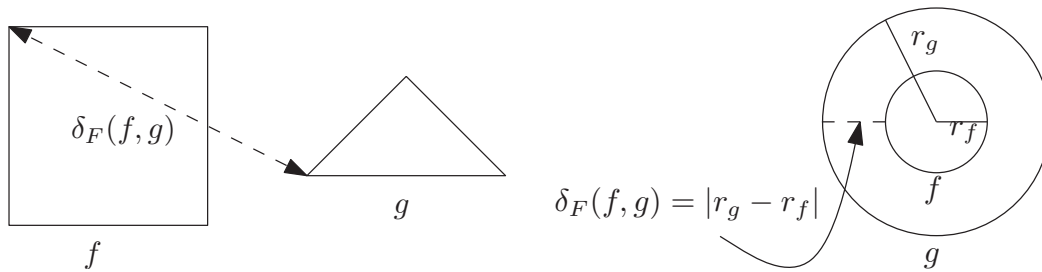
$$\delta_F(f, g) = \inf_{\alpha, \beta} \max_{t \in [0, 1]} \{ \|f(\alpha(t)) - g(\beta(t))\| \},$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم مربوطه می‌باشد (به طور معمول، نرم اقلیدسی)، و α و β پارامترسازی مجدد $[0, 1]$ می‌باشند. به طور غیررسمی، می‌توانیم پارامتر t را به عنوان زمان در نظر بگیریم. با این حساب، $f(\alpha(t))$ موقعیت سگ روی منحنی f ، و $g(\beta(t))$ موقعیت شخص روی منحنی g (یا بالعکس، سگ روی منحنی g و شخص

^۳Continuous Fréchet Distance

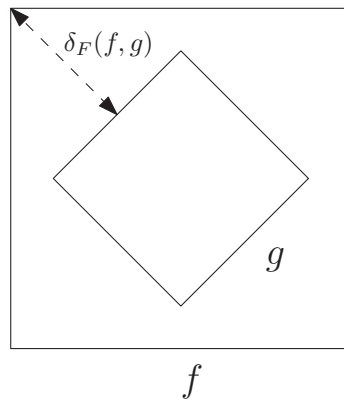
روی منحنی f در زمان t نشان می‌دهد. طول قلاده بین آن‌ها در زمان t ، فاصله بین $f(\alpha(t))$ و $g(\beta(t))$ می‌باشد. انتخاب پایین‌ترین^۴ از بین تمام پارامترسازی‌های مجدد $[0, 1]$ به معنای انتخاب مسیری از بین تمام مسیرهای ممکن است، به طوری که بیش‌ترین طول مورد نیاز برای حرکت، کمینه شده است. مقید کردن α و β به غیرنزولی بودن، بدین معنا است که، نه سگ و نه صاحبش نمی‌توانند به عقب برگردند.

مثال ۶.۱.۱ شکل ۳.۱ مثال‌هایی از فاصله فرشه پیوسته بین اشکال مختلف را نشان می‌دهد. باید توجه داشت که برای محاسبه فاصله فرشه بین منحنی‌های بسته، در سناریوی شخص و سگ، هر دو اجازه دارند که علاوه بر تغییر سرعت، نقطه بهینه را برای شروع روی مسیرها (منحنی) انتخاب کنند [۶].



(ب) فاصله فرشه بین یک مربع و یک مثلث.

(آ) فاصله فرشه بین دو دایره هم‌مرکز.



(ج) فاصله فرشه بین مربع و لوزی هم‌مرکز.

شکل ۳.۱: مثال‌هایی از فاصله فرشه پیوسته.

۳.۱.۱ فاصله فرشه نیمه پیوسته

یک نفر ممکن است نسخه ترکیبی از مساله را در نظر بگیرد. در این حالت یک شخص و یک قورباغه به وسیله یک طناب به هم وصل شده‌اند، به صورتی که شخص روی یک مسیر (منحنی) در حال حرکت می‌باشد ولی

^۴Infimum

قورباغه روی نقاط مشخص شده از مسیر دیگر می‌پرد. به این نسخه از مساله، فاصله فرشه نیمه‌پیوسته^۵ گفته می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱ یک منحنی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و یک دنباله $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ متشکل از n نقطه داریم. هدف این است که کوچک‌ترین $\delta > 0$ ای را پیدا کنیم که بتوان f را به n کمان (دو به دو متمایز) f_1, \dots, f_n تقسیم کرد، به طوری که فاصله $b_i \in B$ از هر نقطه f_i برای $i = 1, \dots, n$ حداکثر δ باشد. در این وضع، برای هر $i = 1, \dots, n$ شخص در امتداد f_i از نقطه آغازین تا انتهای حرکت می‌کند، در حالی که قورباغه در b_i مانده است. زمانی که شخص به نقطه انتهایی f_i می‌رسد، قورباغه به روی b_{i+1} می‌پرد. آن دو این حرکت را تا زمانی که تمام f و B پیموده شود، ادامه می‌دهند.

ملاحظه ۸.۱.۱ هر سه نسخه از فاصله فرشه به وضوح می‌تواند به هر بُعد^۶ $d > 2$ تعمیم یابد، اما در این پایان‌نامه فقط مورد صفحه را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۴.۱.۱ فاصله بین مجموعه‌ها، و یک نقطه و یک مجموعه

دو تعریف متداول برای فاصله بین دو مجموعه غیرتهی موجود می‌باشد:

- یک نسخه از فاصله بین دو مجموعه غیرتهی، کوچک‌ترین فاصله بین هر دو نقطه متناظر از دو مجموعه می‌باشد، که معنای روزمره از کلمه می‌باشد، یعنی

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

که در این جا $d(x, y)$ را می‌توان فاصله اقلیدسی در نظر گرفت.

- فاصله هاوسدورف مقدار بزرگ‌تر از بین دو مقدار را در نظر می‌گیرد، که یکی بزرگ‌ترین برای یک نقطه روی محدوده یک مجموعه، از کوچک‌ترین، برای نقطه‌ای که روی محدوده مجموعه دیگر قرار گرفته، روی فاصله بین نقاط است، و دیگری شبیه چیزی است که برای مقدار اول گفته شد، با این تفاوت که نقش مجموعه‌ها با هم عوض شده است.

^۵Semi-Continuous Fréchet Distance

^۶Dimension

فاصله بین یک نقطه و یک مجموعه، کوچک‌ترین فاصله بین آن نقطه و نقطه‌های داخل مجموعه است. این مطابق است با فاصله‌ای که در بالا، در تعریف اول برای فاصله دو مجموعه ذکر شد، در این حالت یکی از مجموعه‌ها داری یک عضو است.

۵.۱.۱ فاصله فرشه در مقایسه با فاصله هاوسدورف

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید A و B دو مجموعه از نقاط در \mathbb{R}^d باشند. فاصله هاوسدورف جهت‌دار^۶ از A به B به صورت زیر تعریف می‌شود:

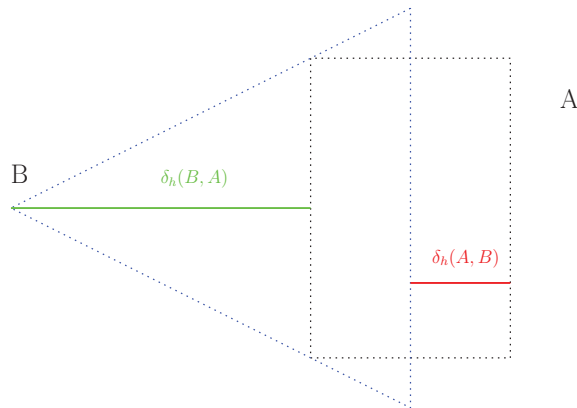
$$\delta_h(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|,$$

و فاصله هاوسدورف بین A و B نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_H(A, B) = \max\{\delta_h(A, B), \delta_h(B, A)\}.$$

در این جا $\|\cdot\|$ نرم مربوطه می‌باشد. به طور شهودی، تابع $\delta_h(A, B)$ یک نقطه $a \in A$ را که دارای بیش‌ترین فاصله از هر نقطه در B می‌باشد پیدا کرده، و فاصله بین a و نزدیک‌ترین همسایه‌اش در B را اندازه‌گیری می‌کند.

مثال ۱۰.۱.۱ شکل ۴.۱ یک مثال از فاصله هاوسدورف جهت‌دار بین دو مجموعه نقاط A و B را نشان می‌دهد. در این شکل مجموعه نقاط A با چینشی به شکل مستطیل، و مجموعه نقاط B با چینشی به شکل مثلث نشان داده شده است.



شکل ۴.۱: مثالی از فاصله هاوسدورف جهت‌دار.

^۶Directed Hausdorff distance