بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

به‌کارگیری نامساوی ذوزنقه‌ای به معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم در فضاهای باناخ

استاد راهنما :

دکتر جعفر پورمحمود

استاد مشاور :

دکتر محمد جهانشاهی

پژوهشگر :

مهدی خانکشی‌زاده

بهمن‌ماه/ ۱۳۸۶

تبریز/ ایران

تأییدیهٔ اعضاء هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

اعضاء هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامهٔ خانم/ آقای مهری خانکشی زاده

تحت عنوان

را از نظر شکل و محتوا بررسی نموده، پذیرش آن را جهت نیل به درجهٔ کارشناسی ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضاء هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر جعفر نیک‌پرست	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر احمد جهانشاهی	دانشیار	
۳- استاد ناظر	دکتر ابراهیم رضاپور	دانشیار	
۴- استاد ناظر	دکتر ناصر آقازاده	استادیار	
۵- نمایندهٔ شورای تحصیلات تکمیلی	—	—	

(نمونهٔ شماره (۱) مخصوص کارشناسی ارشد)

تقدیم به پدر و مادرم

قدردانی

بار الها هر آنچه که در زندگی‌ام داشته‌ام همه متعلق به نام نامی مطلق توست.

حمد بی‌پایان خداوند منان را که ما را لایق معلمانی دانسته که عظمت آنان بی‌منتها، هدایت‌شان بی‌نظیر و همنوایی با آنان سعادت است. در پایان این مرحله از تحصیل برخود واجب می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اسطوره‌های محبت و مهربانی پدر و مادر عزیزم صمیمانه تشکر کنم.

از استاد بزرگوار، جناب آقای **دکتر جعفر پورمحمود**، که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پروژه هدایت کردند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌کنم. و از استاد بزرگوار، جناب آقای **دکتر محمد جهانشاهی**، که با راهنمایی‌ها و مساعدت‌های عالمانه خود، راه‌گشای این پژوهش گشتند، سپاس‌گزاری می‌کنم.

از استادان محترم و فرهیخته گروه ریاضی به‌خصوص جناب آقای **دکتر شهرام رضاپور** و جناب آقای **دکتر علیرضا غفاری** که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام، تشکر و قدردانی می‌گردد. امیدوارم که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

در پایان از دوست گرانقدرم آقای مجید درفش‌پور که در یافتن برخی مراجع مورد نیاز این پایان‌نامه مرا یاری نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مهدی خانکشی‌زاده

بهمن‌ماه ۱۳۸۶

تبریز، ایران

فهرست مندرجات

چکیده

این پایان‌نامه از سه فصل مختلف تشکیل شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه‌ای که برای فصل‌های بعد لازم است، می‌پردازیم. در فصل دوم به اصلاح کران بالای روش ذوزنقه‌ای در انتگرال‌گیری عددی که در سال‌های اخیر نتایجی از آن‌ها معلوم شده است، می‌پردازیم.
در فصل آخر ابتدا توضیحات مختصری در مورد روش نقطه ثابت برای یافتن وجود و یگانگی جواب معادلات انتگرال فردهلم می‌پردازیم. قضیه نقطه ثابت پروو نیز برای وجود و یکتایی جواب ارایه می‌شود. در نهایت برای یافتن جواب معادله انتگرال– دیفرانسیل فردهلم از روش نقطه ثابت با تقریب جواب و مشتق روابط و روش ذوزنقه‌ای کوادراتور برای توابع پیوسته در فضای باناخ استفاده می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال و انتگرال–دیفرانسیل، قضیه نقطه ثابت پروو، روش‌های تقریب جواب، قاعده انتگرال‌گیری ساده و مرکب ذوزنقه‌ای.

پیشگفتار

یکی از شاخه‌های علم ریاضی که کابردهای فراوانی در مسائل مهندسی و فیزیک دارد، معادلات انتگرال است. معادلات انتگرال در خیلی از مباحث بیولوژی، شیمی و مهندسی ظاهر می‌شود. البته معادلات انتگرال برای نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به‌کار می‌روند. متداول‌ترین معادلات انتگرال را می‌توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود. به‌طوری‌که اگر معادلات دیفرانسیل مورد نظر به‌صورت یک مساله مقدار مرزی باشد، آن‌گاه معادلات انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مساله مقدار اولیه باشد، آن‌گاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود. برحسب این‌که معادلات انتگرال از چه نوع مساله‌ای ظاهر می‌شود، تکنیک‌ها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال استفاده می‌شود.

لازم به ذکر است که منابع اصلی این پایان‌نامه، مقالات [٦]، [٩]، [١٠] [١٣]، [١٧] می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز

۱.۱ تعاریف اولیه

دراین بخش تعاریف و قضایایی ارایه می‌شوند که دانستن آن‌ها برای مطالعه فصل‌های آتی ضرورت دارد.

تعریف ۱.۱.۱ دستگاه حقیقی توسیع‌یافته

منظور از دستگاه اعداد حقیقی توسیع‌یافته ($\mathbb{R}^*$) مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به انضمام دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ است که دارای خاصیت‌های زیر می‌باشد.

۱) اگر $x \in R$، آن‌گاه

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty$$
$$x - (+\infty) = -\infty, \quad x - (-\infty) = +\infty$$
$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0$$

۲) اگر $x > 0$، آن‌گاه $x \cdot (+\infty) = +\infty \, , \; x \cdot (-\infty) = -\infty$،

۳) اگر $x < 0$، آن‌گاه $x \cdot (+\infty) = -\infty \, , \; x \cdot (-\infty) = +\infty$، ۴) $(+\infty)+(+\infty)=(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$،

۵) اگر $x\in R$، آن‌گاه $-\infty < x < +\infty$.

تعریف ۲.۱.۱ فضای برداری

فرض کنید V مجموعه‌ای از بردارها، «$+$» جمع برداری و «$\cdot$» ضرب اسکالر دو عمل دوتایی با خواص زیر روی V باشند. آن‌گاه $(V,+,\cdot)$ را **فضای برداری** نامند.

خواص عمل جمع: اگر $x,y\in V$ آن‌گاه عنصری مانند $x+y$ وجود دارد که در خواص زیر صدق می‌کند

۱) به ازای هر x و y در V، $x+y=y+x$،

۲) به ازای هر x و y و z در V، $(x+y)+z=x+(y+z)$،

۳) عنصری مانند 0 در V هست به قسمی که به ازای هر x در V، $x=x+0$ و $x=0+x$،

۴) به ازای هر x در V عنصری مانند $-x$ در V هست به قسمی که $x+(-x)=0$.

خواص عمل ضرب: هرگاه $a\in\mathbb{R}$ اسکالر و $x\in V$ باشد. عنصری مانند ax در V موسوم به ضرب عددی اسکالر a و بردار x وجود دارد که دارای خواص زیر است

۱) به ازای هر $x\in V$، $1\cdot x=x$،

۲) به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$ و $x\in V$، $a\cdot(b\cdot x)=(a\cdot b)\cdot x$،

۳) به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$ و $x,y\in V$، $a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$ و $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x$.

مثال ۱.۱.۱ دستگاه اعداد حقیقی یک فضای برداری است که در آن اعمال جمع و ضرب عددی همان جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی است.

مثال ۲.۱.۱ در حالت کلی برای $p \in \mathbb{N}$، $\mathbb{R}^p$ نشانگر دسته‌ی « p تایی‌های » مرتب $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ با شرط $x_i \in \mathbb{R}$ به ازای $i = 1, 2, \cdots, p$ است. هرگاه جمع برداری و ضرب عددی به‌صورت $(x_1, x_2, \cdots, x_p) + (y_1, y_2, \cdots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_p + y_p)$ و $\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_p) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_p)$ تعریف شود، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\mathbb{R}^p$ تحت این اعمال، یک فضای برداری است.

تعریف ۳.۱.۱ حاصل‌ضرب داخلی

هرگاه V یک فضای برداری باشد، حاصل‌ضرب داخلی (حاصل‌ضرب نقطه‌ای) تابعی است از $V \times V$ به $\mathbb{R}$ که با نگاشت $(x, y) \to x.y$ نشان داده می‌شود به‌طوری‌که در خواص زیر صدق می‌کند.

۱) به ازای هر $x \in V$، $x.x \geq 0$،

۲) $x.x = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

۳) به ازای هر $x, y \in V$، $x.y = y.x$،

۴) به ازای هر $x, y, z \in V$، $x.(y + z) = x.y + x.z$ و $(x + y).z = x.z + y.z$،

۵) به ازای هر $x, y \in V$ و $a \in \mathbb{R}$، $(a.x).y = x.(a.y) = a.(x.y)$.

هر فضای برداری که در آن حاصل‌ضرب داخلی تعریف شده باشد فضای **حاصل‌ضرب داخلی** نام دارد.

مثال ۳.۱.۱ ضرب معمولی در فضای $\mathbb{R}$ از خواص فوق برخوردار است در نتیجه $\mathbb{R}$ فضای حاصل‌ضرب داخلی است.

مثال ۴.۱.۱ در $\mathbb{R}^p$ تعریف می‌کنیم،

$$(x_۱, x_۲, \cdots, x_p).(y_۱, y_۲, \cdots, y_p) = x_۱.y_۱ + x_۲.y_۲ + \cdots + x_p.y_p$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این روابط معرف یک فضای حاصل‌ضرب داخلی در $\mathbb{R}^p$ است.

تعریف ۴.۱.۱ نرم

اگر V یک فضای برداری باشد آن‌گاه نرم از V تابعی است در V به $\mathbb{R}$ که با $\| x \| \longleftarrow x$ نشان داده می‌شود و دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) به ازای هر $x \in V$، $\| x \| \geq ۰$،

۲) $\| x \| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

۳) به ازای هر $x \in V$ و $a \in \mathbb{R}$، $\| ax \| = | a | \| x \|$ ،

۴) به ازای هر $x, y \in V$، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

فضای برداری که در آن نرم تعریف شده باشد فضای خطی نرمدار نام دارد.

مثال ۵.۱.۱ تابع قدر مطلق در $\mathbb{R}$ از خواص نرم برخوردار است.

مثال ۶.۱.۱ در $\mathbb{R}^p$ تعریف می‌کنیم

$$\| (x_۱, x_۲, \cdots, x_p) \| = \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_p^۲}$$

تعریف بالا یک نرم در $\mathbb{R}^p$ می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱ فضای متری

مجموعه X در صورتی یک فضای متری است که به هر دو نقطه $p, q \in X$ عدد حقیقی $d(p, q)$ به نام فاصله از p تا q طوری مربوط شده باشد که

۱) $d(p, q) > ۰$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p, q) = ۰$ هرگاه $p = q$، ۲) $d(p,q)=d(q,p)$،

۳) به ازای هر $r\in X$، $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,q)$.

هر تابع برخوردار از این سه خاصیت یک تابع فاصله یا یک متر نام دارد.

مثال ۷.۱.۱ در فضای $\mathbb{R}$، $d(x,y)=\mid x-y\mid$ یک متر می‌باشد که آن را متر اقلیدسی می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱ متریک تعمیم‌یافته

تابعی مانند $d:Y\times Y\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را که در خواص زیر صدق می‌کند

۱) $d(x,y)\geq 0$ $\qquad \forall x,y\in Y$

۲) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ $\qquad \forall x,y\in Y$

۳) $d(x,y)=d(y,x)$ $\qquad \forall x,y\in Y$

۴) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ $\qquad \forall x,y,z\in Y$

یک متر تعمیم‌یافته گویند که در آن Y مجموعه‌ای غیرتهی است. زوج (Y,d) را فضای متریک تعمیم‌یافته می‌نامند.

یادآوری: رابطه ترتیب جزئی «$\leq$» در $\mathbb{R}^n$ برای هر $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ و $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ در $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر است:

$$x\leq y\Leftrightarrow x_i\leq y_i$$

که در آن y_i و x_i به ازای هر $i=1,2,\dots,n$ عضو $\mathbb{R}$ می‌باشد.

مثال ۸.۱.۱ با فرض $n=2$ و $Y=\mathbb{R}$، نگاشت $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ با ضابطه $d(x,y)=(|x|,|y|)$ یک متر تعمیم‌یافته است.

تعریف ۷.۱.۱ جبر

گردایه‌ای از مجموعه‌ها، مانند M است که دارای دو خاصیت زیر باشد:

$$
\begin{array}{lll}
۱) & A \in M & \Rightarrow A^c \in M \\
۲) & A, B \in M & \Rightarrow A - B \in M
\end{array}
$$

از دو خاصیت فوق نتیجه می‌شود $A \cup B$ نیز عضو M می‌باشد، زیرا $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$. اگر به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، خاصیت زیر برقرار باشد، M را σ−جبر می‌نامند.

$$A_i \in M \ \Rightarrow \bigcup_{i=۱}^{n} A_i \in M.$$

تعریف ۸.۱.۱ اندازه[۱]

فرض کنید مجموعه X شامل یک σ−جبر مانند M باشد. یک اندازه روی M تابعی چون $\mu : M \to [۰, \infty)$ است به‌قسمی که

الف) $\mu(\emptyset) = ۰$؛

ب) اگر $\{A_i\}_۱^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در M باشد، آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{۱}^{\infty} A_i) = \sum_{۱}^{\infty} \mu(A_i)$$

که در آن برای هر $n \neq m$، $A_n \neq A_M$. خاصیت (ب) را جمعی شمارش‌پذیر نامیده می‌شود که جمعی متناهی بودن را ایجاب کند:

$$\mu(\bigcup_{۱}^{n} A_i) = \sum_{۱}^{n} \mu(A_i)$$

زیرا برای $i > n$ می‌توان A_i را تهی در نظر گرفت.

تعریف ۹.۱.۱ فضای باناخ

یک فضایی خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد.

---

[۱] Measure

مثال ۹.۱.۱ فضای برداری $\mathbb{R}^n$ با نرم

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

یک فضای باناخ است، که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

تعریف ۱۰.۱.۱ تابع اندازه‌پذیر[۲]

فرض کنید X فضای باناخ و $-\infty < a < b < \infty$ باشد. تابع $f : [a,b] \to X$ اندازه‌پذیر است هرگاه دنباله‌ای از توابع ساده $f_n : [a,b] \to X$ در $[a,b]$ وجود داشته باشد که تقریبا همه جا به‌طور نقطه‌ای به f همگرا باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱ انتگرال لبگ

فرض کنید $f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ و به ازای هر $t \in [a,b]$ تابع $f : (., t) \to \mathbb{C}$ انتگرال‌پذیر باشد. قرار می‌دهیم

$$F(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x).$$

در حالت خاص که اندازه μ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است، انتگرال فوق را **انتگرال لبگ** می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ انتگرال بوخنر[۳]

تابع اندازه‌پذیر $f : [a,b] \to X$ انتگرال‌پذیر بوخنر است اگر و تنها اگر تابع نرم در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد، که در آن منظور از تابع نرم تابع $t \mapsto \|f(t)\| : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ است.

---

[۲] *Measurable*

[۳] *Bochner integral*

تعریف ۱.۱.۱۳ فضای l^p

فرض کنید $p \geq ۱$، عدد حقیقی ثابت باشد. اعضای فضای l^p به‌صورت دنباله‌ای از اعداد $x = (x_۱, x_۲, \ldots)$ است که در آن x_i به ازای $i = ۱, ۲, \ldots$، اسکالر است. در نتیجه

$$l^p = \{x \mid x = (x_۱, x_۲, \ldots) \, , \mid \sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$$

و متر تعریف شده در این فضا عبارت است از

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}$$

و نرم در این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|x\| = \left(\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}$$

که $x = (x_i)_{i=۱}^{\infty}$ و $y = (y_i)_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌هایی حقیقی هستند.

تعریف ۱.۱.۱۴ فضای l^∞

اعضای فضای l^∞ به‌صورت دنباله‌هایی کراندار از اعداد در فضای مختلط است. یعنی، دنباله $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_i, \ldots)$ به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots$،

$$|x_i| \leqq c_x$$

که c_x یک عدد حقیقی که وابسته به x ولی مستقل از i می‌باشد.

متر در این فضا به‌صورت

$$d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$$

می‌باشد و نرم در این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|x\| = \sup_i |x_i|$$

که در آن $x = (x_i)_{i=۱}^{\infty}$ و $y = (y_i)_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌هایی مختلط هستند.

تعریف ۱.۱.۱۵ تابع F متساوی لیپشیتس[۴] از مرتبه α در نقطه x_0 گویند هرگاه عددی مانند L وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $x \in B(c)$ و $x \neq c$، آن‌گاه

$$|F(x) - F(c)| < L|x - c|^{\alpha}$$

که در آن $B(c)$ همسایگی به مرکز c و عدد L ثابت لیپشیتس است.

۱.۲ مقدماتی از معادلات انتگرال

تعریف ۱.۲.۱ معادله انتگرال

معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد.

یک نمونه از معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است، به‌صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F(u(t))dt \qquad (۱)$$

$K(x,t)$ هسته معادله انتگرال، λ پارامتر معلوم، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که به غیر از تابع مجهول $u(x)$ بقیه توابع و پارامترها از جمله هسته معادله یعنی $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

اگر $\phi(x) = 0$ باشد، معادله انتگرال را معادله انتگرال نوع اول و اگر $\phi(x) = 1$ باشد، معادله انتگرال را معادله انتگرال نوع دوم می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۲ معادله انتگرال خطی

معادله انتگرالی را که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال به‌صورت خطی ظاهر شود یعنی

---
[۴] Lipschitz

$u(t) = F(u(t))$، معادله انتگرال خطی گویند. اگر تابع $u(x)$ زیر علامت انتگرال با توابع غیرخطی نظیر $u^{۲}(x)$ یا $\cos u(x)$ یا $e^{u(x)}$ و غیره همراه باشد، آن‌گاه معادله انتگرال را غیرخطی گویند.

مثال ۱.۲.۱ معادله

$$u(x) = \frac{۲}{۳}x + \int_{۰}^{۱} xtu(t)dt$$

معادله انتگرال خطی با هسته $K(x,t) = xt$ و معادله

$$u(x) = \frac{۱}{۲}\cos x + \int_{۰}^{۱}(x-t)^{۲}u^{۲}(t)dt$$

معادله انتگرال غیرخطی با هسته $K(x,t) = (x-t)^{۲}$ می‌باشد.

۳.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال

الف: هرگاه در معادله انتگرال (۱) حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری اعداد ثابت باشند، معادله انتگرال را معادله انتگرال فردهلم می‌نامند.

ب: هرگاه در معادله انتگرال (۱) حداقل یکی از حدود بالا یا پایین یا هر دو تابعی از x باشند معادله انتگرال را معادله انتگرال ولترا نامند.

مثال ۱.۳.۱ معادله انتگرال زیر یک معادله انتگرال خطی فردهلم نوع دوم با هسته $K(x,t) = (x-t)$ و تابع معلوم $f(x) = \frac{۱}{۲} + x$ می‌باشد

$$u(x) = \frac{۱}{۲} + x - \int_{۰}^{۱}(x-t)u(t)dt.$$

تعریف ۱.۳.۱ معادله انتگرال‌ـدیفرانسیل

هرگاه در معادله‌ای تابع مجهول و مشتقات آن، هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج علامت انتگرال ظاهر گردند. معادله انتگرال را معادله انتگرال‌ـدیفرانسیل گویند.

در حالت کلی می‌توان معادله انتگرال‌ـدیفرانسیل را به فرم

$$F(D_{۱}y, \kappa \cdot D_{۲}y, f) = ۰$$