دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال ولترا با روش‌های چندگامی هم‌محلی

استادان راهنما

دکتر غلامرضا حجتی

دکتر صداقت شهمراد

پژوهشگر

سمیه فاضلی

خرداد ۱۳۹۱

بسم الله الرّحمن الرّحیم

ستایش خاص خدایی است که نیست برای قضاو حکمش جلوگیری و نه برای عطاو بخشش مانعی و نه مانند ساخته اش ساخته هیچ سازنده ای و اوست بخشنده وسعت ده که آفرید انواع گوناگون پدیده ها را و به حکمت خویش محکم ساخت مصنوعات را و طلایه های عالم وجود بر او مخفی نیست.

خدایا توئی مونس بندگان در آنجا که عوالم وجود آنها را به وحشت اندازد و توئی که راهنمائیشان کنی آنگاه که نشانه ها برایشان آشکار گردد. چه دارد آنکس که تو را گم کرده؟ و چه ندارد آنکس که تو را یافته است.

خدایا من چنانم که در حال توانگری هم فقیرم پس چگونه فقیر نباشم در حال تهیدستیم خدایا من نادانم در عین دانشمندی پس چگونه نادان نباشم در عین نادانی. خدایا این خواری من است که پیش رویت عیان و آشکار است و این حال تباه من است که بر تو پوشیده نیست. از تو خواهم که مرا به خود برسانی و به وسیله ذات تو بر تو دلیل می جویم، پس به نور خود مرا بر ذاتت راهنمائی فرما و به یاد آر مرا بندگی صادقانه در پیش رویت. خدایا بیاموز به من از دانش مخزونت و محفوظم دار به پرده مصونت. خدایا مرا به حقائق نزدیکان درگاهت بیارای و به راه اهل جذبه و شوقت ببر.

خدایا بی نیاز کن مرا به تدبیر خودت درباره ام از تدبیر خودم و به اختیار خودت از اختیار خودم و بر جاهای بیچارگی و درماندگی ام مرا واقف گردان. خدایا مرا از خواری نفسم نجات ده و پاکم کن از شک و شرک خودم پیش از آنکه داخل گورم گردم. به تو یاری جویم پس تو هم یاریم کن و بر تو توکل کنم پس مرا وامگذار و از تو درخواست کنم پس ناامیدم مگردان.

بخشی از فرمایشات امام حسین (ع) در روز عرفه

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

و برادر و خواهر عزیزم

بنام خدا

الحمدالله رب العالمین.

سرسپاس بر آستان آن یگانه می سایم که لحظه لحظه وجود تشنه ام را از حضور سیالش سیراب می کند و بوسه می زنم بر دست های پاک خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم به پاس خوبی های بی دریغ، محبت های بی بدیل و همراهی ایثارگرانه شان.

عمیق ترین قدردانی خود را حضور استادان فرهیخته و ارجمندم جناب آقای دکتر غلامرضا حجتی و جناب آقای دکتر صداقت شهمراد تقدیم می کنم که بزرگوارانه و صابرانه با راهنمایی های ارزنده شان راهگشای من در طی این مسیر بودند.

از جناب آقای دکتر ایواز، جناب آقای دکتر بابلیان و جناب آقای دکتر محسنی مقدم که زحمت داوری این رساله را تقبل فرمودند و با پیشنهادهای ارزشمند خود بر غنای آن افزودند، صمیمانه سپاسگزارم.

از ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی جناب آقای دکتر امامعلی پور، مدیریت محترم گروه ریاضی کاربردی جناب آقای دکتر خیری و سایر اساتید گروه ریاضی کاربردی کمال تشکر را دارم.

در پایان برای همه عزیزانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند، به ویژه برادر و خواهر عزیزم آرزوی سعادت روزافزون دارم.

همتم بدرقه ی راه کن ای طایر قدس　　　　که دراز است ره مقصد و من نوسفرم

سمیه فاضلی

خرداد ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: فاضلی نام: سمیه

عنوان: حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال ولترا با روش‌های چندگامی هم‌محلی

استادان راهنما : دکتر غلامرضا حجتی و دکتر صداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۱۶۰

کلید واژه‌ها: معادله‌ی انتگرال ولترا، روش‌های هم‌محلی، روش‌های چندگامی هم‌محلی، روش‌های چندگامی هم‌محلی فراضمنی، روش‌های چندگامی هم‌محلی هرمیتی، همگرایی، فوق همگرایی، پایداری.

چکیده

در این رساله، رده‌ی جدیدی از روش‌های هم‌محلی برای حل عددی معادلات انتگرال ولترا (VIE) مورد بررسی قرار می‌گیرد. دسته‌ی جدیدی از روش‌های چندگامی هم‌محلی را برای حل دو نوع از معادلات انتگرال ولترای غیرخطی شامل مسائل سخت و غیرسخت معرفی می‌کنیم. این روش‌ها که آن‌ها را روش‌های چندگامی هم‌محلی فراضمنی (SIMCMs) می‌نامیم، برای تقریب جواب در هر زیر بازه، با در نظر گرفتن یک افراز یکنواخت، با استفاده از تعداد معینی از نقاط گامی قبلی و تعداد معینی از نقاط هم‌محلی زیربازه‌ی جاری و بعدی به دست می‌آیند. در ادامه، به منظور ساختن روش‌های A-پایدار از مرتبه‌ی همگرایی بالاتر که تقریب‌های هموار تولید می‌کنند، روش‌های چندگامی هم‌محلی هرمیتی (MHCMs) را بر اساس درونیابی هرمیت، معرفی می‌کنیم. این روش‌ها تقریبی از جواب را در هر زیربازه با استفاده از مقادیر تقریبی جواب و نیز مقادیر تقریبی مشتق آن در تعداد معینی نقطه‌ی گامی قبلی و تعداد معینی نقطه‌ی هم‌محلی تولید می‌کنند. مرتبه‌ی همگرایی بالا و ویژگی‌های پایداری خطی قابل ملاحظه‌ی روش‌های چندگامی هم‌محلی در حل عددی VIE یک بعدی، ما را ترغیب می‌کند تا این روش‌ها را برای حل عددی VIE دوبعدی به کار بریم. همچنین روش‌های چندگامی هم‌محلی

تکراری را برای حل عددی VIE دوبعدی پیشنهاد می‌دهیم. این روش‌ها، پس از مستطیل‌بندی دامنه‌ی انتگرال‌گیری برای تقریب جواب در هر مستطیل، وابسته به تعداد معینی از مقادیر تقریبی جواب در نقاط شبکه بندی قبلی و نقاط هم‌محلی در مستطیل جاری است. برای روش‌های ساخته شده، مرتبه‌ی همگرایی روش‌ها و نیز مرتبه‌ی فوق همگرایی موضعی بیان می‌شوند. هم‌چنین، ویژگی‌های پایداری خطی روش‌ها برای هر دو نوع SIMCMs و در MHCMs مورد بررسی قرار می‌گیرد که نشان می‌دهد که در برخی حالات روش‌های A-پایدار از این دسته روش‌ها موجود هستند. کارایی روش‌های ساخته شده و نتایج نظری ثابت شده با استفاده از نتایج عددی و مقایسه‌ی نتایج حاصل با روش‌های عددی مشابه مورد تائید قرار می‌گیرد.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

مقدمه

نام معادلات انتگرال اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط بویس-ریموند[۱] پیشنهاد شد و هم‌چنین در پایان‌نامه‌ی آبل[۲] بر روی خم هم‌زمانی معادلات انتگرال ظاهر گردید که این پایان‌نامه در سال‌های ۱۸۲۳ و ۱۸۲۶ به چاپ رسیده است. طبق نظریه‌ی دیگری، اولین پیدایش معادلات انتگرال مربوط به کارهای پژوهشی لاپلاس در سال ۱۷۸۲ می‌باشد [۱۵، ۱۷، ۵۱]. در سال‌های ۱۹۰۰-۱۹۰۳ ریاضیدان ایتالیایی به‌نام ویتو ولترا[۳] بر روی نوعی از معادلات انتگرال کار کرد. در همان سال‌ها ریاضیدان دیگری به نام ایوار فردهلم[۴] در اثبات وجود جواب مسأله‌ی دیریکله از معادلات انتگرال استفاده نمود [۲۷]. با توجه به کارهای ارزنده‌ی این دو ریاضیدان، معادلات انتگرال در دو نوع معادلات انتگرال ولترا و معادلات انتگرال فردهلم نامگذاری شدند.

مدل‌بندی ریاضی بسیاری از مسائل فیزیکی و پدیده‌های طبیعی منجر به معادلات انتگرال می‌شود که در آن تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. به عنوان مثال مسأله‌ای در الکترواستاتیک برای تعیین چگالی هزینه‌ی توزیع برق بر حسب توزیع پتانسیل معلوم منجر به معادله‌ی انتگرال می‌گردد و هم‌چنین انرژی ذخیره شده در خازن و نرخ رشد جمعیت با استفاده از یک معادله‌ی انتگرال به‌دست می‌آید [۵، ۲۶، ۵۱]. همچنین مدل‌بندی ریاضی برخی از مسائل گسترش در فضا و زمان منجر به معادلات انتگرال دوبعدی می‌شود که می‌توان به مسائل مقدار مرزی سهموی [۳۵] و مدل‌های زیستی، فیزیکی و مکانیکی [۳۶] اشاره نمود.

در سال‌های اخیر روش‌های متعددی برای حل عددی انواع معادلات انتگرال پیشنهاد شده است. روش خطی سازی [۳۳، ۶۳، ۶۴]، روش انتگرال‌گیری ضربی [۲۳، ۵۳، ۶۰]، روش گالرکین[۵] [۴۳]،

[۱] Bois-Reymond

[۲] Abel

[۳] Vito Volterra

[۴] Ivar Fredholm

[۵] Galerkin

روش نیستروم[۶] [۳۴] و روش‌های هم‌محلی برای حل عددی انواع معادلات انتگرال مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

از جمله روش‌های تحلیلی عددی می‌توان به روش‌های تجزیه‌ی آدومیان[۷] [۴، ۲۸، ۷۲]، روش تاو[۸] [۴۵، ۴۶، ۴۸]، روش سری تیلور[۹] [۴۱، ۵۴، ۵۸، ۶۵، ۶۶] و روش آنالیز هموتوپی[۱۰] [۲، ۳، ۱۶، ۵۵] برای حل معادلات انتگرال اشاره نمود. در بسیاری از این روش‌ها با وجود سادگی استفاده برای متخصصین سایر علوم، جواب تقریبی تنها در نزدیکی نقطه‌ی بسط از دقت خوبی برخوردار است ولی برای حل معادلات در بازه‌هایی با طول بزرگ کارآمد نیستند. اما در برخی از حالت‌ها با استفاده از بسط با پایه‌های دلخواه، نتایج بهتری حاصل می‌شود [۴۷].

همچنین در [۲۱] روش‌های هم‌محلی، در [۶۸، ۶۹] روش‌های بسط و در [۵۹] روش بلوکی برای حل معادلات انتگرال ولترای دوبعدی معرفی شده‌اند.

بیشتر روش‌های عددی موجود، برای حل معادلات انتگرال ولترای سخت[۱۱] و در بازه‌های بزرگتر، با رشد سریع خطا همراه هستند. بنابراین در این رساله بیشتر دنبال روش‌هایی هستیم که نسبت به روش‌های موجود از مرتبه‌ی دقت بالاتر و ناحیه‌ی پایداری وسیع‌تری برخوردار باشند و هم‌چنین هزینه‌ی محاسباتی کمتری نسبت به روش‌های موجود داشته باشند.

روش‌های هم‌محلی بر اساس ایده‌ی تقریب جواب دقیق با تابع مناسبی که متعلق به یک فضا با بعد متناهی است، پایه‌ریزی شده است. این فضا اغلب فضای چند جمله‌ای‌های تکه‌ای با خاصیت درونیابی در نقاط هم‌محلی، در نظر گرفته می‌شود. مبدأ کاربرد فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای برای تقریب جواب مسأله‌ی مقدار مرزی، سال ۱۹۳۰ می‌باشد. پس از آن در حدود سال ۱۹۶۰ این روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی به‌کار برده شدند که روش‌های هم‌محلی در فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای منجر به دسته‌ی مهمی از روش‌های ضمنی رونگه-کوتا می‌شوند.

ایده‌ی به کار بردن تقریب با چندجمله‌ای های تکه‌ای با روش هم‌محلی برای حل عددی معادله‌ی انتگرال ولترا به هوبر[۱۲] در سال ۱۹۳۹ نسبت داده می‌شود [۴۹، ۶۱]. کتاب‌های تألیف شده توسط

[۶] Nystrom

[۷] Adomian decomposition

[۸] Tau

[۹] Taylor series

[۱۰] Homotopy Analysis

[۱۱] stiff

[۱۲] Huber

بیکر[۱۳] (۱۹۷۷) [۱۱]، لینز[۱۴] (۱۹۸۵) [۵۲] و برونر[۱۵] (۱۹۸۶) [۲۰] اطلاعات فراوانی در مورد حل عددی معادلات انتگرال ولترا و تاریخچه‌ی آن در بر دارند. هرمان برونر در [۱۸] روش‌های هم‌محلی را برای حل عددی انواع معادلات انتگرال ولترا معرفی نموده و به بررسی ویژگی‌های آن‌ها پرداخته است.

آریه ایزرلس[۱۶] [۵۰] علت استفاده از مقادیر موجود قبلی را با این جمله بیان می‌کند: "محققان آنالیز عددی طبیعتاً انسان‌های صرفه‌جویی هستند، چرا مقادیر محاسبه شده در گره‌های قبلی را کنار بگذاریم؟ چرا جواب را به مقادیر تقریبی قبلی که اکنون در دست هستند، وابسته نکنیم؟"

در سال‌های ۲۰۰۷-۲۰۰۸ روش‌های جدیدی از خانواده‌ی روش‌های هم‌محلی، باعنوان روش‌های دوگامی هم‌محلی و روش‌های چندگامی هم‌محلی توسط کنته[۱۷] و همکارانش معرفی شدند. در یک روش r-گامی جواب تقریبی در هر زیربازه به مقادیر تقریبی جواب در نقاط هم‌محلی در آن زیر بازه و r نقطه‌ی گامی قبلی وابسته است. این ایده باعث ساخت روش‌هایی با مرتبه‌ی همگرایی بالاتر و ناحیه‌ی پایداری وسیع‌تر بدون افزایش هزینه‌ی محاسباتی نسبت به مرتبه‌ی همگرایی می‌شود. چندجمله‌ای‌های تکه‌ای برای تقریب جواب معادله‌ی انتگرال ولترا با استفاده از روش چندگامی هم‌محلی در نقاط گرهی پیوسته هستند ولی همواری بیشتری ندارند، درحالی‌که در روش‌های هم‌محلی جز برای انتخاب خاص از پارامترهای هم‌محلی این چندجمله‌ای‌ها در نقاط گرهی ناپیوسته هستند.

برونر در [۱۹] نشان داده است که تقریب جواب معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم با روش هم‌محلی در فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای با همواری بیشتر، در برخی از حالت‌ها منجر به جواب واگرا می‌شود.

در این رساله روش‌هایی از خانواده روش‌های هم‌محلی برای حل عددی معادلات انتگرال ولترای غیرخطی معرفی خواهیم کرد که ضمن داشتن مرتبه‌ی بالاتر نسبت به روش‌های موجود، از ناحیه‌ی پایداری وسیع‌تری نیز برخوردار بوده و هزینه محاسباتی کمتری داشته باشند.

این رساله در چهار فصل تدوین شده است: در فصل اول به معرفی انواع معادلات انتگرال پرداخته و روش‌های هم‌محلی و چندگامی هم‌محلی برای حل عددی معادله‌ی انتگرال ولترا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و به بیان ویژگی‌هایشان می‌پردازیم. در فصل دوم روش فراضمنی چندگامی هم‌محلی را برای حل معادله‌ی انتگرال ولترا معرفی می‌کنیم. در فصل سوم به بیان روش چندگامی هم‌محلی هرمیتی می‌پردازیم و در فصل چهارم روش چندگامی هم‌محلی را برای حل عددی معادله‌ی انتگرال ولترای

[۱۳] Baker

[۱۴] Linz

[۱۵] Herman Brunner

[۱۶] Arieh Iserles

[۱۷] Conte

دوبعدی غیرخطی مورد بررسی قرار می‌دهیم. سه مقاله‌ی زیر مستخرج از این رساله هستند:

1. S. Fazeli, G. Hojjati, S. Shahmorad, *Super implicit multistep collocation methods for nonlinear Volterra integral equations,* Mathematical and Computer Modelling, **55** (2012) 590-607.
2. S. Fazeli, G. Hojjati, S. Shahmorad, *Multistep Hermite collocation methods for solving Volterra integral equations*, Numerical Algorithms, **60** (2012) 27–50.
3. S. Fazeli, G. Hojjati, S. Shahmorad, *Multistep collocation and iterated multistep collocation methods for solving two-dimensional Volterra integral equations,* Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, (submitted).

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

در فصل اول رساله، مروری بر انواع معادلات انتگرال خواهیم داشت. چون موضوع رساله حل عددی معادلات انتگرال ولترا می‌باشد، قضایای وجود و یکتایی جواب را برای این نوع معادلات بدون ارائه‌ی اثبات بیان می‌کنیم. سپس مروری اجمالی بر روش‌های هم‌محلی و روش‌های چندگامی هم‌محلی خواهیم داشت و مرتبه‌ی همگرایی و فوق همگرایی را بیان کرده و به بررسی پایداری خطی روش چندگامی هم‌محلی می‌پردازیم. مطالب این فصل بر اساس مراجع [۱، ۱۸، ۲۰، ۳۱] نوشته شده است.

۱.۱ معرفی انواع معادلات انتگرال و مفاهیم اولیه

۱.۱.۱ انواع معادلات انتگرال

معادله‌ی انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود و به شکل کلی

$$F\left(x, y(x), \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t,y(t))dt\right) = 0 \qquad (۱.۱)$$

است که در آن y تابع مجهول و G، α، β و F توابع معلوم هستند. تابع $G(x,t,y(t))$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند، در صورتی‌که حدود انتگرال مقادیر ثابت باشند، معادله انتگرال معادله‌ی فردهلم نامیده می‌شود و چنانچه حداقل یکی از حدود انتگرال تابعی از x باشد، معادله‌ی انتگرال ولترا نامیده می‌شود.

معادله‌ی

$$h(t)y(t) = g(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t,\tau,y(\tau))d\tau, \quad t \in I := [0,T], \qquad (۲.۱)$$

که در آن $T \in \mathbb{R}$، حالت خاصی از (۱.۱) است. اگر $h(t) \equiv 0$ معادله‌ی (۲.۱) به صورت

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t,\tau,y(\tau))d\tau = g(t),$$

نوشته می‌شود که معادله انتگرال نوع اول نامیده می‌شود و در صورتی‌که $h(t) \neq 0$ معادله انتگرال از

نوع دوم است.

معادلات انتگرال ولترای نوع دوم به صورت متداول

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,\tau,y(\tau))d\tau, \quad t \in I := [0,T], \tag{۳.۱}$$

هستند.

تعریف ۱.۱.۱. اگر در معادله‌ی انتگرال تابع مجهول تابع چند متغیره باشد، معادله‌ی انتگرال را معادله انتگرال چندبعدی می‌نامند. معادله‌ی

$$h(t,x)y(t,x) = f(t,x) + \int_0^t \int_0^x G(t,x,s,\xi,y(s,\xi))dsd\xi, \tag{۴.۱}$$

که در آن $(t,x) \in I \times J := [0,T] \times [0,X]$، $T, X \in \mathbb{R}$ یک معادله‌ی انتگرال ولترای غیر خطی دو بعدی است. مشابه معادلات انتگرال یک بعدی این نوع معادلات با توجه به مقدار $h(t,x)$ به دو نوع اول و دوم تقسیم می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. معادله‌ی انتگرالی را که در آن حداقل یکی از حدود پایین یا بالا نامتناهی باشد، یا هسته‌ی معادله در یک نقطه یا نقاط بیشتری از دامنه‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی باشد، معادله‌ی انتگرال منفرد می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱. هسته‌ی $K(t,\tau,.)$ را به‌طور ضعیف منفرد گویند هرگاه در $t=\tau$ نامتناهی بوده و به‌ازای ثابتی مانند M داشته باشیم

$$|K(t,\tau,.)| \leq M|t-\tau|^{-\alpha}, \quad 0<\alpha<1.$$

معادله‌ی انتگرال ولترا با هسته‌ی به‌طور ضعیف منفرد معمولاً به‌صورت

$$y(t) = f(t) + \int_0^t p_\alpha(t-\tau)K(t,\tau,y(\tau))d\tau, \quad t \in I := [0,T], \tag{۵.۱}$$

است که در آن هسته‌ی $K(t,\tau,y(\tau))$ تابع پیوسته‌ای از متغیرهایش است و

$$p_\alpha(t-\tau) = \begin{cases} (t-\tau)^{-\alpha}, & 0<\alpha<1 \\ \log(t-\tau), & \alpha=1. \end{cases}$$

مثال ۴.۱.۱. معادله‌ی

$$y(t) = 1 - \int_0^t y(\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau, \quad t \in [0,1],$$

یک معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم به‌طور ضعیف منفرد است.

این نوع معادلات اولین بار توسط ریاضیدان نروژی به نام نیلز آبل در سال ۱۸۲۳ معرفی و مورد بررسی قرار گرفتند [۱]. این‌گونه معادلات معمولا در مسائل مهندسی نظیر انتقال گرما، الکتروشیمی و هم‌چنین در کریستال‌ها و غیره دارای کاربردهای فراوانی هستند [۵۱].

تعریف ۵.۱.۱. اگر برخی از مشتقات تابع مجهول نیز در معادله‌ی انتگرال حضور داشته باشند، آنگاه معادله را از نوع معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل می‌نامند. به عنوان مثال

$$D_1 y(t) = f(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k(t,\tau)\big(D_2 y(\tau)\big) d\tau$$

یك معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل است که در آن D_1 و D_2 عملگرهای دیفرانسیل هستند. دسته‌بندی این معادلات مشابه معادلات انتگرال می‌باشد.

۲.۱.۱ پایداری معادلات انتگرال

بررسی پایداری معادلات انتگرال (۲.۱) در حقیقت مطالعه حساسیت تابع جواب $y(t)$ نسبت به اختلال در تابع معلوم $g(t)$، به‌ویژه زمانی که $t \longrightarrow \infty$ می‌باشد.

در معادله‌ی آزمون

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_0^t y(\tau) d\tau, \tag{۶.۱}$$

با تغییر به اندازه‌ی δ در $g(t)$، معادله‌ی انتگرال

$$Y(t) = g(t) + \delta + \lambda \int_0^t Y(\tau) d\tau \tag{۷.۱}$$

حاصل می‌شود. با تفریق (۷.۱) از (۶.۱) معادله‌ی

$$\varepsilon(t) = \delta + \lambda \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

به دست می‌آید که در آن $\varepsilon(t) = y(t) - Y(t)$. جواب این معادله، به صورت $\varepsilon(t) = \delta e^{\lambda t}$ است. بنابراین تغییر به اندازه‌ی δ در $g(t)$ باعث تغییر به‌اندازه‌ی $\varepsilon(t) = \delta e^{\lambda t}$ در جواب می‌شود که

- $\varepsilon(t)$ کراندار است اگر و تنها اگر $Re(\lambda) \leq 0$.
- $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ وقتی $t \longrightarrow \infty$ اگر و تنها اگر $Re(\lambda) < 0$.

بنابراین تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۶.۱.۱. معادله‌ی انتگرال ولترای (۶.۱) پایدار نامیده می‌شود هرگاه $Re(\lambda) < 0$ و به‌طور مجانبی پایدار نامیده می‌شود هرگاه $Re(\lambda) \leq 0$ [۱۰].

۳.۱.۱ وجود و منحصربه‌فردی جواب معادلات انتگرال ولترا

با توجه به اینکه هدف اصلی این رساله، حل عددی معادلات انتگرال ولترای یک و دو بعدی می‌باشد، در این قسمت شرایط لازم برای وجود و یکتایی جواب معادله‌ی انتگرال ولترای خطی و غیرخطی را با استفاده از قضایای زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۱.۱. *[۵۷] معادله‌ی انتگرال ولترای نوع دوم خطی*

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \in I := [0,T] \tag{۸.۱}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید توابع $K(t,\tau)$ و $g(t)$ به‌ترتیب روی $0 \leq \tau \leq t \leq T$ و I پیوسته باشند. در این صورت معادله‌ی انتگرال ولترای (۸.۱) دارای جواب پیوسته‌ی یکتا روی I است.

قضیه ۸.۱.۱. *[۹] فرض کنید توابع معلوم $g(t)$ و $K(t,\tau,y)$ به ترتیب در بازه‌ی I و ناحیه‌ی $S \times \mathbb{R}$ که در آن $S = \{(t,\tau) | 0 \leq \tau \leq t \leq T\}$ پیوسته باشند و هسته نیز نسبت به مولفه‌ی سوم در شرط لیپ شیتس صدق کند:*

$$|K(t,\tau,y_1) - K(t,\tau,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t,\tau,y_1),\ (t,\tau,y_2) \in S \times \mathbb{R},$$

که در آن ضریب L مستقل از y_1، y_2، t و τ است. در این صورت معادله‌ی (۳.۱) برای هر T متناهی دارای جواب پیوسته‌ی منحصربه‌فرد است.