بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

براي دريافت درجه كارشناسي ارشد در رشته رياضي محض گرايش هندسه

عنوان

برش های اعمال گروهای لی وقضیه M.Newman

استاد راهنما

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

استاد مشاور

دکتر فرزدی

پژوهشگر

علی بنابی قدیم

اسفند۸۵

تقدیم به:

پدر و مادرم

اولین معلمان زندگیم.آنان که فروغ نگاهشان و گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه جاودانه زندگی ام بوده است. در برابر وجود پر مهرشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی سرشار از عشق و محبت بر دستانشان بوسه می زنم.و تقدیم به همسرو فرزندم،آنانکه تا به امروز فرصت تلافی محبتشان را بدست نیاورده ام.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خالق یکتا را که توفیق فراگیری علم و دانش را بر این بنده حقیر منت نهاد. اینک که دوره کارشناسی ارشد را با یاری خداوند متعال به پایان می رسانم بر خود واجب می دانم از تمامی کسانی که در دوران تحصیل و در تهیه این پایان نامه به بنده کمک کرده اند صمیمانه سپاسگزاری کنم.به خصوص ازاستاد راهنما آقای دکتر حقیقت دوست و استاد مشاور آقای دکتر فرزدی که در تدوین این پایان نامه و نیز زحمات فراوانی که در طول دوره کارشناسی ارشد متحمل شده اند صمیمانه تشکر می کنم.از ریاست دانشکده ریاضی آقای دکتر ایواز و مدیر محترم گروه ریاضی محض آقای دکتر مهتدی فرد و آقای دکتر مهدی زاده واز تمامی اساتید محترم گروه ریاضی تشکر می کنم.جا دارد از کلیه کارمندان دانشکده نیز تشکر نمایم. همچنین از دوستان دوران تحصیل خصوصا دوستان دوران کارشناسی ارشد سپاسگزارم.

نام خانوادگی دانشجو : بنابی قدیم	نام: علی

عنوان پایان نامه : برش های اعمال گروه های لی وقضیه M.Newman

استادراهنما : دکتر قربانعلی حقیقت دوست

استاد مشاور: دکتر فرزدی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد رشته : ریاضی محض گرایش : هندسه

دانشگاه : تبریز دانشکده : علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی : ۸۵/۱۲/۷

تعداد صفحات : ۷۳

کلید واژه ها : گروه های لی-اعمال گروه لی بر خمینه ها-شارها- نقاط منظم و ثابت و متناوب یک شار- معرفی گروه Z_{id} - فرم جردن یک ماتریس-سیستم های دینامیکی-تعریف *spectrum* یک ماتریس.

چکیده:

بحث اساسی پایان نامه این است که:

اگر G یک گروه لی و M یک خمینه با بعد متناهی باشدو باتعریف عمل $\Phi : G\times M \to M$ و تعریف نگاشت $\varphi : c^{\infty}(M,G) \to c^{\infty}(M,M)$ می خواهیم ساختارتصویرمعکوس عناصری از $C^{\infty}(M,M)$ را تحت φ با $\dim G=1$ یعنی $G=R^1$, $G=S^1$ بررسی کنیم.و به عنوان یک نتیجه از این مقاله یک اثبات جدیدی را برای قضیه مشهور M.Newman ارائه دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

پایان نامه حاضر بر اساس یک مقاله روسی، تحت عنوان:

Sections of lie group actions and a theorem by M.newman می باشد که توسط آقای SERGEY MAKSY MENKO نوشته شده است و در کنفرانس" fundamental mathematic today"در دهمین جشنواره سالیانه دانشگاهی مسکو در سال ۲۰۰۳ منتشر شده است.

اساس مقاله حاضر اثبات قضیه های ۱-۱ و۲-۱می باشد. پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است.که فصل اول شامل مفاهیم و تعریف های مقدماتی و بیان نتایج اصلی مقاله است و در فصل دوم ویژگی های نگاشت φ و نقاط منظم شار و تناوب شارهای خطی و هم چنین نقاط ثابت و متناوب شارها را بررسی می کنیم. در فصل سوم که بحث اصلی مورد نظر پایان نامه می باشد به اثبات قضیه های ۱-۱و۲-۱ می پردازیم و به همراه یک مثال، قضیه M.Newman را ثابت می کنیم.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱- ۱: فضای توپولوژیک M را موضعاً با R^n یکسان نامیم هرگاه برای هر $p\in M$ یک همسایگی مثل U از P موجود باشد که U با زیر مجموعه ای از R^n همئومورف باشد .

تعریف ۲-۱ : فضای توپولوژی M یک خمینه به بعد n است هرگاه :

الف: M هاسدورف باشد .

ب: M موضعاً اقلیدسی یکسان با R^nباشد .

ج: M شمارای دوم باشد. یعنی دارای پایه ای شمارا باشد .

مثال ۱-۱ : S^1 و S^2 به ترتیب خمینه های یک و دو بعدی می باشند .

مثال ۲-۱ : چنبره T^2، خمینه دیفرانسل پذیر با بعد دو می باشد .

گزاره ۳-۱: خمینه توپولوژی M به طور موضعی همبند و فشرده و اجتماع شمارا از زیر مجموعه های فشرده است .

اثبات: رجوع به [۵] .

تعریف ٤-۱ : مجموعه M همراه با یک اطلس C^k ماکزیمال n بعدی را یک خمینه دیفرانسیل پذیر n بعدی از کلاس C^k می نامیم .

مثال۳-۱: هر فضاِی برداری V با بعد متناهی روی R یک خمینه هموار است .

مثال٤-۱: مجموعه تمام ماتریس های $m\times n$ حقیقی M با تناظر زیر:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \to (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

با R^{mn} قابل انطباق بوده، در نتیجه یک خمینه هموار می باشد.

تعریف۵-۱ : اگر M و N دو خمینه هموار و نگاشت $F: M \to N$ هموار باشد و $\dim M \le \dim N$ آنگاه F را غوطه وری می نامیم هرگاه $rankF = \dim M$.

مثال۵- ۱: نگاشت $F: R \to R^3$ را با ضابطه $F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ تعریف می کنیم در این صورت داریم $\dim R = 1$ و $rankF = rank(DF) = 1$ پس نگاشت F غوطه وری است.

تعریف٦-۱: یک نشاندن عبارت است از یک غوطه وری ۱-۱ که نگاشت $F: M \to N$ یک همئومورفیسم از M بروی $\tilde{M} = F(M)$ از N باشد و توپولوژی $F(M)$ همان توپولوژی زیر فضایی در N خواهد بود.

گزاره۷- ۱: فرض کنیم نگاشت $F: M \to N$ یک غوطه وری باشد آنگاه به ازای هر $p \in M$ یک همسایگی U در M وجود دارد که $F|_U : U \to N$ یک نشاندن است. به عبارت دیگر هر غوطه وری به طور موضعی یک نشاندن است.

اثبات : رجوع به [۵].

مثال۶-۱: نگاشت $F:R\to R^2$ را با ضابطه $F(t)=(t^2-1,t^3-t)$ تعریف می کنیم در این صورت داریم: $\dim R=1$ و $rankF=rank(DF)=1$. نگاشت فوق یک به یک می باشد و اگر $F(t)=(t^2-1,t^3-t)=(x,y)$ باشد ، در این صورت داریم : $F^{-1}(x,y)=\dfrac{y}{x}$ که در نقطه صفر پیوسته نیست لذا همئومورفیسم نمی باشد . بنابراین F یک نگاشتی است که غوطه وری است اما نشاندن نیست .

گزاره ۸-۱: فرض کنیم M و N خمینه های هموار به ابعاد m و n و نگاشت $F:N\to M$ یک نگاشت هموار و $rankF=k$ و $q\in F(N)$ باشد، آنگاه احکام زیر را داریم :

۱) $F^{-1}(\{q\})$ یک مجموعه بسته در N است .

۲) $F^{-1}(\{q\})$ زیر خمینه منظم در N با بعد $n-k$ است .

اثبات : رجوع به [۵] .

مثال۷-۱ : در S^{n-1} نگاشت $F:R^n\to R$ را با ضابطه $F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2$ تعریف می کنیم آنگاه $S^{n-1}=F^{-1}(\{1\})$.پس طبق گزاره ۸-۱، S^{n-1} یک مجموعه بسته در R^n و یک زیر خمینه منظم در R^n به بعد $n-1$ می باشد .

تعریف ۹-۱ : در زیر چند گروه از ماتریس ها به همراه بعد آنها معرفی می شود .

$GL(n,R)=\{A\in M(n,R)\mid \det A\neq 0\}$, $\dim GL(n,R)=n^2$

$GL(n,C)=\{A\in M(n,C)\mid \det A\neq 0\}$, $\dim GL(n,C)=2n^2$

$U(n,C)=\{A\in GL(n,C)\mid A^{-t}=A^{-1}\}$, $\dim U(n,C)=n^2$

$SU(n,C)=\{A\in U(n,C)\mid \det A=1\}$, $\dim SU(n,C)=n^2-1$

$O(n,R)=\{A\in GL(n,R)\mid A^{t}=A^{-1}\}$, $\dim o(n,R)=n(n-1)/2$

$SO(n,R)=\{A\in O(n,R)\mid \det A=1\}$, $\dim SO(n,R)=n(n-1)/2$

$O(n,C)=\{A\in GL(n,C)\mid A^{t}=A^{-1}\}$, $\dim O(n,C)=n(n-1)$

اثبات : رجوع به [۵].

تعریف ۱۰-۱ : اگر G یک گروه و در عین حال یک خمینه هموار باشد، نگاشت های ϕ و φ

را به این صورت تعریف می کنیم : $\begin{cases}\phi : G\times G\to G\\ \phi(x,y)=xy\end{cases}$ که xy حاصلضرب عمل گروه G می باشد

و $\begin{cases}\varphi : G\to G\\ \varphi(x)=x^{-1}\end{cases}$ که درآن x^{-1} را وارون عضو x در G می نامیم اگر نگاشت های بالا هموار باشند

آنگاه G را گروه لی می نامیم .

مثال ۸-۱ : مجموعه $G=GL(n,R)$ یک گروه لی است . زیرا اولاً یک زیر خمینه بازدر

$M(n,R)$است و ثانیاً نسبت به ضرب ماتریس ها یک گروه است و نگاشت های $\phi(A,B)=AB$

و $\varphi(A)=A^{-1}$ به دلیل این که دارای مؤلفه هایی به صورت کثیرالجمله می باشند هموار هستند .

مثال۹-۱: در حالت خاص $GL(1,R)=R^{*}=R-\{0\}$ یک گروه لی است .

مثال۱۰-۱: $C^{*}=C-\{0\}$ با ضرب اعداد مختلط یک گروه لی است .

مثال ۱۱-۱ : حاصلضرب مستقیم دو گروه لی با ساختار C^{∞} حاصل از ضرب دو خمینه یک گروه لی است . برای مثال $S^1=\{z\in G \mid |z|=1\}$ یک گروه لی (زیر گروه لی از C^*) است پس $T^n=S^1\times\ldots\times S^1$ یعنی چنبره n بعدی یک گروه لی آبلی است .

گزاره ۱۱-۱: اگر H زیرگروه بسته از گروه لی G باشد آنگاه H زیرگروه لی خواهد بود .

مثال۱۲-۱ : $O(n,R)$ و $SO(n,R)$ دو زیرگروه بسته در $Gl(n,R)$ می باشند پس با توجه به گزاره ۱۱-۱ گروه لی خواهند بود .

اثبات : $GL(n,R)$ یک گروه لی است . برای آنکه ثابت کنیم $O(n,R)$ در $GL(n,R)$ بسته است نگاشت پیوسته $f:GL(n,R)\to M(n,R)$ را با ضابطه $f(A)=A^{-1}-A^t$ تعریف می کنیم . چون $O(n)=f^{-1}(0)$، پس $O(n)$ در $GL(n,R)$ بسته می باشد . برای بسته بودن $SO(n)$ نگاشت پیوسته $\varphi:O(n,R)\to\{-1,1\}$ را با ضابطه $\varphi(A)=\det A$ تعریف می کنیم. در این صورت داریم $SO(n)=\varphi^{-1}(\{1\})$.پس بنابراین $SO(n,R)$ در $GL(n,R)$ بسته است. لذا طبق گزاره۱۱-۱، گروه های لی می باشند.

گزاره۱۲-۱: فرض کنیم $F:G_1\to G_2$ یک همومورفیسم گروه لی باشد ، آنگاه سه رابطه زیر همواره برقرارند :

۱) $rankF$ ثابت است .

۲) $\ker F$ یک زیرمجموعه بسته در زیر خمینه منظم در G_1 است پس $\ker F$ یک گروه لی

است.

۳) $\dim \ker F = \dim G_1 - rankF$.

اثبات : رجوع به [۷].

مثال۱۳-۱ : نگاشت $F: R \to S^1$ را با ضابطه $F(t)=e^{2\pi i t}$ تعریف می کنیم در این صورت

F یک همومورفیسم گروه های لی است. (یعنی F همومورفیسم جبری ونگاشت هموار

می باشد.)

مثال۱٤-۱ : نگاشت $F: R^n \to T^n$ را با ضابطه $F(t_1,...,t_n)=(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2},...., e^{2\pi i t_n})$ تعریف

می کنیم در این صورت F یک همومورفیسم گروه های لی است و

پس $KerF = \{(t_1...t_n) \mid F(t_1...t_n)=(1,1,......,1)\} = \{(t_1.....t_n)\in R^n \mid e^{2\pi i t_n}=1 \ \ , \ 1\le i \le n\} = Z^n$

طبق گزاره ۱۲-۱، Z^n یک زیر گروه لی از R^nاست .

تعریف۱۳-۱ : فرض کنیم G یک گروه لی و M یک خمینه هموار باشد گوییم G بر M عمل

می کند هرگاه نگاشتی مانند $\Phi: G\times M \to M$ موجود باشد به طوری که در دو رابطه زیر

صدق کند :

1) $\forall x \in M \ , \ e \in G \qquad \Phi(e,x)=x$

2) $\forall g_1, g_2 \in G \qquad \Phi(g_1, \Phi(g_2,x)) = \Phi(g_1 g_2, x)$

در این صورت گوئیم G یک گروه تبدیلات بر مجموعه M است و اگر G یک گروه لی و

M یک خمینه هموار باشد، آنگاه Φ یک نگاشت هموار می باشد.اغلب به جای $\Phi(g,x)$ از

$g.x$ که منظور از عمل ضرب عمل گروه لی G است استفاده می کنیم پس بنابراین برای

هر g_1, g_2 متعلق به G و x متعلق به M داریم:

$$1)\Phi(e,x) = x$$
$$2)\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x) = g_1 g_2 x$$

تعریف ۱۴-۱ : اگر G یک گروه تبدیل گروه های لی بر خمینه هموار M باشد برای هر

$g \in G$ نگاشت $\Phi_g : M \to M$ را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\Phi_g(x) = \Phi(g,x) = gx$

در این صورت اولا Φ_g دیفیومورفیسم است و ثانیاً به کمک رابطه $\Phi_{g_1 g_2} = \Phi_{g_1} o \Phi_{g_2}$ رابطه

زیر را بدست می آوریم : $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$.

تعریف ۱۵-۱ : مجموعه تمام دیفیومورفیسم های $\Phi_g : M \to M$ را با $Diff(M)$ نشان می دهیم

که نسبت به عمل ترکیب یک گروه است.

تعریف ۱۶-۱ : اگر M یک خمینه هموار باشد با تعریف دو نگاشت هموار زیر مجموعه

$Diff(M)$ یک گروه لی است.

$$\begin{cases} Diff(M) \times Diff(M) \to Diff(M) \\ (\Phi_{g_1}, \Phi_{g_2}) \to \Phi_{g_1 g_2} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} Diff(M) \to Diff(M) \\ \Phi_{g_1} \to (\Phi_{g_1})^{-1} = \Phi_{g_1^{-1}} \end{cases}$$

مثال ۱۵-۱ : اگر G یک گروه لی باشد آنگاه نگاشت $\begin{cases}\varphi: G \to Diff(M) \\ g \to \varphi_g\end{cases}$ یک نگاشت

هومومورفیسم گروهای های لی است .

مثال ۱۶-۱ : اگر G و H دو گروه لی باشند و $\Psi : H \to G$ یک هومومورفیسم گروه لی باشد

آنگاه نگاشت $\varphi : H \times G \to G$ با ضابطه $\varphi(h,g) = \Psi(h)g$ یک عمل هموار خواهد بود .

اثبات : برای هر $e \in H, e^1, g \in G$ و هم چنین برای هر $h_1 \in H$ و h_2 داریم :

$$1)\varphi(e,g) = \Psi(e)g = e^1 g = g$$

$$2)\varphi(h_1, \varphi(h_2, g)) = \Psi(h_1)\Psi(h_2, g) = \Psi(h_1)\Psi(h_2)g = \Psi(h_1 h_2)g = \varphi(h_1 h_2, g)$$

در حالت خاص اگر H زیر گروه لی از G باشد با تعریف Ψ به عنوان نگاشت شمول، Hروی

G عمل می کند .

تعریف ۱۷-۱ : گوییم گروه G به طور موثر روی مجموعه M عمل می کند هرگاه $\varphi(g,x) = x$

فقط زمانی درست باشد که $g = e$ به عبارت دیگر برای هر نقطه x، اگر $\varphi_g(x) = x$ آنگاه $g = e$.

تعریف ۱۸-۱ : فرض می کنیم گروه G بر مجموعه M عمل می کند و $x \in M$ باشد. در این

صورت مجموعه $Gx = \{gx \mid g \in G\} \subseteq M$ را مدار نقطه x می نامیم. اگر $Gx = x$باشد، آنگاه

نقطه x یک نقطه پایدار توسط گروه G می نامیم. و اگر برای هر $x \in M$، $Gx = M$ باشد،

آنگاه Gبر M به طور متعدی عمل می کند .

مثال ۱۷–۱: $Gl(n,R)$ بر R^n به طور متعدی عمل می کند . زیرا اولاً نقطه $0 \in R^n$ نقطه پایدار

برای $GL(n,R)$ است و ثانیاً برای هر $x \in R^n - \{0\}$، داریم $Gx = R^n - \{0\}$.

مثال ۱۸–۱ : فرض کنیم $G = SO(2,R)$ گروه ماتریس های متعامد ۲×۲ با دترمینان یک باشد

از نظر هندسی G گروه دوران حول مبدأ مختصات است. آنگاه با تعریف نگاشت

$\begin{cases} \varphi : G \times R^2 \to R^2 \\ (A,x) \to Ax \end{cases}$، G روی $M = R^2$ به طور مؤثر عمل می کند زیرا :

$\forall x \in R^2 \quad \varphi(A,x) = Ax = x \Rightarrow A = I$.

مثال ۱۹–۱ : فرض کنیم $G = GL(n,R)$ گروه خطی ماتریس های $n \times n$ حقیقی با دترمینان

مخالف صفر و $M = M(n,R)$ مجموعه تمام ماتریس های $n \times n$ حقیقی باشد . اگر نگاشت

$\Phi : G \times M \to M$ را با ضابطه $\Phi(p,B) = PBP^{-1}$ تعریف کنیم آنگاه اولا $\Phi_p : M \to M$ یک

نگاشت دیفرانسیل پذیر و دوسویی است و $\Phi_q o \Phi_p = \Phi_{qp}$. اما چون $\Phi_{-I} = Id$، لذا G یک

گروه تبدیلات روی M می باشد که به طور موثر عمل نمی کند .

تعریف ۱۹–۱ : اگر G روی M عمل کند مجموعه عناصر $k \in G$ که $\Phi_k = id$ را با K نشان

می دهیم بنابراین $K=\{k\in G|\Phi_K=id\}$ و K یک زیر گروه نرمال در G است . زیرا برای هر $g\in G,k\in K$ داریم:

$$\Phi_{gkg-1}=\Phi_g o\Phi_k o\Phi_{g-1}=\Phi_g o\Phi_{g-1}=\Phi_g o(\Phi_g)^{-1}=id \Rightarrow gkg^{-1}\in K.$$

تعریف ۲۰-۱ : مجموعه Kرا که در ۱۹-۱ تعریف کردیم هسته هومورفیسم القایی $G\to Diff(M)$ می نامیم .

مثال ۲۰-۱ : گروه دو عضوی $Z_2=\{-1,1\}$ را با عمل ضرب و کره دو بعدی S^2 را در نظر گرفته و نگاشت $\Phi:Z_2\times S^2\to S^2$ را با ضابطه $\Phi(g,x)=gx$ تعریف می کنیم در این صورت برای $g=1$، gx نقطه x است و برای $g=-1$ ، gx نقطه متقاطر x بر کره دو بعدی S^2است. و دارای ویژگی های زیر می باشد :

۱) عمل Z_2 متعدی نیست .

۲) عمل Z_2 موثر است و عضو بی اثر برابر یک است .

۳) چون عمل موثر است، زیرگروههای پایای نقطه x مجموعه زیر است :

$$G(x)=\{g\in Z_2,\Phi(g,x)=x\}=\{1\}.$$

۴) مدار نقطه x مجموعه زیر می باشد : $orbit(x)=\Phi(Z_2,x)=\{x,-x\}$

تعریف ۲۱-۱: شار موضعی روی خمینه ها:

فرض $X \in \chi(M)$ از کلاس C^k و $k \geq 1$ باشد آنگاه برای هر $p \in M$ یک مجموعه باز U شامل p و یک $\varepsilon > 0$ و یک مجموعه یکتا از دیفیومورفیسم های $\{\Phi_t\}$ که نگاشت های $\Phi_t : U \to \Phi_t(U) \subset M$ برای هر $|t| < \varepsilon$ تعریف می شود، وجود دارند که در شرایط زیر صدق می کنند :

$$\Phi : [-\varepsilon, \varepsilon] \times U \to M$$
$$(t,x) \to \Phi_t(x)$$

۱) Φ از کلاس C^k باشد

۲) $\begin{cases} \Phi_0 = id \\ \Phi_{s+t} = \Phi_s o \Phi_t \qquad |t+s| \langle \varepsilon, |s|, |t| \langle \varepsilon \end{cases}$

اگر $q \in U$ آنگاه، $X_q = \frac{d}{dt}\Phi_t(q)|_{t=0}$. در این صورت خانواده $\{\Phi_t\}$ را گروه موضعی یک پارامتری وابسته به میدان برداری X می نامیم . با توجه به تعریف اخیر احکام زیر را داریم :

۱) اگر $x_0 \in M$ منحنی $t \to \Phi_t(x_0)$ را مدار x_0 برای شار Φ نامیم .

۲) مدارهای شار عبارت است از منحنی های انتگرال میدان برداری X در روی M .

۳) اگر $\{x_0\}$ یک مدار باشد، یعنی $\{x_0\}$ نقطه ثابت شار باشد، آنگاه $X_{x_0} = 0$.

۴) یک میدان برداری X را روی M کامل می نامیم هر گاه شارآن به ازای هر $t \in R$ تعریف شود .

۵) هر میدان برداری X روی M بیان کننده یک گروه موضعی یک پارامتری روی M است و بر عکس .

۶) اگر M فشرده باشد، هرگروه موضعی روی M یک گروه سراسری تعریف می کند به عبارت دیگر اگر M فشرده باشد هر میدان برداری X روی آن کامل است .

اثبات : رجوع به [5] .

مثال ۲۱-۱ : اگر $G=R$ و $M=R^2$ باشد، آنگاه عمل $\Phi : R\times R^2 \to R^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم $\Phi_t(x,y)=(x+t, y-\sin x+\sin(x+t))$ ثابت می کنیم که $\{\Phi_t\}$ یک گروه تبدیلات یک پارامتری بر R^2است. چون برای هر $t\in R$، مولفه های Φ_t هموارند پس Φ_t هموار می باشد . هم چنین داریم :

$$\Phi_t(x,y)=(x+t, y-\sin x+\sin(x+t))=(u,v) \Rightarrow \Phi_t^{-1}(u,v)=(u-t, v+\sin(u-t)-\sin u)=\Phi_{-t}(u,v)$$

چون هر یک از مولفه های $\Phi^{-1}{}_t$ هموارند پس Φ_t دیفیومورفیسم است. هم چنین با بررسی می توان نشان داد که روابط زیر درست می باشند .

$1)\Phi_0(x,y)=(x,y)$

$2)\Phi_s(\Phi_t)(x,y)=\Phi_{s+t}$