دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض
رشته ترکیبیات

توابع احاطه‌گر علامت‌دار در گرافها و گرافهای جهت‌دار

استاد راهنما
دکتر سید محمود شیخ الاسلامی

استاد مشاور
دکتر بهروز خیرفام

پژوهشگر
مریم عطاپور

شهریور ماه ۱۳۹۲
تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

سپاسگزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه غمها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اکنون که به پاس لطف الهی رساله حاضر، آماده شده است برخود وظیفه می‌دانم از حمایتهای بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدتهای استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **سید محمود شیخ‌الاسلامی** سپاسگزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر **بهروز خیرفام**، که مشاوره و مطالعه این رساله را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. همچنین از آقایان دکتر **حمیدرضا میمنی**، دکتر **جعفر امجدی** و دکتر **علیرضا غفاری** که داوری این رساله را پذیرفتند، سپاسگزارم.

در نهایت بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. همچنین تشکر می‌کنم از همسر مهربانم و برادر و خواهران عزیزم، به پاس کمکهای بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایانشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

مریم عطاپور

شهریورماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یالهای E باشد. همسایگی باز رأس $v \in V$ عبارت است از $N(v) = \{u|\ uv \in E\}$ و همسایگی بسته آن برابر است با $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار بر $V(G)$ باشد. در این صورت $\sum_{v \in V} f(v)$ را وزن تابع f می‌نامند. تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ را یک تابع احاطه‌گر (تام) علامت‌دار در G نامند هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، $f(N[v]) \geq 1$ ($f(N(v)) \geq 1$). مینیمم وزن در میان تمام توابع احاطه‌گر (تام) علامت‌دار G را عدد احاطه‌ای (تام) علامت‌دار G نامیده و با $\gamma_s(G)$ ($\gamma_{st}(G)$) نشان می‌دهند. تابع احاطه‌گر (تام) علامت‌دار f در گراف G را یک تابع احاطه‌گر (تام) علامت‌دار کلی نامند هرگاه f یک تابع احاطه‌گر (تام) علامت‌دار در $\overline{G}$ باشد.

فرض کنید $k \geq 1$ یک عدد صحیح باشد. تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ را یک تابع $k-$ احاطه‌گر علامت‌دار در G نامند هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، $f(N_G[v]) \geq k$. مینیمم وزن در میان تمام توابع $k-$ احاطه‌گر علامت‌دار G را عدد $k-$ احاطه‌ای علامت‌دار G نامیده و با $\gamma_{ks}(G)$ نشان می‌دهند.

خانواده $\{f_1, \ldots, f_d\}$ از توابع احاطه‌گر علامت‌دار در G را یک خانواده احاطه‌گر علامت‌دار نامند هرگاه به ازای هر $v \in V$، $\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 1$. بیشترین تعداد اعضای یک خانواده احاطه‌گر علامت‌دار در G را عدد دماتیک علامت‌دار در G نامند.

در این رساله، مفهوم توابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی را معرفی نموده و کرانهایی را برای عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی به دست می‌آوریم و درختها را براساس تفاضل عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی و عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار دسته‌بندی می‌کنیم. همچنین عدد $k-$ احاطه‌ای علامت‌دار و عدد $k-$ دماتیک علامت‌دار و عدد $k-$ دماتیک تام علامت دار در گرافهای جهت‌دار را معرفی نموده و کرانهایی را برای این پارامترها بر حسب پارامترهایی مانند درجه ورودی و خروجی رئوس، مرتبه، اندازه و دیگر پارامترهای یک گراف به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: تابع احاطه‌گر (تام) علامت‌دار، عدد احاطه‌ای (تام) علامت‌دار، تابع احاطه‌گر (تام) علامت‌دار کلی، عدد احاطه‌ای (تام) علامت‌دار کلی، عدد $k-$ احاطه‌ای علامت‌دار، عدد $k-$ دماتیک علامت‌دار و عدد $k-$ دماتیک تام علامت‌دار.

پیشگفتار

در سال های اخیر، انواع مختلفی از مفاهیم احاطه‌گری در گرافها معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به مفهوم احاطه‌گری علامت‌دار اشاره نمود. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یالهای E باشد. همسایگی باز رأس $v \in V$ عبارت است از $N(v) = \{u | \ uv \in E\}$ و همسایگی بسته آن برابر است با $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. اگر f یک تابع حقیقی بر V باشد، آنگاه وزن f برابر است با $\omega(f) = \sum\limits_{v \in V} f(v)$. تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ را یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار در G نامند هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، $f(N_G[v]) \geq ۱$. مینیمم وزن در میان تمام توابع احاطه‌گر علامت‌دار G را عدد احاطه‌ای علامت‌دار G نامیده و با $\gamma_s(G)$ نشان می‌دهند. یک تابع با وزن $\gamma_s(G)$ را یک γ_s- تابع در G می‌نامند.

توابع احاطه گر علامت دار، در سال ۱۹۹۵ توسط دونبار [۱] و همکارانش [۷]معرفی گردید و از آن پس مورد مطالعه مؤلفین زیادی همچون کوکین [۲] [۶]، فاوارون [۳] [۸]، فوردی [۴] [۱۱] و دیگران قرار گرفت. در سال ۲۰۰۱ زلینکا [۵] [۳۲] با تغییر همسایگی بسته به همسایگی باز در تعریف عدد احاطه‌ای علامت‌دار، مفهوم عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار را معرفی نمود و در سال ۲۰۰۴ هنینگ [۶] [۱۵] عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار را بطور گسترده بررسی کرد.

وانگ [۷] [۲۹] مفهوم توابع $k-$ احاطه‌گر علامت‌دار در گرافها را معرفی نمود و کرانهایی را

[۱] Dunbar
[۲] Cockayne
[۳] Favaron
[۴] Furedi
[۵] Zelinka
[۶] Henning
[۷] Wang

برای عدد $k-$ احاطه‌ای علامت‌دار در گرافها به دست آورد. در سال ۲۰۰۵ زلینکا [۳۱] مفهوم تابع احاطه‌گر علامت دار در گرافهای جهت دار را تعریف کرده و کرانهایی را برای عدد احاطه‌ای علامت‌دار در گرافهای جهت‌دار به دست آورد. پس از آن در سال ۲۰۰۹، کرمی و همکارانش [۱۸] عدد احاطه‌ای علامت‌دار در گرافهای جهت‌دار را مورد مطالعه قرار داده و کرانهای جالبی را برای این پارامتر ارایه کردند. همچنین آنها مفهوم توابع احاطه‌گر علامت‌دار کلی و عدد احاطه‌ای علامت‌دار کلی را معرفی و مورد مطالعه قرار دادند [۱۹].

رساله حاضر، بیان تفصیلی مقالات[۱] ، [۲] [۳] و [۴] بوده و به صورت زیر تنظیم شده است: در فصل اول، مفاهیم اولیه مورد نیاز در رساله را بیان می‌کنیم. در فصل دوم مفهوم توابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی را معرفی نموده و کرانهایی را برای عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی به دست می‌آوریم. در فصل سوم، بعد از معرفی عدد $k-$ احاطه‌ای علامت‌دار در گرافهای جهت‌دار، کرانهایی را برای این پارامتر برحسب مرتبه، اندازه و عدد رنگی گراف به دست می‌آوریم . در فصل چهارم، عدد $k-$ دماتیک علامت‌دار در گرافهای جهت‌دار را معرفی و مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در فصل پنجم، عدد $k-$ دماتیک تام علامت‌دار در گرافهای جهت‌دار را بررسی می‌کنیم.

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی و پیشینه پژوهش

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مطرح می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و نمادهای اولیه در نظریه گراف که در اینجا تعریف نشده‌اند، خواننده را به [۵]، [۱۴] و [۳۰] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی نظریه گراف

گراف $G=(V,E)$، یک ساختار ریاضی متشکل از دو مجموعه V و E است که در آن V مجموعه‌ای از نقاط و E مجموعه‌ای از دو تاییهای نامرتب روی V است. اعضای V را رأس و اعضای E را یال می‌نامند. تعداد رئوس و تعداد یالهای یک گراف را به ترتیب مرتبه و اندازه‌ی آن می‌نامند.

همسایگی باز رأس v از G، $N_G(v)$، مجموعه تمام رأسهایی از G است که با v مجاورند، به عبارت دیگر،

$$N_G(v)=\{u\in V(G)|\ uv\in E(G)\}.$$

همسایگی بسته رأس v عبارت است از $N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$. فرض کنید $S\subseteq V(G)$. همسایگیهای باز و بسته S به ترتیب عبارتند از $N_G(S)=\bigcup_{v\in S}N_G(v)$ و $N_G[S]=N_G(S)\cup S$. درجه رأس v برابر است با $|N_G(v)|$ که با $\deg_G(v)$ یا $\deg(v)$ نشان داده می‌شود. کوچکترین و

بزرگترین درجه گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهند، به عبارت دیگر،

$$\delta(G) = \min\{\deg(v) |\ v \in V(G)\}$$

و

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) |\ v \in V(G)\}.$$

اگر $\deg_G(v) = 0$، آنگاه رأس v را یک رأس تنها می‌نامند. رأس از درجه ۱ را برگ و رأس مجاور با یک برگ را رأس اتکا می‌نامند. گراف G را $r-$ منتظم می‌نامند هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، $\deg(v) = r$.

هرگاه $S \subseteq V(G)$، زیرگراف القایی توسط S، $G[S]$، زیرگرافی از G است که مجموعه رئوس آن S بوده و مجموعه یالهای آن متشکل از یالهایی از G است که هر دو رأس انتهایی آن در S باشند. یک طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. دو یال با رئوس انتهایی مشترک را یالهای چندگانه می‌نامیم. یک گراف ساده، گرافی است که طوقه و یال چندگانه نداشته باشد. گراف کامل، گراف ساده‌ای است که هر دو رأس آن باهم مجاورند. گراف کامل از مرتبه‌ی n را با K_n نشان می‌دهند. گراف دوبخشی گرافی است که مجموعه رئوس آن را می‌توان به دو زیرمجموعه U و W افراز کرد به طوری که هر یال از G یک رأس انتهایی در U و یک رأس انتهایی در W داشته باشد. U و W را بخشهای گراف می‌نامند. گراف دوبخشی کامل، گراف ساده دوبخشی است که در آن، هر رأس در یک بخش با هر رأس در بخش دیگر مجاور باشد. گراف کامل دوبخشی که m رأس در یک بخش و n رأس در بخش دیگر داشته باشد را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند. گراف $K_{1,n}$ را یک ستاره نامیده و در یک ستاره از مرتبه‌ی $n + 1 \geq 3$، رأس از درجه n را مرکز آن می‌نامند.

دو گراف G و H را یکریخت نامند هرگاه یک تابع دوسویی از $V(G)$ به $V(H)$ موجود باشد به قسمی که مجاورتها را حفظ کند. برای یکریختی دو گراف G و H، نماد $G \simeq H$ را به کار می‌بریم.

مکمل گراف G، $\overline{G}$، گرافی است که در آن $V(\overline{G}) = V(G)$ و به ازای هر $u, v \in V(G)$، $uv \in E(\overline{G})$ اگر و تنها اگر $uv \notin E(G)$.

الحاق دو گراف G_1 و G_2 که با $G_1 \vee G_2$ گرافی مانند G است که در آن

$$V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$$

و

$$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv|\ u\in V(G_1), v\in V(G_2)\}.$$

یک گشت از رأس v_0 به رأس v_n (یا $(v_0,v_n)-$ گشت) در گراف G، دنباله‌ای مرتب از رئوس و یالها مانند

$$W=v_0,e_1,v_1,e_2,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n$$

است که جملات آن به طور متناوب، رأسها و یالهای G هستند به طوری که به ازای هر i، v_{i-1},v_i رئوس انتهایی یال e_i هستند. یک پیگرد یک گشت بدون یال تکراری و یک مسیر یک پیگرد بدون رأس تکراری است. یک مسیر بسته (مسیری که ابتدا و انتهای آن یکی است) را یک دور می نامند. یک مسیر از مرتبه‌ی n را با P_n و یک دور از مرتبه‌ی n را با C_n نشان می‌دهند. برای دو رأس u و v، طول کوتاهترین $(u,v)-$ مسیر در G را فاصله u و v نامیده و با $d(u,v)$ نشان می‌دهند.

گراف G را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن حداقل یک گشت وجود داشته باشد و در غیر این صورت، آن را ناهمبند گویند. گراف همبند بدون دور را یک درخت نامند. یک درخت با یک رأس ثابت از آن، یک درخت ریشه‌دار نامیده می‌شود. فرض کنید T یک درخت ریشه‌دار بوده و $v\in V(T)$. مجموعه تمام فرزندان v را با $C(v)$، مجموعه نوادگان v را با $D(v)$، مجموعه $D(v)\cup\{v\}$ را با $D[v]$ و زیردرخت القایی توسط $D[v]$ را با T_v نشان می‌دهند. در این رساله، مجموعه برگهای درخت T را با $L(T)$، مجموعه رئوس اتکای T را با $S(T)$ و تعداد برگهای مجاور با v را با $l(v)$ نشان می‌دهیم.

یک گراف جهت‌دار عبارت است از زوج $D=(V,A)$ که در آن V مجموعه رأسها و A مجموعه‌ای از زوج مرتبها روی اعضای V است. اعضای A را کمانهای D می‌نامند. اگر $e=(u,v)$ کمانی از D باشد، آنگاه u را ابتدای e و v را انتهای آن می‌نامند. همسایگی باز ورودی و همسایگی باز خروجی رأس v از D، که به ترتیب با $N_D^-(v)$ و $N_D^+(v)$، نمایش داده می‌شوند، عبارتند از

$$N_D^-(v)=\{u\in V(G)|\ (u,v)\in A(D)\} \text{ و } N_D^+(v)=\{u\in V(G)|\ (v,u)\in A(D)\}.$$

همسایگی بسته ورودی و همسایگی بسته خروجی رأس v به ترتیب عبارتند از $N_D^-[v] = N_D^-(v) \cup \{v\}$ و $N_D^+[v] = N_D^+(v) \cup \{v\}$. فرض کنید $S \subseteq V(D)$. همسایگی باز و همسایگی بسته ورودی S به ترتیب عبارتند از

$$N_D^-(S) = \bigcup_{v \in S} N_D^-(v), \quad \text{و} \quad N_D^-[S] = N_D^-(S) \cup S$$

و همسایگی باز و همسایگی بسته خروجی S به ترتیب عبارتند از

$$N_D^+(S) = \bigcup_{v \in S} N_D^+(v). \quad \text{و} \quad N_D^+[S] = N_D^+(S) \cup S$$

درجه ورودی و خروجی رأس v در گراف جهت‌دار D که به ترتیب با $d_D^-(v)$ و $d_D^+(v)$ نمایش داده می‌شوند، عبارتند از

$$d_D^+(v) = |N_D^+(v)|. \quad \text{و} \quad d_D^-(v) = |N_D^-(v)|$$

به آسانی می‌توان دید که در هر گراف جهت‌دار D از اندازه m،

$$\sum_{v \in V(D)} d^-(u) = \sum_{v \in V(D)} d^+(u) = m \tag{۱.۱}$$

اگر در یک گراف جهت‌دار D، جهت کمانها را در نظر نگیریم، گرافی بدون جهت حاصل می‌شود که آن را گراف زمینه D نامند. گراف زمینه گراف جهت‌دار D را با $G(D)$ نشان می‌دهیم. گراف جهت‌داری که گراف زمینه آن کامل باشد، تورنومنت نامیده می‌شود. گراف جهت‌دار D دور نامیده می‌شود هرگاه گراف زمینه آن دور بوده و به ازای هر $v \in V(D)$، $d^+(v) = d^-(v) = ۱$ باشد و آن را $r-$ منتظم ورودی (خروجی) نامند هرگاه درجه ورودی (خروجی) هر رأس آن برابر r باشد. گراف جهت‌داری را که هیچ دور جهت‌دار از طول ۲ نداشته باشد، یک گراف جهت‌دهی شده می‌نامند. برای دو زیرمجموعه S و T از رأسهای D، مجموعه یالهایی را که ابتدای آنها در S و انتهای آنها T باشد، با $A(S,T)$ و تعداد اعضای $A(S,T)$ را با $a(S,T)$ نمایش می‌دهیم. گراف جهت‌دار وابسته گراف G، $D(G)$، گراف جهت‌داری است که از جایگزین کردن هر یال G با دو کمان در خلاف جهت هم به دست می‌آید. گراف جهت‌دار وابسته K_n را با K_n^* نشان می‌دهیم.

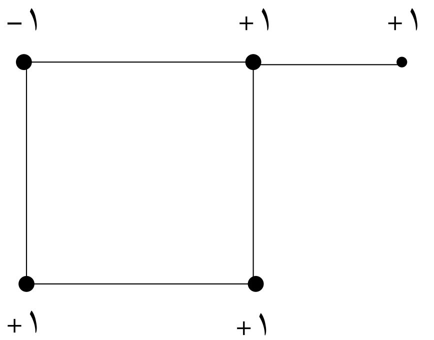
فرض کنید $f : V(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی باشد. برای زیرمجموعه S از رأسهای G، تعریف می‌کنیم $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$. بنابراین $f(V) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$ که آن را وزن تابع f نامیده و با $\omega(f)$

نشان می‌دهند. در حالت خاص، برای رأس $v \in V$، $f(N(v))$ را با $f[v]$ نشان می‌دهیم. در این رساله، توابع $f : V \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ را در گرافها و گرافهای جهت‌دار مطالعه می‌کنیم. برای تابع $f : V \longrightarrow \{-۱, ۱\}$، مجموعه‌های $\{v \in V : f(v) = +۱\}$ و $\{v \in V : f(v) = -۱\}$، به ترتیب با P_f و M_f (یا P و M) نشان می‌دهیم. در سراسر این رساله، منظور از یک گراف، گرافی بدون جهت، ساده و متناهی و منظور از یک گراف جهت‌دار، گراف جهت‌دار ساده متناهی است. قضیه زیر در اثبات برخی نتایج این رساله مفید خواهد بود.

قضیه ۱.۱.۱ [۲۴] *در هر گراف G، $\chi(G) \leq ۱ + \max\{\delta(H) |$ H یک زیرگراف G است$\}$ که در آن $\chi(G)$ عدد رنگی گراف G است.*

۲.۱ توابع احاطه‌گر علامت‌دار در گرافها و گرافهای جهت‌دار

تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ را یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار در G نامند هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، $f(N_G[v]) \geq ۱$. مینیمم وزن در میان تمام توابع احاطه‌گر علامت‌دار G را عدد احاطه‌ای علامت‌دار G نامیده و با $\gamma_s(G)$ نشان می‌دهند. یک تابع با وزن $\gamma_s(G)$ را یک γ_s- تابع در G می‌نامند. شکل (۱.۱)، یک گراف با عدد احاطه‌ای علامت‌دار برابر ۳ را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: گراف G با $\gamma_s(G) = ۳$.

توابع احاطه‌گر علامت‌دار، در سال ۱۹۹۵ توسط دونبار و همکارانش [۷]معرفی گردید و از

آن پس مورد مطالعه مؤلفین زیادی همچون کوکین [۶]، فاوارون [۸]، فوردی [۱۱] و دیگران قرار گرفت. در سال ۲۰۰۱ زلینکا [۳۲] با تغییر همسایگی بسته به همسایگی باز در تعریف عدد احاطه‌ای علامت‌دار مفهوم عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار را معرفی نمود. تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ را یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار در G نامند هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، $f(N_G(v)) \geq ۱$. مینیمم وزن در میان تمام توابع احاطه‌گر تام علامت‌دار G را عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار G نامیده و با $\gamma_{st}(G)$ نشان می‌دهند. عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار گراف شکل (۱.۱)، برابر ۳ است. در سال ۲۰۰۴ هنینگ [۱۵] عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار را بطور گسترده بررسی کرد. وی انگیزه‌اش از مطالعه دقیق‌تر این پارامتر را تنوع کاربرد آن در مدلسازی مسایل مختلف بیان کرد. به عنوان مثال، با نسبت دادن اعداد ۱+ و ۱- به رئوس یک گراف دلخواه می‌توان شبکه‌هایی از افراد یا سازمانهایی را مدل‌سازی کرد که بایستی در آنها تصمیمی کلی با پاسخ مثبت یا منفی گرفته شود. فرض کنید هر شخص (رأس) حق یک رأی و یک نظر نهایی داشته باشد. تخصیص عدد ۱+ به هر رأس بیانگر رأی مثبت آن فرد و عدد ۱- بیانگر رأی منفی آن فرد است. فرض بر این است که رأی هر فرد در نظر نهایی افراد مجاورش تأثیر می‌گذارد. بنابراین افرادی که درجه آنها بیشتر است، نفوذپذیری بیشتری دارند. نظر نهایی هر فرد مثبت است هرگاه تعداد آرای مثبت افراد مجاور او بیش از تعداد آرای منفی در مجاورت آن فرد باشد. هدف، جستجوی تخصیص آرایی است که به واسطه آنها نظر نهایی هر فرد مثبت باشد. چنین تخصیصی یک تخصیص یکنواخت نامیده می شود. این سیستم در بین کلیه تخصیصهای یکنواخت سعی دارد تعداد افراد با آرای مثبت را به کمترین تعداد ممکن برساند. تحت این شرایط، عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار، مینیمم مجموع ممکن برای کل آراست.

فرض کنید $k \geq ۱$ یک عدد صحیح باشد. تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-۱, ۱\}$ را یک تابع $k-$احاطه‌گر علامت‌دار در G نامند هرگاه به ازای هر $v \in V(G)$، $f(N_G[v]) \geq k$. مینیمم وزن در میان تمام توابع $k-$ احاطه‌گر علامت‌دار G را عدد $k-$ احاطه‌ای علامت‌دار G نامیده و با $\gamma_{ks}(G)$ نشان می‌دهند. یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار با وزن $\gamma_{ks}(G)$ را یک $\gamma_{ks}-$ تابع در G می‌نامند. این مفهوم توسط وانگ [۲۹] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است. به آسانی می‌توان دید که اگر $k = ۱$، آنگاه $\gamma_{ks}(G) = \gamma_s(G)$. چون تابع $k-$ احاطه‌گر علامت‌دار تنها در گرافهایی که مینیمم درجه آنها

حداقل $k-1$ باشد، قابل تعریف است، فرض خواهیم کرد که گرافهایی که برای آنها تابع $k-$ احاطه‌گر علامت‌دار را بررسی می‌کنیم، در این شرط صدق می‌کنند.

در سال ۲۰۰۵ زلینکا [۳۱] مفهوم تابع احاطه‌گر علامت دار در گرافهای جهت دار را معرفی کرده و کرانهایی را برای عدد احاطه‌ای علامت‌دار در گرافهای جهت‌دار به دست آورد. تابع $f : V(D) \longrightarrow \{-1 , 1\}$ را یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار در D نامند هرگاه به ازای هر $v \in V$، $f(N^{-}[v]) \geq 1$. در سال ۲۰۰۹، کرمی و همکارانش [۱۸] کرانهایی را برای این پارامتر به دست آوردند.

تابع احاطه‌گر علامت‌دار f در گراف G را یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار کلی در آن نامند هرگاه f یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار در $\overline{G}$ باشد. این مفهوم توسط کرمی و همکارانش [۱۹] معرفی و بررسی شده است.

خانواده $\{f_1, \ldots, f_d\}$ از توابع احاطه‌گر علامت‌دار در G را یک خانواده احاطه‌گر علامت‌دار در آن نامند هرگاه به ازای هر $v \in V$، $\sum_{i=1}^{d} f_i(v) \leq 1$. بیشترین تعداد اعضای یک خانواده احاطه‌گر علامت‌دار در G را عدد دماتیک علامت‌دار در G نامند. عدد دماتیک علامت‌دار توسط والکمن [1] و زلینکا [۲۸] معرفی گردید. والکمن و همکارانش در چندین مقاله عدد دماتیک علامت‌دار را مورد مطالعه قرار دادند که از آن جمله می‌توان به [۲۵]، [۲۶] و [۲۷] اشاره نمود. در سال ۲۰۰۶، هنینگ [۱۶] مفهوم عدد دماتیک تام علامت‌دار را معرفی و مطالعه نمود. در سال ۲۰۱۱ خودکار و شیخ الاسلامی [۲۰] عدد $k-$ دماتیک تام علامت‌دار را به عنوان تعمیمی از عدد دماتیک تام علامت‌دار معرفی نمودند.

[1] Volkmann

فصل ۲

توابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی

تابع احاطه گر تام علامت‌دار f در گراف G را یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی نامند هرگاه f یک تابع احاطه‌گر علامت‌دار در $\overline{G}$ باشد. توجه کنید که گراف G دارای تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی است اگر و تنها اگر G و $\overline{G}$ رأس منفرد نداشته باشند. عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی G، $\gamma_{gst}(G)$ ، برابر با مینیمم وزن یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی در G است. چون هر تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی در G یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار در G و $\overline{G}$ است، لذا

$$\gamma_{gst}(G) \geq \max\{\gamma_{st}(G), \gamma_{st}(\overline{G})\}. \tag{۱.۲}$$

در این فصل، کرانهایی را برای عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار به دست می‌آوریم. سپس این پارامتر را در درختها مطالعه کرده کرده و نشان می‌دهیم که در هر درخت T از مرتبه‌ی $n \geq ۴$ و $\Delta(T) \leq n-۲$، $\gamma_{gst}(T) \leq \gamma_{st}(T)+۴$ (توجه کنید که بنابر شرط $\Delta(T) \leq n-۲$، T و $\overline{T}$ رأس منفرد ندارند). همچنین تمام درختهای T را که در $\gamma_{gst}(T) = \gamma_{st}(T)+۴$ و $\gamma_{gst}(T) = \gamma_{st}(T)+۲$ صدق می‌کنند، دسته بندی می‌کنیم. بالاخره، عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی را در گرافهای دوبخشی کامل محاسبه می‌کنیم.

۱.۲ نتایج اولیه و کرانها

در این بخش، خواص اولیه عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی گرافها را مطالعه و کرانهایی را برای آن به دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۱.۲ [۱۵] *اگر G یک گراف از مرتبه‌ی n با مینیمم درجه $\delta \geq ۲$ و ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه*

$$\gamma_{st}(G) \geq \left(\frac{\lceil \frac{\delta-۱}{۲} \rceil - \lfloor \frac{\Delta-۱}{۲} \rfloor + ۱}{\lceil \frac{\delta-۱}{۲} \rceil + \lfloor \frac{\Delta-۱}{۲} \rfloor + ۱} \right) n.$$

نتیجه زیر از قضیه ۱.۱.۲ حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۱.۲ *اگر G یک گراف از مرتبه‌ی $n \geq ۱۳$ و $۳ \leq \Delta \leq \delta \leq ۲$ باشد، آنگاه*

$$\gamma_{gst}(G) = \gamma_{st}(G).$$

برهان : فرض کنید f یک $\gamma_{st}-$ تابع در G بوده و $v \in V(G)$ باشد. نشان می‌دهیم f یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار در $\overline{G}$ است. بنابر قضیه ۱.۱.۲، $\gamma_{st}(G) \geq \frac{n}{۳}$ و از این رو $\gamma_{st}(G) \geq ۵$. چون $\Delta(G) \leq ۳$، لذا $f(N_G[v]) \leq ۴$. بنابراین $f(N_{\overline{G}}(v)) \geq \gamma_{st}(G) - ۴ \geq ۱$ و حکم از (۱.۲) حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۱.۲ [۱۵] *فرض کنید T یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq ۲$ باشد. در این صورت $\gamma_{st}(T) \geq ۲$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هر رأس $v \in V(T) \backslash L(T)$ از درجه فرد بوده و با حداقل $\frac{\deg(v)-۱}{۲}$ برگ مجاور باشد. علاوه بر این، اگر $\gamma_{st}(T) = ۲$ و f یک $\gamma_{st}-$ تابع در T باشد، آنگاه برای هر $v \in V(T)$، $\sum_{x \in N(v)} f(x) = ۱$ و $M_f \subseteq L(T)$.*

قضیه ۳.۱.۲ [۳۲] *در هر گراف G از مرتبه‌ی $n \geq ۲$ و مینیمم درجه $\delta(G) \geq ۲$،*

$$\gamma_{st}(G) \equiv n \pmod{۲}.$$

گزاره ۱.۱.۲ *فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی n بوده و G و $\overline{G}$ رأس منفرد نداشته باشند. در این صورت*

$$\gamma_{gst}(G) \equiv n \pmod{۲}.$$

برهان : فرض کنید f یک $\gamma_{gst}-$ تابع در G باشد. چون $n = |P_f| + |M_f|$ و $\gamma_{gst}(G) = |P_f| - |M_f|$، لذا

$$n - \gamma_{gst}(G) = ۲|M_f|$$

و حکم حاصل می‌شود. □

گزاره زیر نتیجه مستقیم قضیه ۳.۱.۲ و گزاره ۱.۱.۲ است.

گزاره ۲.۱.۲ *فرض کنید G و $\overline{G}$ رأس منفرد نداشته باشند. در این صورت*

$$\gamma_{gst}(G) \equiv \gamma_{st}(G) \pmod{2}.$$

گزاره زیر نشان می‌دهد که عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی در گرافها یک عدد مثبت است.

گزاره ۳.۱.۲ *فرض کنید G و $\overline{G}$ از مرتبه‌ی $n \geq 4$ بوده و رأس منفرد نداشته باشند. در این صورت*

$$\gamma_{gst}(G) \geq \max\{3, \gamma_{st}(G), \gamma_{st}(\overline{G})\}.$$

بعلاوه، این کران قابل وصول است.

برهان : از فرض $n \geq 4$ و رابطه (۱.۲) نتیجه می‌شود که $\gamma_{gst}(G) \geq \max\{\gamma_{st}(G), \gamma_{st}(\overline{G})\}$. حال نشان می‌دهیم $\gamma_{gst}(G) \geq 3$. فرض کنید f یک $\gamma_{gst}-$ تابع در G باشد. به وضوح، $P \neq \emptyset$. فرض کنید $x \in P$. در این صورت

$$|N_G(x) \cap P| \geq |N_G(x) \cap M| + 1 \qquad (2.2)$$

و

$$|N_{\overline{G}}(x) \cap P| \geq |N_{\overline{G}}(x) \cap M| + 1 \qquad (3.2)$$

از (۲.۲) و (۳.۲) نتیجه می‌شود که

$$|N_G(x) \cap P| + |N_{\overline{G}}(x) \cap P| \geq |N_G(x) \cap M| + |N_{\overline{G}} \cap M| + 2.$$

چون $x \in P$، خواهیم داشت $|P| \geq |M| + 3$ و لذا $\gamma_{gst}(G) = |P| - |M| \geq 3$.

حال نشان می‌دهیم که این کران قابل وصول است. فرض کنید $k \geq 1$ و G یک گراف با مجموعه رئوس

$$V(G) = \{u_i, v_i, x_j, y_j, z_j \mid 1 \leq i \leq 3\ ,\ 1 \leq j \leq 2k+1\}$$

و مجموعه یالهای

$$E(G) = \{u_iu_{i+1}, u_iv_i, u_{i+1}v_i \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_1x_j, u_2y_j, u_3z_j \mid 1 \leq j \leq 2k+1\}$$

باشد که در آن $u_4 = u_1$. به آسانی می‌توان دید که تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq 3$ و $1 \leq j \leq k$، $f(v_i) = f(x_j) = f(y_j) = f(z_j) = -1$ و برای سایر رئوس x، $f(x) = 1$، یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی در G است و $\omega(f) = 3$. بنابراین $\gamma_{gst}(G) = 3$ و این برهان را کامل می‌کند. □

قضیه زیر نشان می‌دهد که تفاضل $\gamma_{gst}(G) - \max\{\gamma_{st}(G), \gamma_{st}(\overline{G})\}$ می‌تواند به اندازه کافی بزرگ باشد.

قضیه ۴.۱.۲ *به ازای هر عدد صحیح مثبت k، یک گراف همبند G موجود است به قسمی که $\overline{G}$ همبند بوده و*

$$\gamma_{gst}(G) - \max\{\gamma_{st}(G), \gamma_{st}(\overline{G})\} \geq 2k + 1.$$

برهان : فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G) = \{u_i, v_i \mid 0 \leq i \leq 4k-1\}$ و مجموعه یالهای

$$E(G) = \{v_iv_j \mid 0 \leq i \neq j \leq 4k-1\} \cup \{u_iv_i, u_iv_{i+1}, \ldots, u_iv_{i+2k-1} \mid 0 \leq i \leq 4k-1\}$$

باشد که در آن اندیسها به پیمانه $4k$ هستند. واضح است که $G \cong \overline{G}$ و لذا $\gamma_{st}(G) = \gamma_{st}(\overline{G})$. فرض کنید $f : V(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ تابعی باشد که به ازای هر $i = 0, 1, \ldots, 3k$، به v_i مقدار ۱ و به سایر رئوس مقدار ۱− را نسبت می‌دهد. به آسانی می‌توان دید که f یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار در G است و از این رو $\gamma_{st}(G) \leq \omega(f) = 2 - 2k$. بنابراین $\max\{\gamma_{st}(G), \gamma_{st}(\overline{G})\} \leq 2 - 2k$. از گزاره ۳.۱.۲ نتیجه می‌شود که

$$\gamma_{gst}(G) - \max\{\gamma_{st}(G), \gamma_{st}(\overline{G})\} \geq 2k + 1$$

و برهان تمام است. □

قضیه ۵.۱.۲ *برای هر گراف G از مرتبه‌ی n،*

$$\gamma_{gst}(G) \leq n - 2\min\{\lfloor\frac{\delta(G) - 1}{2}\rfloor, \lfloor\frac{\delta(\overline{G}) - 1}{2}\rfloor\}.$$

برهان : بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $\theta = \lfloor \frac{\delta(G)-1}{2} \rfloor = \min\{\lfloor \frac{\delta(G)-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{\delta(\overline{G})-1}{2} \rfloor\}$. فرض کنید v_1، ...، v_θ رئوس متمایزی از G باشند. تابع $f : V(G) \longrightarrow \{-1, 1\}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \{v_1, \dots, v_\theta\} \text{ اگر} \\ 1 & \text{در غیر این صورت .} \end{cases}$$

به آسانی می‌توان دید که f یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی در G بوده و $\omega(f) = n - 2\theta$. این برهان قضیه را کامل می‌کند. □

۲.۲ عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی در درختها

در این بخش، عدد احاطه‌ای تام علامت‌دار کلی در درختها را مطالعه می‌کنیم. توجه کنید که درخت T از مرتبه‌ی $n \geq 4$، دارای تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار کلی است اگر و تنها اگر $\Delta(T) \leq n - 2$، زیرا در این صورت $\overline{T}$ رأس منفرد ندارد. لم زیر در اثبات نتایج این بخش مفید خواهد بود.

لم ۱.۲.۲ *فرض کنید T یک درخت از مرتبه‌ی $n \geq 4$ بوده و $\Delta(T) \leq n - 2$. اگر f یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار در T باشد، آنگاه به ازای هر $v \in V(T)$،*

$$\sum_{u \in N_{\overline{T}}(v)} f(u) \geq 0.$$

برهان : فرض کنید $v \in V(T)$ و T در v ریشه‌دار شده باشد. اگر v یک برگ مجاور به رأس اتکای w باشد، آنگاه $f(w) = 1$ و از قضیه ۲.۱.۲ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{u \in N_{\overline{T}}(v)} f(u) = \sum_{x \in V(T)} f(x) - f(v) - f(w) \geq 1 - f(v) \geq 0.$$

فرض کنید v برگ نبوده و $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ باشد. حالتهای زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. $f(v) = -1$. در این صورت v رأس اتکا نیست و به ازای هر $1 \leq i \leq t$، تحدید f بر درخت T_{v_i} یک تابع احاطه‌گر تام علامت‌دار در T_{v_i} است. از قضیه ۲.۱.۲ نتیجه می‌شود که

$$f(N_{\overline{T}}(v) \cap V(T_{v_i})) = f(V(T_{v_i})) - f(v_i) \geq 2 - f(v_i) \geq 1.$$